DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

26. listopada 2020.

Zadatak B-1.1.

Riješite sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} x(y+z) &= 3 \\ y(x+z) &= -32 \\ z(x+y) &= -5. \end{aligned}$$

Prvo rješenje.

Zbrajanjem danih jednadžbi dobivamo $2xy+2xz+2yz=-34$ odnosno $xy+xz+yz=-17$.

Kako je $xy+xz=3$,slijedi $yz=-20$.

Analogno dobivamo $xz=15$ i $xy=-12$.

Množenjem triju tako dobivenih jednakosti dobivamo $x^2y^2z^2=60^2$ odakle slijedi da je $xyz=60$ ili $xyz=-60$.

Iz $xyz=60$ i $yz=-20$ slijedi $x=-3$,

iz $xyz=60$ i $xz=15$ slijedi $y=4$,

a iz $xyz=60$ i $xy=-12$ slijedi $z=-5$.

Dakle, jedno rješenje je $(-3,4,-5)$.

Iz $xyz=-60$ i $yz=-20$ slijedi $x=3$,

iz $xyz=-60$ i $xz=15$ slijedi $y=-4$,

a iz $xyz=-60$ i $xy=-12$ slijedi $z=5$.

Dakle, drugo rješenje je $(3,-4,5)$.

Drugo rješenje.

Izrazimo npr. $x=\dfrac{3}{y+z}$ iz prve jednadžbe te uvrstimo u druge dvije.

$$\begin{aligned} y(\frac{3}{y+z}+z) &= -32 \\ z(\frac{3}{y+z}+y) &= -5. \end{aligned}$$

Slijedi

$$\begin{aligned} \frac{3y}{y+z}+yz &= -32 \\ \frac{3z}{y+z}+yz &= -5, \end{aligned}$$

a oduzimanjem tih jednadžbi dobivamo

$$\frac{3(y-z)}{y+z}=-27 \qquad \text{odnosno} \qquad \frac{(y-z)}{y+z}=-9.$$

Slijedi $y-z=-9(y+z)$, tj. $y=-\frac{4}{5}z$.

Uvrštavanjem u jedu od prethodnih jednadžbi dobivamo $z^2=25$.

Ako je $z=5$, onda je $y=-4$ te $x=3$, a ako je $z=-5$, onda je $y=4$ te $x=-3$.

Rješenja danog sustava su $(3,-4,5)$ i $(-3,4,-5)$.

Zadatak B-1.2.

Zadan je izraz $\quad |x-1|+|x-2|+|x-3|+\ldots+|x-2019|+|x-2020|$.

Odredite najveći interval realnih brojeva $[a,b]$ na kojemu dani izraz ima konstantnu vrijednost k za sve $x\in[a,b]$. Kolika je vrijednost konstante k?

Rješenje.

Vrijednost danog izraza ovisi o predznaku svakog od izraza unutar apsolutne vrijednosti, pa se računa po intervalima od $\langle-\infty,1]$, $[1,2]$, $[2,3]$, $\ldots$, $[1010,1011]$,$\ldots$, $[2019,2020]$, $[2020,\infty\rangle$.

Ta vrijednost neće ovisiti o varijabli x na onom intervalu na kojem će zbroj svih varijabli biti jednak 0. To znači da na tom intervalu polovica od svih izraza unutar apsolutne vrijednosti mora biti pozitivna, a druga polovica negativna. Uočimo da je svaki od 1010 izraza $x-1$, $x-2$, $\ldots$, $x-1010$ pozitivan, a svaki od 1010 izraza $x-1011$, $x-1012$,$\ldots$, $x-2020$ negativan na intervalu $[1010,1011]$.

Stoga za $x\in[1010,1011]$ imamo

$$\begin{aligned}
&|x-1|+|x-2|+|x-3|+\cdots+|x-2019|+|x-2020|\\
&=x-1+x-2+x-3+\cdots+x-1010+(-x+1011-x+1012-x+1013-\cdots-x+2020)\\
&=(-1-2-3-\cdots-1010)+(1011+1012+1013+\cdots+2020)\\
&=(-1+1011)+(-2+1012)+(-3+1013)+\cdots+(-1010+2020)\\
&=1010\cdot1010=1010^2.
\end{aligned}$$

Zadatak B-1.3.

Jurica i Lucija igraju igru pogađanja brojeva. U jednom trenutku Lucija kaže Jurici:

"Moj je broj djeljiv s 2, ali nije s 4 te pri dijeljenju sa 16 ne daje ostatak 14. Zbroj njegovih znamenki je 6 i ima točno 8 djelitelja, a zbroj djelitelja je djeljiv s 10."

Može li Jurica na temelju tih podataka pogoditi o kojem je broju riječ?

Rješenje.

Neka je n traženi broj. Kako je zbroj znamenki jednak 6, broj n je djeljiv s 3.

Broj n nije djeljiv s 4 (po uvjetu zadatka) ni s 9 (zbroj znamenki je 6), stoga se 2 i 3 kao prosti faktori od n javljaju samo jednom.

Broj n ima 8 djeljitelja, što znači da osim 2 i 3 ima još neki prosti faktor $p \neq 2$, $p \neq 3$ u svom rastavu, tj. n je oblika $n = 6p$.

Djelitelji broja n su: 1, 2, 3, 6, p, $2p$, $3p$, $6p$.

Njihov je zbroj jednak $1 + 2 + 3 + 6 + p + 2p + 3p + 6p = 12 + 12p = 12(1 + p)$.

Kako je taj zbroj djeljiv s 10, broj $(1 + p)$ mora biti djeljiv s 5, tj. zadnja znamenka broja p treba biti 4 ili 9. Kako je p prost broj, njegova je zadnja znamenka 9, što daje 4 kao zadnju znamenku broja n.

Kako je zbroj znamenki od n jednak 6, dvoznamenkasti završetak broja n može biti 04, 14 ili 24, a kako n nije djeljiv 4, jedina mogućnost je 14. Znači, broj n je oblika $n = 100\ldots014$.

Treba još odrediti koliko je znamenki 0 u zapisu broja n. Broj n možemo zapisati u obliku $n = 10^x + 14$, $x > 1$.

Kako je 10^x djeljivo sa 16 za $x \geqslant 4$ (u tom bi slučaju ostatak pri dijeljenju broja n sa 16 bio 14, protivno pretpostavci), dovoljno je provjeriti za $x = 2$ i $x = 3$.

Za $x = 2$ je $n = 114 = 6 \cdot 19$, a kako je 19 prosti broj, ovo rješenje ispunjava uvjete zadatka.

Za $x = 3$ je $n = 1014 = 6 \cdot 169$, a kako je 169 složeni broj, ovo rješenje ne ispunjava uvjete zadataka.

Jurica može na temelju zadanih podataka pogoditi da se radi o broju 114.

