ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

28. veljače 2018.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-1.1.

Marko je nacrtao pravokutnik s dvije plave stranice duljine 24 i dvije crvene stranice dulijne 36. Svaku točku unutar pravokutnika je obojio bojom stranice koja je najbliža toj točki. Točke koje su jednako udaljene od plave i crvene stranice je obojio crno. Odredi površinu crvenog dijela pravokutnika.

Prvo rješenje.

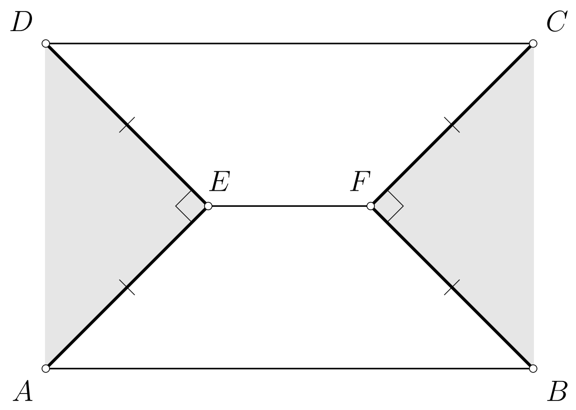
Neka je $ABCD$ pravokutnik takav da je $|AB| = |CD| = 36$ i $|BC| = |DA| = 24$.

Neka je točka E presjek simetrale kuta $\sphericalangle BAD$ i simetrale kuta $\sphericalangle ADC$, a točka F presjek simetrale kuta $\sphericalangle ABC$ i simetrale kuta $\sphericalangle BCD$. 1 bod

Točke na dužini $\overline{AE}$ su jednako udaljene od dužina $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$, stoga su sve one crne. Analogno, točke na dužinama $\overline{BF}$, $\overline{CF}$ i $\overline{DE}$ su sve crne. 2 boda

Najbliža stranica točkama unutar trokuta AED je stranica $\overline{AD}$, stoga su sve te točke plave. Slično, sve točke unutar trokuta BCF su plave. 1 bod

Točkama unutar trapeza $ABFE$ je najbliža stranica $\overline{AB}$ pa su sve one crvene. Također, sve točke unutar trapeza $EFCD$ su crvene. 1 bod



Tražena površina je površina pravokutnika $ABCD$ umanjena za površine trokuta AED i BCF. 1 bod

Primijetimo da su trokuti AED i BCF pravokutni i da je $|AE| = |ED| = |CF| = |FB|$. Neka je duljina stranice $|AE|$ jednaka a.

Pitagorin poučak u trokutu AED nam govori da je $a\sqrt{2} = 24$. 2 boda

Zato je površina svakog od trokuta AED i BCF jednaka $\frac{a^2}{2} = \frac{24^2}{2 \cdot 2} = 144$. 1 bod

Konačno, tražena površina je $36 \cdot 24 - 2 \cdot 144 = 576$. 1 bod

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju određujemo crveni i plavi dio pravokutnika. 5 bodova

Površinu trapeza $ABFE$ i $CDEF$ možemo izračunati direktno. Duljinu osnovice $\overline{EF}$ dobivamo tako da od duljine stranice AB oduzmemo duljine visina na hipotenuzu u pravokutnim jednakokračnim trokutima AED i BCF. 1 bod

Možemo uočiti da je zbroj tih visina jednak dijagonali kvadrata kojeg bismo dobili spajanjem tih dvaju trokuta duž hipotenuze, a očito je duljina te dijagonale jednaka duljini stranice $\overline{AD}$. Zato je $|EF| = |AB| - |AD| = 36 - 24 = 12$. 2 boda

Visina trapeza $CDEF$ je jednaka polovini visine pravokutnika.

Konačno površina trapeza $CDEF$ iznosi $\frac{|CD| + |EF|}{2} \cdot \frac{|AD|}{2} = \frac{36 + 12}{2} \cdot \frac{24}{2} = \frac{24^2}{2}$. 1 bod

Budući da je površina trapeza $ABFE$ jednaka površini trapeza $CDEF$, slijedi da površina crvenog dijela iznosi $24^2 = 576$. 1 bod

Zadatak A-1.2.

