Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

26. listopada 2020.

1. Riješite sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} x(y+z) &= 3 \\ y(x+z) &= -32 \\ z(x+y) &= -5. \end{aligned}$$

2. Zadan je izraz $|x-1|+|x-2|+|x-3|+\ldots+|x-2019|+|x-2020|$.

Odredite najveći interval realnih brojeva $[a, b]$ na kojemu dani izraz ima konstantnu vrijednost k za sve $x \in [a, b]$. Kolika je vrijednost konstante k?

3. Jurica i Lucija igraju igru pogađanja brojeva. U jednom trenutku Lucija kaže Jurici:

"Moj je broj djeljiv s 2, ali nije s 4 te pri dijeljenju sa 16 ne daje ostatak 14. Zbroj njegovih znamenki je 6 i ima točno 8 djelitelja, a zbroj djelitelja je djeljiv s 10."

Može li Jurica na temelju tih podataka pogoditi o kojem je broju riječ?

4. Na stranici $\overline{BC}$ trokuta ABC odabrane su točke D i E tako da vrijedi

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle EAC = 90^\circ, \quad |BE| = 2, \quad |ED| = 3, \quad |DC| = 3.$$

Izračunajte $\sin(2 \cdot \sphericalangle ACB)$ i površinu trokuta ABC.

5. Dvije prijateljice Esma i Ljerka osmislile su igru: svako se slovo imena zamijeni znamenkom od 1 do 5 prema danoj tablici. Tako ime Esma ima kod 4431, a Ljerka 24351.

Znamenke dobivenog koda $a_1a_2\ldots a_k$ koriste se za kretanje koracima iste duljine. Od početne se točke kreće a_1 koraka u smjeru sjevera, a za svaku sljedeću znamenku a_i zakreće se za 90° ulijevo i hoda a_i koraka u tom smjeru (dakle a_2 koraka u smjeru zapada, a_3 koraka u smjeru juga, a_4 koraka u smjeru istoka i tako dalje). Postupak se ponavlja (nakon posljednje znamenke nastavlja se s prvom znamenkom koda) sve do povratka u početnu točku.

1	2	3	4	5
A	B	C	Č	Ć
D	DŽ	Đ	E	F
G	H	I	J	K
L	LJ	M	N	NJ
O	P	R	S	Š
T	U	V	Z	Ž

Esma je zaključila da se svojim kodom nikada neće vratiti u početnu točku. Zašto?

Ljerka se u početnu točku vratila nakon točno $5n$ koraka. Odredite n i dokažite da će se svaka osoba s 5 slova u imenu vratiti u početnu točku nakon najviše 4 kruga, odnosno ponavljanja koda.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

26. listopada 2020.

1. Riješite sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} x + y - z &= 2 \\ x^2 + y^2 - z^2 &= -4 \\ x^3 + y^3 - z^3 &= 8. \end{aligned}$$

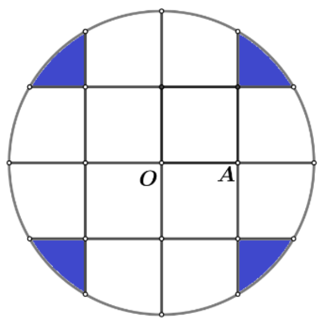
2. Koliko ima cijelih brojeva x za koje je vrijednost izraza

$$\frac{(x-1^2)(x-3^2)\ldots(x-(2k-1)^2)\ldots(x-2019^2)}{(x-2^2)(x-4^2)\ldots(x-(2k)^2)\ldots(x-2020^2)}$$

negativna?

3. Odredite dva pozitivna broja, djeljiva sa četiri, tako da razlika njihovih kubova bude četveroznamenkasti broj djeljiv s 91.

4. Iz kvadratne mreže izrezan je krug sa središtem u točki O polumjera 4 cm prikazan na slici.
Ako je $|OA| = 2$ cm, izračunajte ukupnu površinu osjenčanih dijelova kruga.



5. Test iz matematike sastojao se od tri zadatka. Profesor Maks priopćio je učenicima rezultate testa pomalo neodređeno, postavljajući novi zadatak:

Prvi i drugi zadatak točno je riješilo 7 učenika, drugi i treći zadatak 9 učenika, a prvi i treći zadatak točno je riješilo čak 13 učenika. Koliko je najmanje učenika točno riješilo sva tri zadatka?

Poznato je da su u razredu 24 učenika i da nema učenika koji nije riješio niti jedan zadatak.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

26. listopada 2020.

1. Riješite jednadžbu

$$x^2 + 2x\sin(xy) + 1 = 0.$$

2. Koliko nejednadžba

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{100} \leqslant 103$$

ima rješenja za koja su x_1, x_2,..., x_{100} prirodni brojevi?

3. Odredite koliko parova prirodnih brojeva (x, y) zadovoljava jednadžbu

$$\log_2\left(\log_{2^x}\left(\log_{2^y} 2^{10^{2020}}\right)\right) = 0.$$

Koji je najveći umnožak xy među svim takvim parovima?

4. U kvadrat $ABCD$ upisana je kružnica k. Iz točke T koja pripada kružnici k dijagonala $\overline{AC}$ vidi se pod kutom α, a dijagonala $\overline{BD}$ pod kutom β.

Dokažite da je $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta = 8$.

5. Izračunajte obujam pravilne četverostrane prizme $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ako je $|AB| = a$ i $\sphericalangle C_1AB + \sphericalangle C_1AC = 135°$.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

26. listopada 2020.

1. Riješite jednadžbu

$$\log_{2020} \sqrt{x} + \log_{2020} \sqrt[4]{x} + \log_{2020} \sqrt[8]{x} + \ldots + \log_{2020} \sqrt[2^n]{x} + \ldots = \frac{2}{\log_2 x} + \log_x 505.$$

2. U kompleksnoj ravnini nalazi se jednakostranični trokut ABC. Kompleksan broj $z = \sqrt{3} + 4i$ pridružen je vrhu C, a kompleksan broj $z = i$ središtu S tom trokutu opisane kružnice. Odredite kompleksne brojeve pridružene vrhovima A i B.

3. Neka je $f : \mathbb{R} \to \langle -1, 1 \rangle$,

$$f(x) = \frac{100^{-x} - 100^{x}}{100^{-x} + 100^{x}}.$$

Odredite $f^{-1}(x) - f^{-1}(1 + 2x)$.

4. Niz realnih brojeva (a_n) zadan je rekurzivno s

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{3}{5}, \quad a_n = \frac{a_{n-2} \cdot a_{n-1}}{2a_{n-2} - a_{n-1}} \quad \text{za } n \geqslant 3.$$

Odredite a_{2020}.

5. Duljina stranice kvadrata $ABCD$ iznosi $24\,\text{cm}$. Točka P je na dijagonali $\overline{AC}$ i vrijedi $|AP| > |PC|$. Točka S_1 je središte kružnice opisane trokutu APB, a točka S_2 središte kružnice opisane trokutu PCD. Ako je $|\sphericalangle S_1 P S_2| = 120°$, odredite $|AP|$.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.