Zadatak B-1.4.

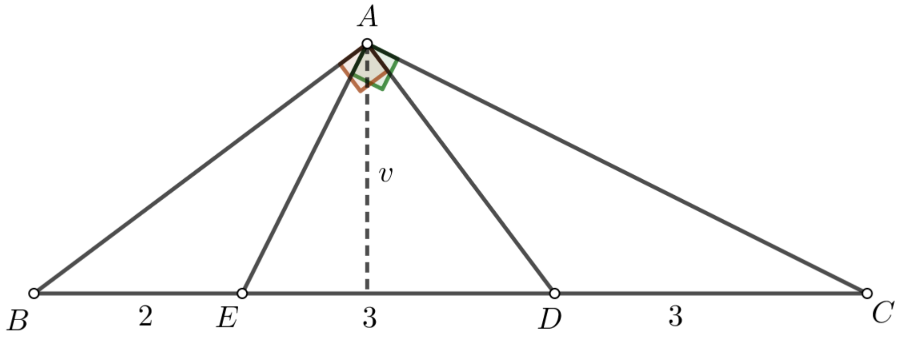
Na stranici $\overline{BC}$ trokuta ABC odabrane su točke D i E tako da vrijedi

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle EAC = 90^\circ, \quad |BE| = 2, \quad |ED| = 3, \quad |DC| = 3.$$

Izračunajte $\sin(2 \cdot \sphericalangle ACB)$ i površinu trokuta ABC.

Prvo rješenje.

U pravokutnom trokutu AEC točka D je polovište hipotenuze, tj. ujedno je i središte opisane kružnice tog trokuta i vrijedi $|AD| = 3$.



Iz pravokutnog trokuta ABD dobivamo

$$|AB|^2 = |BD|^2 - |AD|^2$$
$$|AB|^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$$
$$|AB| = 4.$$

Iz površine trokuta ABD izračunat ćemo visinu v.

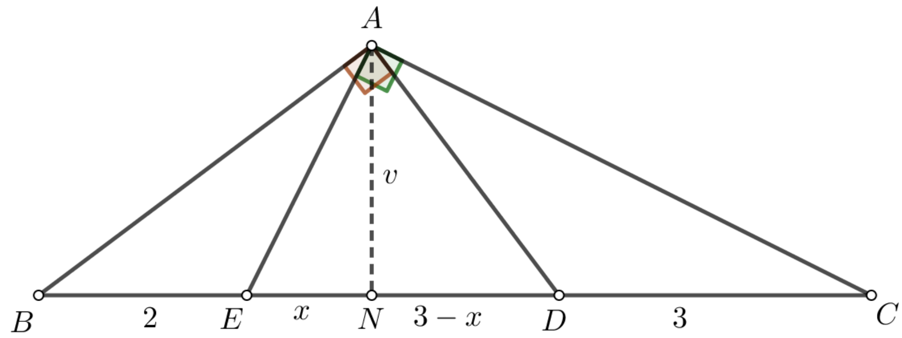
$$P_{ABD} = \frac{|BD| \cdot v}{2} = \frac{|AB| \cdot |AD|}{2}$$
$$v = \frac{|AB| \cdot |AD|}{|BD|} = \frac{4 \cdot 3}{5} = \frac{12}{5}$$

Površina trokuta ABC jednaka je $P = \dfrac{|BC| \cdot v}{2} = \dfrac{8 \cdot \frac{12}{5}}{2} = \dfrac{48}{5}$.

Trokut DCA je jednakokračan i vrijedi $\sphericalangle DAC = \sphericalangle ACD$, a kako je $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ACB$ i $\sphericalangle ADE$ je vanjski kut trokuta DCA, imamo $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ADE = \sphericalangle DAC + \sphericalangle ACD = 2\sphericalangle ACD = 2\sphericalangle ACB$.

Konačno, u pravokutnom trokutu ABD je $\sin(2\sphericalangle ACB) = \sin\sphericalangle ADB = \frac{|AB|}{|BD|} = \frac{4}{5}$.

Drugo rješenje.



Primijenimo li Euklidov poučak na pravokutne trokute ABD i AEC (ili sličnost pravokutnih trokuta na koje visina v dijeli trokut ABD, odnosno AEC) dobivamo $v^2 = x(6 - x)$ i $v^2 = (3 - x)(2 + x)$.

Odatle slijedi $x(6 - x) = (3 - x)(2 + x)$, odnosno $x = \dfrac{6}{5}$. Tada je $v = \frac{12}{5}$ i $|AD| = 3$.

Površina trokuta ABC je $P = \dfrac{|BC| \cdot v}{2} = \dfrac{8 \cdot \frac{12}{5}}{2} = \dfrac{48}{5}$.

Kako je $|AD| = 3 = |DC|$, trokut ADC je jednakokračan, pa dalje računamo kao i u prvom rješenju: $\sphericalangle ADB = \sphericalangle DAC + \sphericalangle ACD = 2\sphericalangle ACD = 2\sphericalangle ACB$.

Konačno, u pravokutnom trokutu ABD je $\sin(2\sphericalangle ACB) = \sin\sphericalangle ADB = \frac{|AB|}{|BD|} = \frac{4}{5}$.

Zadatak B-1.5.

Dvije prijateljice Esma i Ljerka osmislile su igru: svako se slovo imena zamijeni znamenkom od 1 do 5 prema danoj tablici. Tako ime Esma ima kod 4431, a Ljerka 24351.

1	2	3	4	5
A	B	C	Č	Ć
D	DŽ	Đ	E	F
G	H	I	J	K
L	LJ	M	N	NJ
O	P	R	S	Š
T	U	V	Z	Ž

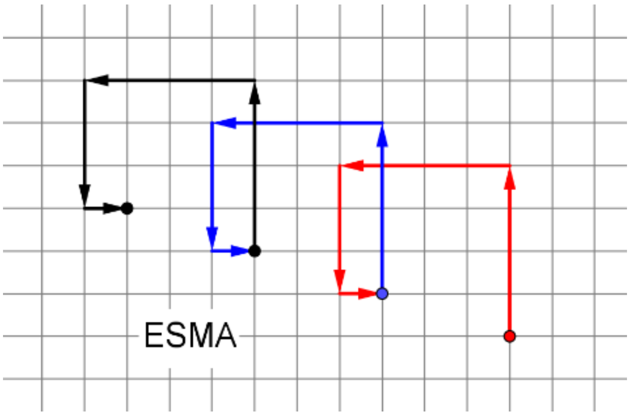
Znamenke dobivenog koda $a_1a_2\ldots a_k$ koriste se za kretanje koracima iste duljine. Od početne se točke kreće a_1 koraka u smjeru sjevera, a za svaku sljedeću znamenku a_i zakreće se za $90°$ ulijevo i hoda a_i koraka u tom smjeru (dakle a_2 koraka u smjeru zapada, a_3 koraka u smjeru juga, a_4 koraka u smjeru istoka i tako dalje). Postupak se ponavlja (nakon posljednje znamenke nastavlja se s prvom znamenkom koda) sve do povratka u početnu točku.