Odredi sve parove cijelih brojeva (m, n) takve da je

$$n^2 - 6n = m^2 + m - 10.$$

Prvo rješenje.

Pomnožimo danu jednakost s 4:

$$4n^2 - 24n = 4m^2 + 4m - 40,$$

te grupirajmo izraze na lijevoj i desnoj strani

$$(4n^2 - 24n + 36) - 36 = (4m^2 + 4m + 1) - 41$$

tako da možemo uočiti potpune kvadrate

$$(2n - 6)^2 + 5 = (2m + 1)^2.$$ 4 boda

Prebacimo li konstantu na jednu stranu te primijenimo formulu za razliku kvadrata, dobivamo

$$5 = (2m + 1 - 2n + 6)(2m + 1 + 2n - 6) = (2m - 2n + 7)(2m + 2n - 5).$$ 2 boda

Sada možemo promotriti četiri linearna sustava dviju jednadžbi s varijablama m i n jer broj 5 možemo prikazati kao umnožak cijelih brojeva na četiri načina: $1 \cdot 5$, $5 \cdot 1$, $(-1) \cdot (-5)$ i $(-5) \cdot (-1)$. 1 bod

Ako je $2m - 2n + 7 = a$ i $2m + 2n - 5 = b$, rješenje tog sustava je

$$m = \frac{a+b-2}{4}, \qquad n = \frac{b-a+12}{4}.$$ 2 boda

Uvrštavanjem mogućnosti $(a, b) = (1, 5), (5, 1), (-1, -5), (-5, -1)$ dobivamo rješenja $(m, n) = (1, 4), (1, 2), (-2, 2), (-2, 4)$. 1 bod

Drugo rješenje.

Danu jednakost možemo zapisati kao

$$n^2 - 6n + 9 = m^2 + m - 1, \qquad \text{odnosno} \quad (n-3)^2 = m^2 + m - 1.$$ 2 boda

Pretpostavimo najprije da je $m > 0$, tada je $m^2 + m - 1 \geqslant m^2$. 1 bod

Također je $m^2 + m - 1 < m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2$. 1 bod

Dakle, ako je $m > 0$, broj $m^2 + m - 1$ je potpun kvadrat ako i samo ako je $m = 1$. 1 bod

Uvrštavanjem dobivamo da je $(n-3)^2 = 1$ pa time dobivamo dva rješenja $(m, n) = (1, 2)$ i $(m, n) = (1, 4)$. 1 bod

Pretpostavimo sada da je $m \leqslant 0$, neka je $m = -k$, gdje je $k \geqslant 0$, dobivamo jednadžbu

$$(n-3)^2 = k^2 - k - 1.$$

Opet, primijetimo da je $k^2 - k - 1 < k^2$. 1 bod

Za $k = 0$ i $k = 1$ dobivamo $(n-3)^2 = -1$, što je nemoguće, a za $k \geqslant 2$ je

$$k^2 - k - 1 \geqslant k^2 - 2k + 1 = (k-1)^2.$$ 1 bod

Dakle, broj $k^2 - k - 1$ je potpun kvadrat ako i samo ako je $k = 2$. 1 bod

Uvrštavanjem dobivamo kao i prije da je $(n-3)^2 = 1$, time dobivamo još dva rješenja $(m, n) = (-2, 2)$ i $(m, n) = (-2, 4)$. 1 bod

Treće rješenje.

Zapišimo jednakost na sljedeći način

$$n^2 - 6n - 8 = m^2 + m - 2$$

i faktorizirajmo obje strane

$$(n-4)(n-2) = (m-1)(m+2).$$ 1 bod

Ako su obje strane jednakosti jednake 0, dobivamo četiri rješenja:

$$(m, n) \in \{(1, 4), (1, 2), (-2, 2), (-2, 4)\}.$$ 1 bod

Pretpostavimo da nijedna strana jednakosti nije 0.

Lijeva strana je negativna ako je $n = 3$, a desna ako je $m = 0$ ili $m = -1$, no to ne daje rješenje. Zato možemo pretpostaviti da su obje strane jednakosti pozitivne. 1 bod

Prvi slučaj. Pretpostavimo da je $m-1 < n-4$. Tada je $m-1 \leqslant n-3$, tj. $m+2 \leqslant n-2$.

