Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

28. veljače 2018.

1. Marko je nacrtao pravokutnik s dvije plave stranice duljine 24 i dvije crvene stranice duljine 36. Svaku točku unutar pravokutnika je obojio bojom stranice koja je najbliža toj točki. Točke koje su jednako udaljene od plave i crvene stranice je obojio crno. Odredi površinu crvenog dijela pravokutnika.

2. Odredi sve parove cijelih brojeva (m, n) takve da je

$$n^2 - 6n = m^2 + m - 10.$$

3. Neka su a, b i c različiti pozitivni realni brojevi takvi da je $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \neq 0$. Dokaži da barem jedan od brojeva

$$\frac{a+b}{a+b-c}, \quad \frac{b+c}{b+c-a}, \quad \frac{c+a}{c+a-b}$$

pripada intervalu $\langle 1, 2\rangle$ i da barem jedan od tih brojeva ne pripada tom intervalu.

4. Neka je D nožište visine iz vrha C jednakokračnog trokuta ABC s osnovicom $\overline{AB}$. Točka M je polovište dužine $\overline{CD}$. Pravci BM i AC sijeku se u točki E.

Odredi omjer $|CE| : |AC|$.

5. Dano je 599 žutih i 301 plava kuglica. Može li se te kuglice poredati u niz tako da je broj kuglica između bilo koje dvije plave kuglice različit od 2 i od 5?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

28. veljače 2018.

1. Neka je z kompleksni broj za koji vrijedi

$$|z-5| = |z-1| + 4.$$

Dokaži da je z realni broj.

2. Kvadrat $ABCD$ ima stranicu duljine 1. Neka je točka X na stranici $\overline{AB}$, a točka Y na stranici $\overline{AD}$ tako da je $\sphericalangle CXY = 90°$. Odredi položaj točke X za koji je površina trokuta CDY najmanja moguća.

3. Odredi sve prirodne brojeve n za koje kvadratna jednadžba

$$x^2 - 3nx + n + 3 = 0$$

ima cjelobrojna rješenja.

4. Dane su dvije kružnice koja se ne sijeku, polumjera r_1 i r_2. Udaljenost dirališta zajedničke unutarnje tangente na te kružnice iznosi 12, a udaljenost dirališta zajedničke vanjske tangente na te kružnice iznosi 16. Odredi umnožak $r_1 r_2$.

Unutarnja tangenta (je ona zajednička tangenta koja) siječe dužinu koja spaja središta kružnica.

5. Neka je $n \geqslant 4$ prirodni broj. Dokaži da među bilo kojih n brojeva iz skupa

$$\{1, 2, \ldots, 2n-1\}$$

postoji nekoliko brojeva čiji je zbroj djeljiv s $2n$.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

28. veljače 2018.

1. Odredi sve parove realnih brojeva (x, y) takvih da je $x, y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ za koje vrijedi

$$\frac{2\sin^2 x + 2}{\sin x + 1} = 3 + \cos(x + y).$$

2. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da vrijedi

$$a^2 + b^2 - c^2 = \sqrt{3}ab, \qquad a^2 - b^2 + c^2 = \sqrt{2}ac.$$

Odredi omjer $b : c$.

3. Odredi sve prirodne brojeve koji su kvadrati prirodnih brojeva i u čijem su dekadskom zapisu dvije znamenke različite od 0, a jedna od te dvije je 3.

4. U četverokutu $ABCD$ je $\sphericalangle DBC = \sphericalangle DCB = 50^\circ$ i $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC = \sphericalangle BDC$. Dokaži da je $AC \perp BD$.

5. Neka je n prirodni broj. Niz od $2n$ realnih brojeva je *dobar* ako za svaki prirodni broj $1 \leqslant m \leqslant 2n$ vrijedi da je zbroj prvih m ili zbroj zadnjih m članova niza cijeli broj. Odredi najmanji mogući broj cijelih brojeva u dobrom nizu.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

28. veljače 2018.

1. Prirodni broj zovemo *babilonskim* ako je veći od 9 i ako je njegov zapis u sustavu s bazom 60 jednak njegovom dekadskom zapisu bez vodeće znamenke. Npr. broj 123 je babilonski jer je $123 = (23)_{60}$. Koliko ima babilonskih brojeva manjih od 10 000?

2. Neka je n prirodni broj. Dokaži nejednakost

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1} > 1.$$

3. Neka je ABC šiljastokutni trokut takav da je $|BC| > |AC|$. Simetrala dužine $\overline{AB}$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki P, a pravac AC u točki Q. Točka R je nožište okomice iz točke P na stranicu $\overline{AC}$, a točka S je nožište okomice iz točke Q na pravac BC.

Dokaži da pravac RS raspolavlja dužinu $\overline{AB}$.

4. Ploča P je dobivena uklanjanjem tri polja u kutovima ploče 7×7. U svako od 46 polja ploče P upisan je neki prirodni broj. Razlika brojeva u bilo koja dva polja koja imaju zajedničku stranicu je najviše 4. Dokaži da su u neka dva polja upisani isti brojevi.

5. Neka je d prirodni broj te (a_n) aritmetički niz prirodnih brojeva s razlikom d. Ako je $d \leqslant 2018$, dokaži da najviše 11 uzastopnih članova niza (a_n) mogu biti prosti brojevi.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.