Esma je zaključila da se svojim kodom nikada neće vratiti u početnu točku. Zašto?

Ljerka se u početnu točku vratila nakon točno $5n$ koraka. Odredite n i dokažite da će se svaka osoba s 5 slova u imenu vratiti u početnu točku nakon najviše 4 kruga, odnosno ponavljanja koda.

Rješenje.

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da su Esma i Ljerka krenula iz točke $(0,0)$.



Esmino kretanje izgleda ovako:

Prvi krug: $(0,0)$, $(0,4)$, $(-4,4)$, $(-4,1)$, $(-3,1)$

Drugi krug: $(-3,1)$, $(-3,5)$, $(-7,5)$, $(-7,2)$, $(-6,2)$

Treći krug: $(-6,2)$, $(-6,6)$, $(-10,6)$, $(-10,3)$, $(-9,3)$.

Nakon k-tog kruga koordinate završne točke mijenjaju se u $(-3k,k)$ pa Esma očito ne može doći u početnu točku jer se završne točke nalaze na jednom pravcu.

Ljerkino kretanje izgleda ovako:

Prvi krug: $(0,0)$, $(0,2)$, $(-4,2)$, $(-4,-1)$, $(1,-1)$, $(1,0)$

Drugi krug: $(1,0)$, $(-1,0)$, $(-1,-4)$, $(2,-4)$, $(2,1)$, $(1,1)$

Treći krug: $(1,1)$, $(1,-1)$, $(5,-1)$, $(5,2)$, $(0,2)$, $(0,1)$

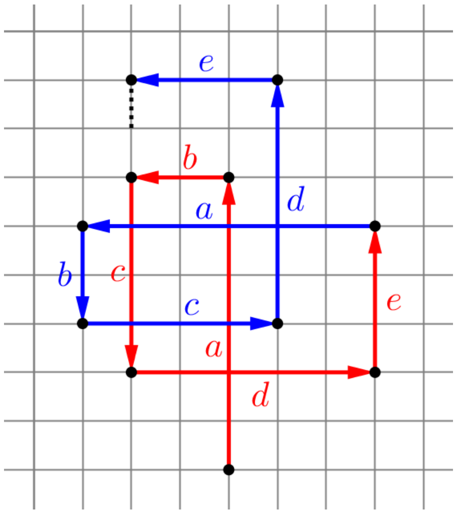
Četvrti krug: $(0,1)$, $(2,1)$, $(2,5)$, $(-1,5)$, $(-1,0)$, $(0,0)$

Ljerki je bilo potrebno 4 kruga da se vrati u točku iz koje je krenula.

Budući da je svaki krug iznosio $2+4+3+5+1=15$ koraka, Ljerki je bilo potrebno ukupno 60 koraka, pa je traženi $n=12$.

Neka je kôd imena sa 5 slova $abcde$, gdje su $a,b,c,d,e \in \{1,2,3,4,5\}$. Krećemo iz točke (x,y) prema gore za a, lijevo za b, dolje za c, desno za d i opet gore za e i dolazimo u točku $(x-b+d, y+a-c+e)$.

U drugom krugu krećemo iz te točke prema lijevo za a, dolje za b, desno za c, gore za d, lijevo za e i dolazimo u točku $(x-b+d-a+c-e, y+a-c+e-b+d)$.



U trećem krugu krećemo iz te točke prema dolje za a, desno za b, gore za c, lijevo za d i opet dolje za e i dolazimo u točku $(x-b+d-a+c-e+b-d, y+a-c+e-b+d-a+c-e) = (x-a+c-e, y-b+d)$.

U četvrtom krugu krećemo iz te točke prema desno za a, gore za b, lijevo za c, dolje za d, desno za e i dolazimo u točku $(x-a+c-e+a-c+e, y-b+d+b-d) = (x,y)$.

Osobi s 5 slova u imenu potrebna su 4 kruga da se vrati u početnu točku.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

26. listopada 2020.

Zadatak B-2.1.

Riješite sustav jednadžbi

$$
\begin{aligned}
x+y-z&=2\\
x^2+y^2-z^2&=-4\\
x^3+y^3-z^3&=8.
\end{aligned}
$$

Rješenje.

Prvu jednadžbu sustava možemo pisati u obliku $x+y=z+2$. Kvadriranjem dobijemo $x^2+y^2+2xy=z^2+4z+4$, a oduzmemo li od toga drugu danu jednadžbu dobivamo $2xy=4z+8$, odnosno $xy=2z+4$.

Zbroj kubova x^3+y^3 u trećoj jednadžbi sustava zapišimo u pogodnijem obliku $(x+y)^3-3xy(x+y)-z^3=20$ i uvrstimo $x+y=z+2$ i $xy=2z+4$.

Dobivamo jednadžbu s jednom nepoznanicom $(z+2)^3-3(2z+4)(z+2)-z^3=8$ kojoj je rješenje $z=-2$.

Stoga vrijedi

$$x+y=0 \qquad xy=0.$$

Jedino rješenje ovog sustava je $(0,0)$. Prema tome rješenje danog sustava je $(x,y,z)=(0,0,-2)$.

Zadatak B-2.2.

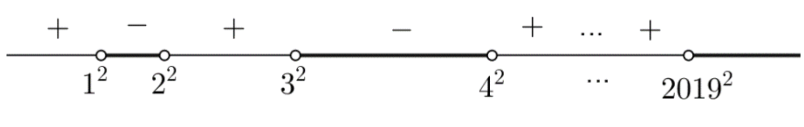
Koliko ima cijelih brojeva x za koje je vrijednost izraza

$$\frac{(x-1^2)(x-3^2)\ldots(x-(2k-1)^2)\ldots(x-2019^2)}{(x-2^2)(x-4^2)\ldots(x-(2k)^2)\ldots(x-2020^2)}$$

negativna?

Rješenje.

Predznak danog izraza se mijenja u nultočkama brojnika i nazivnika kao što je prikazano na slici.