Ako su brojevi $n-4$, $n-2$, $m-1$ i $m+2$ pozitivni, onda je $(m-1)(m+2) < (n-4)(n-2)$, a ako su svi negativni onda je $(n-4)(n-2) < (m-1)(m+2)$, što je kontradikcija. 2 boda

Pretpostavimo da su $m-1$ i $m+2$ negativni, a $n-4$ i $n-2$ pozitivni brojevi. Ako je $-m-2 < n-4$, onda je $-m+1 \leqslant n-2$. Iz toga slijedi $(m-1)(m+2) < (n-4)(n-2)$, što je nemoguće. Ako je $-m-2 \geqslant n-4$, onda je $-m+1 \geqslant n-1 > n-2$, pa je $(m-1)(m+2) > (n-4)(n-2)$, što je također nemoguće. 2 boda

Drugi slučaj. Pretpostavimo da je $m-1 \geqslant n-4$, onda je $m+2 > n-2$. Analogno kao u prvom slučaju možemo razlikovati slučajeve jesu li svi brojevi istog predznaka i slučaj kad su brojevi $n-2$ i $n-4$ negativni, a $m-1$ i $m+2$ pozitivni. U svim slučajevima dobivamo kontradikciju kao u prvom slučaju. 3 boda

Zadatak A-1.3.

Neka su a, b i c različiti pozitivni realni brojevi takvi da je $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \neq 0$. Dokaži da barem jedan od brojeva

$$\frac{a+b}{a+b-c}, \quad \frac{b+c}{b+c-a}, \quad \frac{c+a}{c+a-b}$$

pripada intervalu $\langle 1, 2\rangle$ i da barem jedan od tih brojeva ne pripada tom intervalu.

Prvo rješenje.

Primijetimo da se zapravo treba dokazati da barem jedan od brojeva

$$\frac{a+b-c}{a+b} = 1 - \frac{c}{a+b}, \quad \frac{b+c-a}{b+c} = 1 - \frac{a}{b+c}, \quad \frac{c+a-b}{c+a} = 1 - \frac{b}{c+a}$$

pripada intervalu $\left\langle \frac{1}{2}, 1\right\rangle$ i da barem jedan od tih brojeva ne pripada tom intervalu. 2 boda

Odnosno, da barem jedan od brojeva

$$\frac{c}{a+b}, \quad \frac{a}{b+c}, \quad \frac{b}{c+a}$$

pripada intervalu $\left\langle 0, \frac{1}{2}\right\rangle$ i da barem jedan od tih brojeva ne pripada tom intervalu. 1 bod

Brojevi a, b i c su pozitivni realni brojevi pa su sva tri navedena broja pozitivna, tj. veća od 0. 1 bod

Pretpostavimo li da su sva tri broja veća od ili jednaka $\dfrac{1}{2}$, to znači da je

$$2c \geqslant a+b, \quad 2a \geqslant b+c, \quad 2b \geqslant c+a.$$ 1 bod

Zbrajanjem ovih nejednakosti imamo da je $2(c+a+b) \geqslant 2(a+b+c)$, a to je moguće jedino ako vrijedi jednakost, što znači da je

$$\frac{c}{a+b} = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{1}{2}.$$ 2 boda

Međutim, ovo daje $a = b = c$, što nije moguće prema uvjetu zadatka. Dakle, barem jedan od navedenih razlomaka je manji od $\dfrac{1}{2}$. 1 bod

Slično, pretpostavimo li da su svi razlomci manji od $\frac{1}{2}$ odmah dolazimo do kontradikcije jer bi tada moralo biti da je

$$2(c+a+b) < 2(a+b+c),$$

što je nemoguće. 1 bod

Dakle, barem jedan od razlomaka je veći od ili jednak $\frac{1}{2}$. 1 bod

Drugo rješenje.

Kao i u prvom rješenju zaključujemo da zapravo treba dokazati da barem jedan od brojeva

$$\frac{c}{a+b}, \quad \frac{a}{b+c}, \quad \frac{b}{c+a}$$

pripada intervalu $\left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$ i da barem jedan od tih brojeva ne pripada tom intervalu. 3 boda

Brojevi a, b i c su pozitivni realni brojevi pa su sva tri navedena broja pozitivna, tj. veća od 0. 1 bod

Brojevi a, b i c su međusobno različiti, a razlomci koje promatramo su simetrični u varijablama a, b i c, stoga smijemo pretpostaviti uređaj među brojevima a, b i c. Pretpostavimo da je $a < b < c$. 4 boda

Tada je

$$\frac{a}{b+c} < \frac{a}{a+a} = \frac{1}{2}.$$

1 bod

Također je i

$$\frac{c}{a+b} > \frac{c}{c+c} = \frac{1}{2}.$$

1 bod

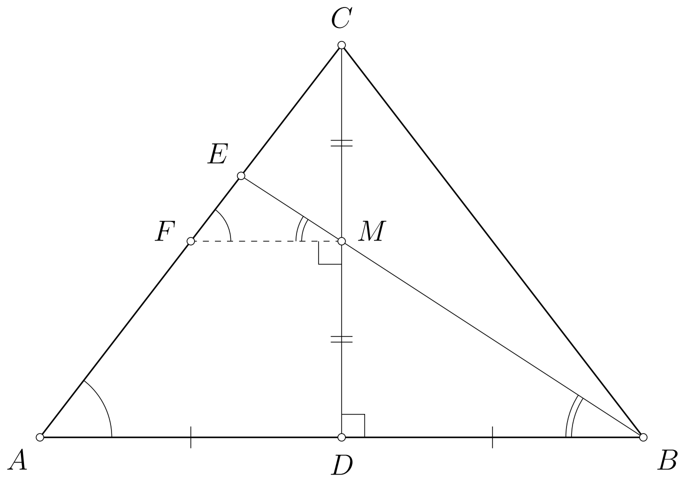
Zadatak A-1.4.

Neka je D nožište visine iz vrha C jednakokračnog trokuta ABC s osnovicom $\overline{AB}$. Točka M je polovište dužine $\overline{CD}$. Pravci BM i AC sijeku se u točki E.

Odredi omjer $|CE| : |AC|$.

Prvo rješenje.

Neka je točka F polovište stranice $\overline{AC}$. 1 bod



Kako je točka F polovište stranice $\overline{AC}$, a točka M polovište stranice $\overline{CD}$, zaključujemo da je dužina $\overline{FM}$ srednjica trokuta ADC. 2 boda

Iz toga je najprije

$$|FM| = \frac{|AD|}{2} = \frac{|AB|}{4},$$

gdje druga jednakost vrijedi zato što je točka D polovište stranice $\overline{AB}$ (trokut ABC je jednakokračan). 1 bod

Nadalje, pravac FM je paralelan pravcu AB pa je

$$\sphericalangle MFE = \sphericalangle BAE \quad \text{i} \quad \sphericalangle FME = \sphericalangle ABE.$$ 1 bod

Dakle, trokuti FME i ABE su slični pa je 1 bod

$$\frac{|FE|}{|AE|} = \frac{|FM|}{|AB|} = \frac{1}{4}.$$ 2 boda

Kako je $|AF| + |FE| = |AE| = 4|FE|$, dobivamo da je $|FE| = \dfrac{|AF|}{3} = \dfrac{|AC|}{6}$. 1 bod

Konačno možemo izračunati da je

$$|CE| = |CF| - |FE| = \frac{|AC|}{2} - \frac{|AC|}{6} = \frac{|AC|}{3},$$

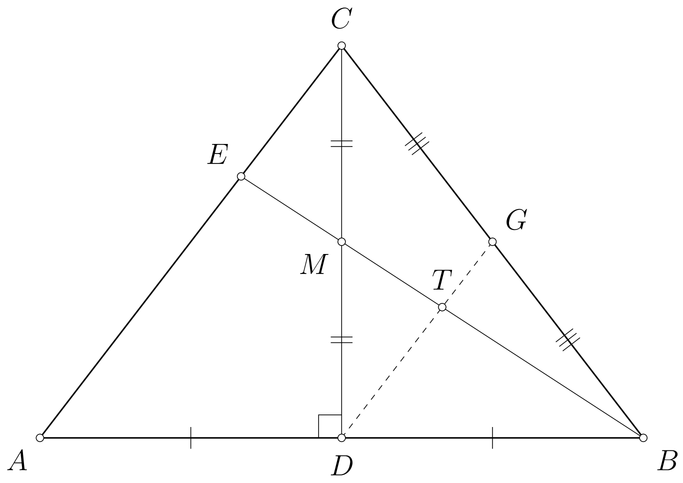
odnosno

$$|CE| : |AC| = 1 : 3.$$ 1 bod

Drugo rješenje.