Koristeći ovaj prikaz (ili tablice predznaka) zaključujemo da je vrijednost promatranog izraza pozitivna za sve $x < 1$ i $x > 2020^2$, a na intervalima određenim nultočkama brojnika i nazivnika $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 2019^2, 2020^2$ predznak će biti negativan na intervalima

$$\langle 1^2, 2^2 \rangle, \langle 3^2, 4^2 \rangle, \ldots, \langle (2k-1)^2, (2k)^2 \rangle, \ldots, \langle 2019^2, 2020^2 \rangle.$$

Broj cijelih brojeva koji su unutar tih intervala je

$$\begin{aligned}
&(2^2 - 1^2 - 1) + (4^2 - 3^2 - 1) + \cdots + ((2k)^2 - (2k-1)^2 - 1) + \cdots + (2020^2 - 2019^2 - 1) \\
&= (2^2 - 1^2) + (4^2 - 3^2) + \cdots + ((2k)^2 - (2k-1)^2) + \cdots + (2020^2 - 2019^2) - 1010 \\
&= (2-1)(2+1) + (4-3)(4+3) + \cdots + \\
&\quad ((2k) - (2k-1))((2k) + (2k-1)) + \cdots + (2020 - 2019)(2020 + 2019) - 1010 \\
&= 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 2020 - 1010 = \frac{2020 \cdot (1 + 2020)}{2} - 1010 = 2040200.
\end{aligned}$$

Zadatak B-2.3.

Odredite dva pozitivna broja, djeljiva sa četiri, tako da razlika njihovih kubova bude četveroznamenkasti broj djeljiv s 91.

Rješenje.

Neka su traženi brojevi x i y, $x > y$. Budući da su djeljivi sa 4, vrijedi $x = 4a$, $y = 4b$, za neke prirodne brojeve a i b, $a > b$.

Prema uvjetu zadatka, vrijedi

$$(4a)^3 - (4b)^3 = 64(a^3 - b^3) = 64 \cdot 91k, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Kako broj mora biti četveroznamenkasti, a $64 \cdot 91 = 5824$ slijedi $k = 1$.

Tada je $a^3 - b^3 = 91$ odnosno $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = 7 \cdot 13$.

Vrijedi $a^2 + ab + b^2 = (a-b)^2 + 3ab > (a-b)^2 > a - b$ za $a - b > 1$. Dakle faktor $a - b$ mora biti manji od faktora $a^2 + ab + b^2$ pa je dovoljno riješiti ove sustave jednadžbi:

(1) $\quad a - b = 1, \quad a^2 + ab + b^2 = 91;$

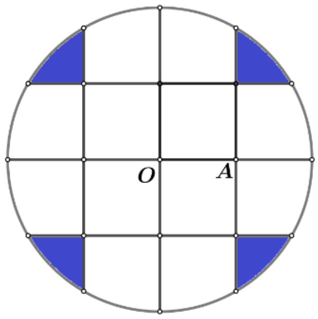
(2) $\quad a - b = 7, \quad a^2 + ab + b^2 = 13.$

Rješavanjem sustava (1) dobivamo jednadžbu $b^2 + b - 30 = 0$ kojoj je pozitivno rješenje $b = 5$. Tada je $a = 6$.

Rješavanjem sustava (2) dobivamo jednadžbu $b^2 + 7b + 12 = 0$ koja nema pozitivnih rješenja.

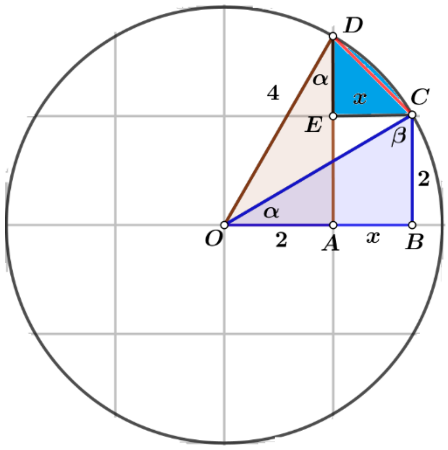
Dakle, traženi brojevi su $x = 4 \cdot 6 = 24$ i $y = 4 \cdot 5 = 20$.

Zadatak B-2.4.



Iz kvadratne mreže izrezan je krug sa središtem u točki O polumjera 4 cm prikazan na slici.
Ako je $|OA| = 2$ cm, izračunajte ukupnu površinu osjenčanih dijelova kruga.

Rješenje.



Površinu jednog osjenčanog dijela računamo tako da od površine kružnog isječka OCD oduzmemo površinu trokuta OCD i pridodamo površinu trokuta ECD.

Pravokutni trokuti OAD i CBO su sukladni (SSK) i vrijedi:

$$\sin\alpha = \frac{2}{4} = 0.5, \quad \alpha = 30^\circ, \quad \beta = 60^\circ, \quad \sphericalangle COD = \sphericalangle AOD - \sphericalangle BOC = \beta - \alpha = 30^\circ.$$

Prema Pitagorinom poučku je $(2+x)^2 + 2^2 = 4^2$, odnosno $x = 2\sqrt{3} - 2$.

Površina kružnog isječka OCD jednaka je $P_i = \dfrac{r^2\pi}{12} = \dfrac{4\pi}{3}$ cm.

Površina trokuta OCD jednaka je $P_{OCD} = \frac{1}{2} \cdot 4^2 \sin 30^\circ = 4$ cm.

Površina trokuta ECD jednaka je $P_{ECD} = \frac{1}{2} x^2 = \frac{(2\sqrt{3}-2)^2}{2} = (8 - 4\sqrt{3})$cm.

Tražena površina jednaka je

$$P = 4(P_i - P_{OCD} + P_{ECD}) = 4\left(\frac{4\pi}{3} - 4 + 8 - 4\sqrt{3}\right) = \left(\frac{16\pi}{3} + 16 - 16\sqrt{3}\right) \text{cm}.$$

Napomena: Površina trokuta OCD se može izračunati i bez formule $P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$:

$$P = \frac{|CD| \cdot v_{|CD|}}{2} = \frac{x\sqrt{2}}{2}\sqrt{4^2 - \left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{(2\sqrt{3}-2)\sqrt{2}}{2}\sqrt{16 - \frac{1}{2}(2\sqrt{3}-2)^2}$$
$$= (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sqrt{8+4\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2(8+4\sqrt{3})} = \sqrt{(8-4\sqrt{3})(8+4\sqrt{3})} = 4.$$

Zadatak B-2.5.

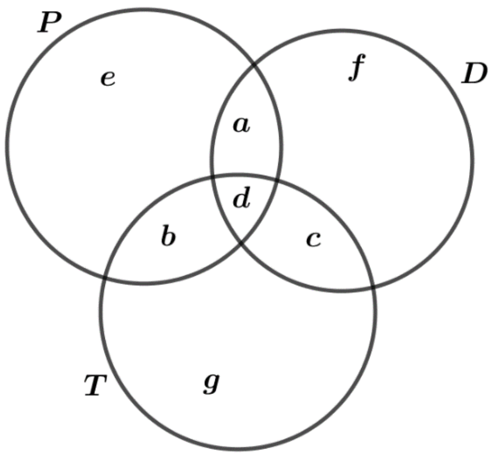
Test iz matematike sastojao se od tri zadatka. Profesor Maks priopćio je učenicima rezultate testa pomalo neodređeno, postavljajući novi zadatak:

Prvi i drugi zadatak točno je riješilo 7 učenika, drugi i treći zadatak 9 učenika, a prvi i treći zadatak točno je riješilo čak 13 učenika. Koliko je najmanje učenika točno riješilo sva tri zadatka?