Neka je točka G polovište stranice $\overline{BC}$. 1 bod

Točka T neka je presjek dužina $\overline{BM}$ i $\overline{DG}$. 1 bod



Kako su točke M i G polovišta stranica $\overline{CD}$ i $\overline{BC}$, zaključujemo da je točka T težište trokuta BCD. 2 boda

Stoga je $|GT| : |DG| = 1 : 3$. 1 bod

Trokut ABC je jednakokračan pa je točka D polovište stranice $\overline{AB}$. Kako je i točka G polovište stranice $\overline{BC}$, zaključujemo da je dužina $\overline{DG}$ srednjica trokuta ABC. 2 boda

Dakle, pravci DG i AC paralelni. 1 bod

Konačno je $|CE| : |AC| = |TG| : |DG| = 1 : 3$. 2 boda

Zadatak A-1.5.

Dano je 599 žutih i 301 plava kuglica. Može li se te kuglice poredati u niz tako da je broj kuglica između bilo koje dvije plave kuglice različit od 2 i od 5?

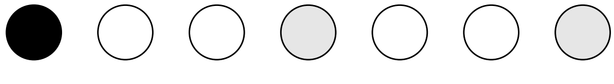
Prvo rješenje.

Odgovor je ne.

U nizu brojeva od 1 do 900, promotrimo 300 disjunktnih grupa pozicija

$$\{9k+1, 9k+4, 9k+7\}, \quad \{9k+2, 9k+5, 9k+8\}, \quad \{9k+3, 9k+6, 9k+9\}$$

za $k = 0, 1, 2, \ldots, 99$. 6 bodova



Budući da imamo 301 plavu kuglicu, prema Dirichletovom principu, u jednoj grupi će se sigurno nalaziti pozicije barem dviju plavih kuglica. Te dvije kuglice će između sebe imati dvije ili pet drugih kuglica. 4 boda

Drugo rješenje.

Ne može, tj. kako god poredali kuglice uvijek će postojati dvije plave između kojih se nalaze točno 2 ili točno 5 drugih kuglica.

Označimo kuglice brojevima $1, 2, \ldots, 900$. Ono što moramo dokazati je da postoje dvije plave kuglice oznaka i i j tako da vrijedi $|i - j| = 3$ ili $|i - j| = 6$.

Budući da je dana 301 plava kuglica, prema Dirichletovom principu oznake barem 101 plave kuglice daju isti ostatak pri dijeljenju s 3. 4 boda

Tvrdimo da među tom 101 plavom kuglicom postoje dvije kuglice oznaka i i j tako da vrijedi $|i - j| = 3$ ili $|i - j| = 6$.

Pretpostavimo li suprotno, za oznake i i j bilo kojih dviju (među tom 101 kuglicom) vrijedi $|i - j| \geqslant 9$ jer i i j daju isti ostatak pri dijeljenju s 3. 2 boda

Tada bi među tom 101 plavom kuglicom bilo točno 100 parova uzastopnih kuglica, što znači da je najveća oznaka među tom 101 kuglicom barem $1 + 9 \cdot 100 = 901 > 900$, što je kontradikcija. 4 boda

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

28. veljače 2018.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-2.1.

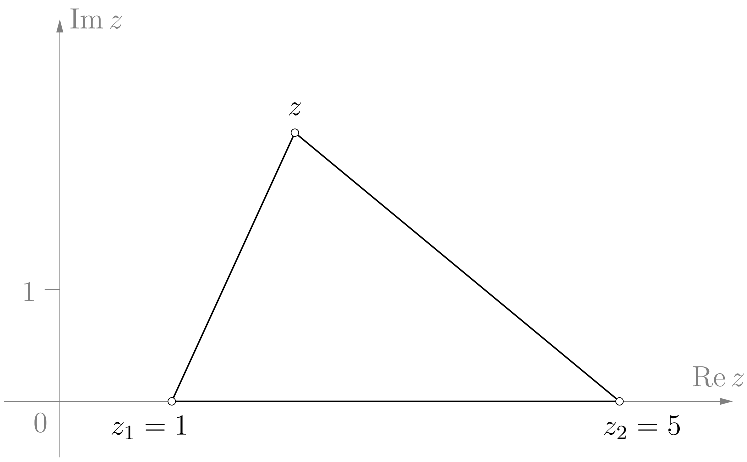
Neka je z kompleksni broj za koji vrijedi

$$|z-5| = |z-1| + 4.$$

Dokaži da je z realni broj.

Prvo rješenje.

Neka je $z_1 = 1$ i $z_2 = 5$.



Prema nejednakosti trokuta vrijedi

$$|z-z_2| = |(z-z_1)+(z_1-z_2)| \leqslant |z-z_1| + |z_1-z_2|,$$

odnosno

$$|z-5| \leqslant |z-1| + 4.$$ 6 bodova

Pritom jednakost vrijedi samo ako je trokut degeneriran, tj. samo ako z leži na pravcu koji prolazi točkama z_1 i z_2. 4 boda

Prema tome, ako vrijedi jednakost iz zadatka, z mora ležati na realnoj osi.

Drugo rješenje.

Neka je $z = x + yi$, pri čemu su $x, y \in \mathbb{R}$. Uvjet zadatka tada možemo zapisati kao

$$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + 4. \qquad \text{2 boda}$$

Kvadriranjem dobivamo

$$(x-5)^2 + y^2 = (x-1)^2 + y^2 + 16 + 8\sqrt{(x-1)^2 + y^2}, \qquad \text{2 boda}$$

a daljnjim sređivanjem ovog izraza dolazimo do

$$1 - x = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}. \qquad \text{2 boda}$$

Konačno, kvadriranjem dobivamo

$$(1-x)^2 = (x-1)^2 + y^2, \qquad \text{2 boda}$$

odakle slijedi $y^2 = 0$, tj. $y = 0$. 2 boda

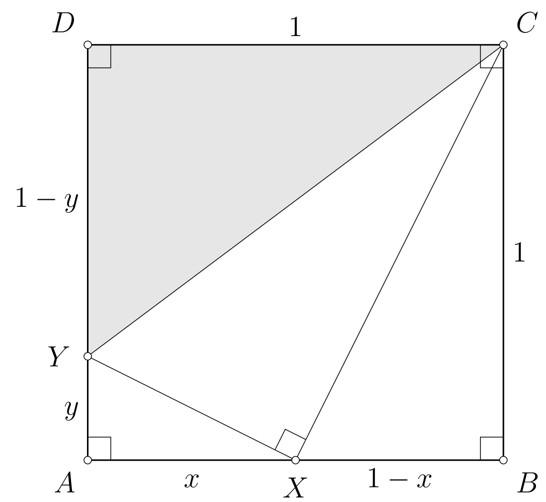
Prema tome, vrijedi $z = x$, dakle z je realni broj.

Zadatak A-2.2.

Kvadrat $ABCD$ ima stranicu duljine 1. Neka je točka X na stranici $\overline{AB}$, a točka Y na stranici $\overline{AD}$ tako da je $\sphericalangle CXY = 90°$. Odredi položaj točke X za koji je površina trokuta CDY najmanja moguća.

Prvo rješenje.

Neka je $x = |AX|$, a $y = |AY|$. Trokuti AXY i BCX su slični: oba su pravokutna, a vrijedi i $\sphericalangle AXY = \sphericalangle BCX$ jer se radi o kutovima s okomitim kracima. 2 boda



Zaključujemo da vrijedi

$$\frac{|BC|}{|BX|} = \frac{|AX|}{|AY|}, \qquad \text{tj.} \quad \frac{1}{1-x} = \frac{x}{y}. \qquad \text{2 boda}$$

Odavde slijedi $y = x(1-x) = x - x^2$. 1 bod

Sada možemo površinu trokuta CDY izraziti kao funkciju od x:

$$P(CDY) = \frac{1}{2}(x^2 - x + 1).$$ 2 boda

Prema tome, potrebno je odrediti $x \in [0,1]$ za koji funkcija $P(x) = \frac{1}{2}(x^2 - x + 1)$ postiže najmanju moguću vrijednost.