Poznato je da su u razredu 24 učenika i da nema učenika koji nije riješio niti jedan zadatak.

Rješenje.

Broj učenika koji su riješili samo prvi i drugi zadatak označimo s a, samo prvi i treći s b, samo drugi i treći s c. Neka je d broj učenika koji su točno riješili sva tri zadatka, e broj onih koji su točno riješili samo prvi zadatak, f samo drugi i g samo treći.



Tada je $a+d=7$, $b+d=13$, $c+d=9$, $a+b+c+d+e+f+g=24$.

Zbrojimo prve tri jednakosti: $a+b+c+3d=29$. Kako je $a+b+c+d+e+f+g=24$, slijedi $a+b+c+3d+e+f+g=24+2d$, $29+e+f+g=24+2d$, $e+f+g+5=2d$.

Prema uvjetu zadatka $e+f+g$ je nenegativan broj.

Za $e+f+g=0$ bilo bi $2d=5$, što je nemoguće.

Kada je $e+f+g=1$ vrijedi $d=3$. To je najmanja moguća vrijednost broja d.

Najmanje je troje učenika točno riješilo sva tri zadatka.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

26. listopada 2020.

Zadatak B-3.1.

Riješite jednadžbu

$$x^2 + 2x\sin(xy) + 1 = 0.$$

Prvo rješenje.

Ova će jednadžba imati realna rješenja ako je diskriminanta (kvadratne jednadžbe po x) veća ili jednaka 0, odnosno

$$4\sin^2(xy) - 4 \geqslant 0.$$

S obzirom da je $\sin^2(xy) \leqslant 1$, gornja je nejednakost moguća samo ako je $\sin^2(xy) = 1$.

Tada je $\sin(xy) = \pm 1$, odnosno $xy = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Iz $\sin(xy) = 1$ i početne jednadžbe slijedi $x^2 + 2x + 1 = 0$, pa je $x = -1$, a $y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Analogno, za $\sin(xy) = -1$ dobivamo $x = 1$, a $y = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Dakle, rješenja (x, y) dane jednadžbe su $(1, -\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ i $(-1, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Drugo rješenje.

Iz dane jednadžbe slijedi $\sin(xy) = \dfrac{-1 - x^2}{2x}$, pa zbog $|\sin(xy)| \leqslant 1$ vrijedi $\left|\dfrac{-1 - x^2}{2x}\right| \leqslant 1$, te dalje redom

$$|1 + x^2| \leqslant |2x| \qquad 1 - |2x| + x^2 \leqslant 0 \qquad (1 - |x|)^2 \leqslant 0.$$

Posljednja nejednakost vrijedi samo ako je $|x| = 1$ tj. $x = \pm 1$.

Za $x = 1$ je $\sin y = -1$ pa je $y = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

a za $x = -1$ iz $\sin y = 1$ slijedi $y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Treće rješenje.

Dana jednadžba je redom ekvivalentna s

$$x^2 + 2x\sin(xy) + \sin^2(xy) = \sin^2(xy) - 1$$
$$(x + \sin(xy))^2 = -\cos^2(xy)$$

Ovo je moguće samo ako je $x + \sin(xy) = \cos(xy) = 0$.

Iz $\cos(xy) = 0$ slijedi $xy = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ili $xy = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

U prvom slučaju je $\sin(xy) = 1$, $x = -1$, $y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

a u drugom $\sin(xy) = -1$, $x = 1$, $y = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Zadatak B-3.2.

Koliko nejednadžba

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{100} \leqslant 103$$

ima rješenja za koja su x_1, x_2,..., x_{100} prirodni brojevi?

Rješenje.

Budući da su x_i prirodni brojevi, svaki x_i mora imati vrijednost barem 1. To znači da treba odrediti na koliko načina zbroj prirodnih brojeva $x_1 + x_2 + \ldots + x_{100}$ može biti jednak 100, 101, 102 i 103.

Zbroj 100 može se dobiti samo na 1 način, kad su svi pribrojnici $x_i = 1$.

Zbroj 101 dobijemo ako je jedan od pribrojnika jednak 2, a ostalih 99 je jednako 1. Taj pribrojnik možemo izabrati na 100 načina.

Zbroj 102 dobijemo u ovim slučajevima:
– jedan pribrojnik jednak je 3, a ostalih 99 je 1 – za to postoji 100 načina
– dva pribrojnika jednaka su 2, a ostalih 98 je 1 – za to postoji $\binom{100}{2} = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 99$ načina.

Zbroj 103 se može dobiti ako je:
- jedan pribrojnik jednak 4, a ostalih 99 je 1, što je moguće na 100 načina
- jedan pribrojnik jednak 3, jedan pribrojnik je 2, ostalih 98 je 1, što je moguće na $100 \cdot 99$ načina
- tri pribrojnika jednaka 2, ostalih 97 je 1, što je moguće na $\frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{3 \cdot 2 \cdot 1}$ načina.

Dakle, ukupno je

$$1 + 100 + 100 + \frac{100 \cdot 99}{2} + 100 + 100 \cdot 99 + \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 176851$$

rješenja dane nejednadžbe.

Zadatak B-3.3.

Odredite koliko parova prirodnih brojeva (x, y) zadovoljava jednadžbu

$$\log_2 \left(\log_{2^x} \left(\log_{2^y} 2^{10^{2020}}\right)\right) = 0.$$

Koji je najveći umnožak xy među svim takvim parovima?

Rješenje.

Dana je jednadžba ekvivalentna s $\log_{2^x} \left(\log_{2^y} 2^{10^{2020}}\right) = 1$, odnosno $\log_{2^x} \left(\log \frac{10^{2020}}{y}\right) = 1$.

Slijedi $\frac{10^{2020}}{y} = 2^x$ pa je

$$y = \frac{10^{2020}}{2^x} = \frac{2^{2020} \cdot 5^{2020}}{2^x} = 2^{2020-x} \cdot 5^{2020}.$$

Budući da su x i y prirodni brojevi, vrijedi $2020 - x > 0$ pa je $x < 2020$, odnosno $x \in \{1, 2, 3, \ldots, 2020\}$. Dakle, ima 2020 traženih uređenih parova

$$(x, y) = (x, 2^{2020-x} \cdot 5^{2020}).$$

Umnožak $xy = x \cdot 2^{2020-x} \cdot 5^{2020}$ je najveći kad je umnožak $x \cdot 2^{-x}$ najveći.

Promotrimo razliku umnožaka $x \cdot 2^{-x}$ i $(x+1) \cdot 2^{-(x+1)}$.

$$x \cdot 2^{-x} - (x+1) \cdot 2^{-(x+1)} = 2^{-x-1}(2x - x - 1) = 2^{-x-1}(x-1).$$

Očito je ova razlika pozitivna za sve $x \geqslant 1$, što znači da se vrijednost umnoška $x \cdot 2^{-x}$ smanjuje s povećanjem broja x, pa je njegova vrijednost najveća za $x = 1$.

Dakle, najveća vrijednost umnoška je $2^{2019} \cdot 5^{2020} = \dfrac{10^{2020}}{2}$.

Zadatak B-3.4.

U kvadrat $ABCD$ upisana je kružnica k. Iz točke T koja pripada kružnici k dijagonala $\overline{AC}$ vidi se pod kutom α, a dijagonala $\overline{BD}$ pod kutom β.

Dokažite da je $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta = 8$.

Prvo rješenje.

Neka je polumjer kružnice k jednak r, a njezino središte ishodište koordinatnog sustava O. Koordinate vrhova kvadrata su $A(-r,-r)$, $B(r,-r)$, $C(r,r)$, $D(-r,r)$, a koordinate točke T su (x,y).

Točka T je od središta udaljena za r, odnosno vrijedi $\sqrt{x^2+y^2} = r$, pa je $x^2+y^2 = r^2$. Kut α je kut između pravaca AT i CT, a kut β kut između pravaca BT i DT. Stoga je

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k_{CT} - k_{AT}}{1 + k_{CT}k_{AT}}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{k_{DT} - k_{BT}}{1 + k_{DT}k_{BT}}.$$

Slijedi

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} \alpha = \frac{k_{CT} - k_{AT}}{1 + k_{CT}k_{AT}} &= \frac{\frac{r-y}{r-x} - \frac{-r-y}{-r-x}}{1 + \frac{r-y}{r-x} \cdot \frac{-r-y}{-r-x}} \\
&= \frac{r - yr + x - r + yr - x}{r - xr + x + r - yr + y} = \frac{2rx - 2ry}{2r^2 - x^2 - y^2}.
\end{aligned}$$

Kako je $x^2+y^2 = r^2$, slijedi $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{2(x-y)}{r}$.

Analogno je

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} \beta &= \frac{\frac{r-y}{-r-x} - \frac{-r-y}{r-x}}{1 + \frac{r-y}{-r-x} \frac{-r-y}{r-x}} \\
&= \frac{r - yr - x - r + yr + x}{-r - xr - x + r - y-r - y} = \frac{-2rx - 2ry}{-r^2} = \frac{2(x+y)}{r}.
\end{aligned}$$

Tada je

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}^{\alpha} + \operatorname{tg}^2 \beta &= \frac{4(x-y)^2}{r^2} + \frac{4(x+y)^2}{r^2} = \frac{4}{r^2}(x^2 - 2xy + y^2 + x^2 + 2xy + y^2) \\
&= \frac{8}{r^2}(x^2+y^2) = \frac{8}{r^2} \cdot r^2 = 8.
\end{aligned}$$

Drugo rješenje.

Neka je polumjer kružnice k jednak r, a njezino središte ishodište koordinatnog sustava O. Koordinate vrhova kvadrata su $A(-r,-r)$, $B(r,-r)$, $C(r,r)$, $D(-r,r)$, a koordinate točke T su (x,y). Time su određeni vektori

$$\begin{gathered}
\overrightarrow{TA}=(-r-x)\vec{i}+(-r-y)\vec{j}, \qquad \overrightarrow{TC}=(r-x)\vec{i}+(r-y)\vec{j}, \\
\overrightarrow{TB}=(r-x)\vec{i}+(-r-y)\vec{j}, \qquad \overrightarrow{TD}=(-r-x)\vec{i}+(r-y)\vec{j}, \\
\overrightarrow{OT}=x\vec{i}+y\vec{j}, \qquad |\overrightarrow{OT}|^2=x^2+y^2=r^2.
\end{gathered}$$

Tada je kosinus kuta α jednak

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{\overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{TC}}{|\overrightarrow{TA}|\cdot|\overrightarrow{TC}|}=\frac{(r-x)(-r-x)+(-r-y)(r-y)}{\sqrt{(-r-x)^2+(-r-y)^2}\cdot\sqrt{(r-x)^2+(r-y)^2}} \\
&= \frac{-2r^2+x^2+y^2}{\sqrt{3r^2+2r(x+y)}\cdot\sqrt{3r^2-2r(x+y)}}=\frac{-r^2}{\sqrt{9r^4-4r^2(x+y)^2}}=\frac{-r}{\sqrt{9r^2-4(x+y)^2}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos\beta &= \frac{\overrightarrow{TB}\cdot\overrightarrow{TD}}{|\overrightarrow{TB}|\cdot|\overrightarrow{TD}|}=\frac{(-r-x)(r-x)+(r-y)(r-y)}{\sqrt{(r-x)^2+(-r-y)^2}\cdot\sqrt{(-r-x)^2+(r-y)^2}} \\
&= \frac{-2r^2+x^2+y^2}{\sqrt{3r^2-2r(x-y)}\cdot\sqrt{3r^2+2r(x-y)}}=\frac{-r^2}{\sqrt{9r^4-4r^2(x-y)^2}}=\frac{-r}{\sqrt{9r^2-4(x-y)^2}}.
\end{aligned}$$

Slijedi

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}^2\alpha &= \frac{1}{\cos^2\alpha}-1=\frac{9r^2-4(x+y)^2}{r^2}-1=\frac{4r^2-8xy}{r^2}, \\
\operatorname{tg}^2\beta &= \frac{1}{\cos^2\beta}-1=\frac{9r^2-4(x-y)^2}{r^2}-1=\frac{4r^2+8xy}{r^2},
\end{aligned}$$

te konačno

$$\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta=\frac{4r^2-8xy}{r^2}+\frac{4r^2+8xy}{r^2}=8.$$

Zadatak B-3.5.

Izračunajte obujam pravilne četverostrane prizme $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ako je $|AB|=a$ i $\sphericalangle C_1AB+\sphericalangle C_1AC=135^\circ$.

Prvo rješenje.

Neka je $\sphericalangle C_1AB = \alpha$, $\sphericalangle C_1AC = \beta$, a visina prizme v. Dakle, vrijedi $\alpha + \beta = 135°$.

Iz pravokutnog trokuta C_1AC je $\cos\beta = \dfrac{a\sqrt{2}}{|AC_1|}$,

a iz pravokutnog trokuta C_1AB je $\cos\alpha = \dfrac{a}{|AC_1|}$.

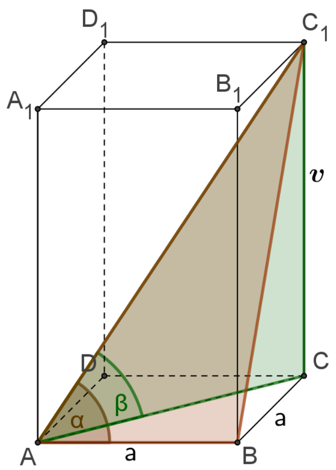
Dakle vrijedi $\dfrac{a\sqrt{2}}{\cos\beta} = \dfrac{a}{\cos\alpha}$ odnosno $\cos\beta = \sqrt{2}\sin\alpha$ pa dobivamo

$$\cos\beta = \sqrt{2}\cos(135° - \beta) = \sqrt{2}(\cos 135° \cos\beta + \sin 135° \sin\beta) = -\cos\beta + \sin\beta.$$

Iz $\cos\beta = -\cos\beta + \sin\beta$ slijedi $\operatorname{tg}\beta = 2$.

Iz pravokutnog trokuta C_1AC imamo $\operatorname{tg}\beta = \frac{v}{a\sqrt{2}}$ pa je $v = \operatorname{tg}\beta \cdot a\sqrt{2} = 2a\sqrt{2}$.

Dakle, obujam prizme je $V = B \cdot v = a^2 \cdot 2a\sqrt{2} = 2a^3\sqrt{2}$.



Drugo rješenje.

Neka je $\sphericalangle C_1AB = \alpha$, $\sphericalangle C_1AC = \beta$, a visina prizme v. Dakle, vrijedi $\alpha + \beta = 135°$.

Iz pravokutnog trokuta C_1AC imamo $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{v}{a\sqrt{2}}$,

a iz pravokutnog trokuta C_1AB je $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{v^2 + a^2}}{a}$.

Kako je $\operatorname{tg} 135° = \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$ vrijedi $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta - 1$.

Kako je $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{v^2 + a^2}}{a}$ i $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{v}{a\sqrt{2}}$ iz prethodne jednakosti dobivamo

$$\frac{\sqrt{v^2 + a^2}}{a} + \frac{v}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{v^2 + a^2}}{a} \cdot \frac{v}{a\sqrt{2}} - 1.$$

Iz ove jednakost slijedi $v = 2a\sqrt{2}$.

Stoga je obujam prizme $V = B \cdot v = a^2 \cdot 2a\sqrt{2} = 2a^3\sqrt{2}$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

26. listopada 2020.

Zadatak B-4.1.

Riješite jednadžbu

$$\log_{2020}\sqrt{x}+\log_{2020}\sqrt[4]{x}+\log_{2020}\sqrt[8]{x}+\ldots+\log_{2020}\sqrt[2^n]{x}+\ldots=\frac{2}{\log_2 x}+\log_x 505.$$

Rješenje.

Rješenje jednadžbe mora zadovoljavati uvjete: $x>0$, $x\neq 1$.

Lijeva strana jednadžbe je

$$\begin{aligned}
&\log_{2020}\sqrt{x}+\log_{2020}\sqrt[4]{x}+\log_{2020}\sqrt[8]{x}+\ldots+\log_{2020}\sqrt[2^n]{x}+\ldots\\
&=\frac{1}{2}\log_{2020}x+\frac{1}{4}\log_{2020}x+\frac{1}{8}\log_{2020}x+\ldots+\frac{1}{2^n}\log_{2020}x+\ldots\\
&=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots\right)\log_{2020}x
\end{aligned}$$

Kako je $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$ geometrijski red s prvim članom $a_1=\frac{1}{2}$ i kvocijentom $q=\frac{1}{2}$, njegova suma je $\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$ pa je lijeva strana dane jednadžbe jednaka $\log_{2020}x$.

Desna strana jednadžbe je $\frac{2}{\log_2 x}+\log_x 505=2\log_x 2+\log_x 505=\log_x 2020$.

Dakle, zadana jednadžba ekvivalentna je jednadžbi $\log_{2020}x=\log x2020$. Slijedi

$$\log_{2020}x=\frac{1}{\log_{2020}x},$$

odnosno $(\log_{2020}x)^2=1$, tj. $\log_{2020}x=1$ ili $\log_{2020}x=-1$. Rješenja su $x=2020$ i $x=\frac{1}{2020}$.

Zadatak B-4.2.

U kompleksnoj ravnini nalazi se jednakostranični trokut ABC. Kompleksan broj $z=\sqrt{3}+4i$ pridružen je vrhu C, a kompleksan broj $z=i$ središtu S tom trokutu opisane kružnice. Odredite kompleksne brojeve pridružene vrhovima A i B.

Rješenje.

Koordinate točke C su $(\sqrt{3}, 4)$, a točke $S(0,1)$. Polumjer trokutu opisane kružnice jednak je

$$R = \sqrt{((0-\sqrt{3})^2 + (1-4)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

Tada duljinu stranice danog trokuta računamo iz $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ i ona iznosi $a = \frac{3R}{\sqrt{3}} = 6$.

Kako se vrhovi A i B nalaze na kružnici opisanoj trokutu ABC, njihove koordinate zadovoljavaju jednadžbu $x^2 + (y-1)^2 = 12$.

Također, iz $|AC| = 6$ slijedi $(x-\sqrt{3})^2 + (y-4)^2 = 36$.

Oduzimanjem ovih dviju jednadžbi i sređivanjem dobivamo $y = -1 - \frac{\sqrt{3}}{3}x$. Uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobivamo kvadratnu jednadžbu $x^2 + \sqrt{3}x - 6 = 0$ kojoj su rješenja $x_1 = -2\sqrt{3}$ i $x_2 = \sqrt{3}$. Tada je $y_1 = 1$ i $y_2 = -2$. Dakle, vrhu A pridružen je kompleksan broj $2\sqrt{3} + i$, a vrhu B kompleksan broj $\sqrt{3} - 2i$.

Zadatak B-4.3.

Neka je $f : \mathbb{R} \to \langle -1, 1\rangle$,

$$f(x) = \frac{100^{-x} - 100^{x}}{100^{-x} + 100^{x}}.$$

Odredite $f^{-1}(x) - f^{-1}(1+2x)$.

Rješenje.

Odredimo inverznu funkciju funkcije f. Zapišimo funkciju f na sljedeći način:

$$y = f(x) = \frac{100^{-x} - 100^{x}}{100^{-x} + 100^{x}} \cdot \frac{100^{x}}{100^{x}} = \frac{1 - 100^{2x}}{1 + 100^{2x}}.$$

Nadalje vrijedi

$$y + y \cdot 100^{2x} = 1 - 100^{2x}$$

odnosno $100^{2x}(y+1) = 1 - y$, pa je $100^{2x} = \dfrac{1-y}{1+y}$.

Odatle je $x = \dfrac{1}{2}\log_{100}\dfrac{1-y}{1+y} = \dfrac{1}{4}\log\dfrac{1-y}{1+y}$.

Slijedi

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{4}\log\frac{1-x}{1+x},$$

pa je

$$f^{-1}(1+2x) = \frac{1}{4}\log\frac{1-(1+2x)}{1+(1+2x)} = \frac{1}{4}\log\frac{-2x}{2+2x} = \frac{1}{4}\log\frac{-x}{1+x}.$$

Konačno

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) - f^{-1}(1+2x) &= \frac{1}{4}\log\frac{1-x}{1+x} - \frac{1}{4}\log\frac{-x}{1+x} = \frac{1}{4}\left(\log\frac{1-x}{1+x} - \log\frac{-x}{1+x}\right) \\ &= \frac{1}{4}\log\left(\frac{1-x}{1+x} : \frac{-x}{1+x}\right) = \frac{1}{4}\log\frac{1-x}{-x} = \frac{1}{4}\log\frac{x-1}{x}. \end{aligned}$$

Zadatak B-4.4.

Niz realnih brojeva (a_n) zadan je rekurzivno s

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{3}{5}, \quad a_n = \frac{a_{n-2} \cdot a_{n-1}}{2a_{n-2} - a_{n-1}} \quad \text{za } n \geqslant 3.$$

Odredite a_{2020}.

Prvo rješenje.

Članovi niza (a_n) su $1, \frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{3}{9}, \ldots,$ a niz njihovih recipročnih vrijednosti $1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{9}{3}, \ldots$

Pokazat ćemo da je niz $(\frac{1}{a_n})$ aritmetički niz. Opći član niza recipročnih vrijednosti je

$$\frac{1}{a_n} = \frac{2a_{n-2} - a_{n-1}}{a_{n-2}a_{n-1}} = \frac{2}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_{n-2}}.$$

Slijedi

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{n-2}} + \frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{a_{n-1}},$$

pa je svaki član niza $(\frac{1}{a_n})$, počevši od drugog člana, aritmetička sredina susjednih članova.

Prvi član tog niza jednak je 1, a razlika $d = \dfrac{2}{3}$. Tada je $\dfrac{1}{a_{2020}} = 1 + 2019 \cdot \dfrac{2}{3} = 1347$, a traženi član $a_{2020} = \dfrac{1}{1347}$.

Drugo rješenje.

Članovi niza (a_n) su $1, \frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{3}{9}, \ldots$

Dokažimo matematičkom indukcijom da je opći član ovog niza $a_n = \frac{3}{2n+1}$.

Baza indukcije. Provjerimo tvrdnju za $n = 1$ i $n = 2$.

$a_1 = \frac{3}{2+1} = 1$, $a_2 = \frac{3}{4+1} = \frac{3}{5}$, što je točno jer su to zadane vrijednosti.

Korak indukcije.

Pretpostavimo da je $a_{n-1} = \frac{3}{2n-1}$ i $a_n = \frac{3}{2n+1}$ za neki prirodni broj $n > 2$. Tada je

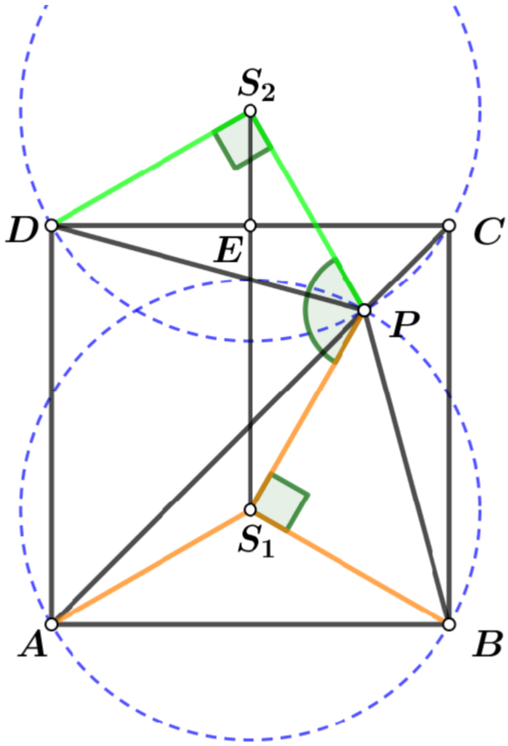
$$a_{n+1} = \frac{a_{n-1} \cdot a_n}{2a_{n-1} - a_n} = (\text{pretp.}) = \frac{\frac{3}{2n-1} \cdot \frac{3}{2n+1}}{2 \cdot \frac{3}{2n-1} - \frac{3}{2n+1}} = \frac{9}{6n+9} = \frac{3}{2n+3} = \frac{3}{2(n+1)+1}.$$

Dakle, tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve n, pa je $a_{2020} = \frac{3}{4041} = \frac{1}{1347}$.

Zadatak B-4.5.

Duljina stranice kvadrata $ABCD$ iznosi 24 cm. Točka P je na dijagonali $\overline{AC}$ i vrijedi $|AP| > |PC|$. Točka S_1 je središte kružnice opisane trokutu APB, a točka S_2 središte kružnice opisane trokutu PCD. Ako je $|\sphericalangle S_1PS_2| = 120°$, odredite $|AP|$.

Rješenje.



Trokuti ABP i ADP su sukladni prema poučku SKS ($|AB| = |AD|$, $\overline{AP}$ je zajednička stranica, a kut $\sphericalangle BAP$ je sukladan kutu $\sphericalangle DAP$). Stoga je $|BP| = |DP|$. Vrijedi $\sphericalangle PAB = 45°$ i to je obodni kut nad tetivom $\overline{PB}$, a kut $\sphericalangle PCD = 45°$ je obodni nad $\overline{PD}$. Stoga su pripadni središnji kutovi sukladni, $\sphericalangle BS_1P = \sphericalangle DS_2P = 90°$. Slijedi $\triangle BS_1P \cong \triangle DS_2P$ i $|S_1P| = |S_2P|$.

Tada je trokut S_1PS_2 jednakokračan, a kako je trokut DES_2 pravokutan (pravac S_1S_2 je simetrala dužina $\overline{CD}$ i $\overline{AB}$), redom vrijedi:

$$\sphericalangle PS_2S_1 = 30°, \quad \sphericalangle ES_2D = 90° - \sphericalangle PS_2S_1 = 60°, \quad \sphericalangle S_2DE = 90° - 60° = 30°,$$
$$\sphericalangle CDP = 45° - 30° = 15°, \quad \sphericalangle PDA = 75°, \quad \sphericalangle DPA = 60°.$$

Primijenimo poučak o sinusima na trokut PDA:

$$\frac{|PA|}{\sin 75°} = \frac{24}{\sin 60°}.$$

Tada je tražena duljina

$$|PA| = \frac{24 \sin 75°)}{\sin 60°} = \frac{24}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot (\sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30°) = 4\sqrt{6}(\sqrt{3}+1).$$