Vidimo da je $P(x)$ kvadratna funkcija s pozitivnim vodećim koeficijentom i tjemenom u točki $x = \frac{1}{2}$. Odavde zaključujemo da se najmanja moguća površina postiže za $x = \frac{1}{2}$, odnosno u situaciji kada je X polovište dužine $\overline{AB}$. 3 boda

Drugo rješenje.

Neka je $\alpha = \sphericalangle BCX$. Kad točka X varira od B do A onda $\operatorname{tg}\alpha$ varira od 0 do 1. 1 bod

Iz pravokutnog trokuta BCX slijedi $|BX| = \operatorname{tg}\alpha$. 2 boda

Tada je $|AX| = 1 - \operatorname{tg}\alpha$. Budući da je $\sphericalangle CXY = 90°$, slijedi da je $\sphericalangle AXY = \alpha$, pa iz pravokutnog trokuta AXY slijedi $|AY| = \operatorname{tg}\alpha \cdot |AX| = \operatorname{tg}\alpha(1 - \operatorname{tg}\alpha)$. 2 boda

Vrijedi $|DY| = 1 - |AY|$, pa površina trokuta CDY iznosi

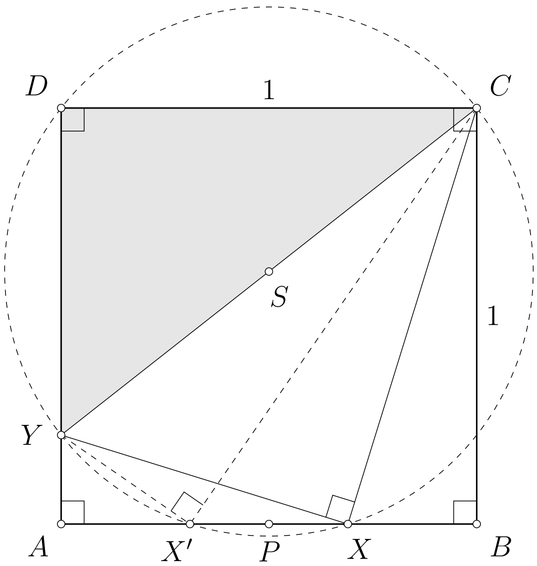
$$P(\alpha) = P(CDY) = 1 - \operatorname{tg}\alpha(1 - \operatorname{tg}\alpha).$$ 2 boda

Budući da je prema A–G nejednakosti $\operatorname{tg}\alpha(1 - \operatorname{tg}\alpha) \leqslant \left(\frac{\operatorname{tg}\alpha + 1 - \operatorname{tg}\alpha}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, a jednakost se postiže kad je $\operatorname{tg}\alpha = 1 - \operatorname{tg}\alpha$, funkcija $P(\alpha)$ postiže najmanju vrijednost za $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, 2 boda

tj. kad je X polovište stranice $\overline{AB}$. 1 bod

Treće rješenje.

Neka je P polovište stranice $\overline{AB}$.



Promotrimo ovisnost površine trokuta CDY o položaju točke X. Pokazat ćemo da je to funkcija koja je simetrična oko točke P, te da je padajuća funkcija za sve položaje točke X između A i P. 1 bod

Iz toga slijedi da je traženi položaj točke X upravo točka P. 1 bod

Neka su X_1 i X_2 centralnosimetrične točke na stranici $\overline{AB}$ u odnosu na P. Neka su točke Y_1 i Y_2 na stranici $\overline{AD}$ takve da je $\sphericalangle CX_1Y_1 = 90^\circ = \sphericalangle CX_2Y_2$, a točka S polovište dužine $\overline{CY_1}$.

Točka S je dakle središte opisane kružnice trokutu CX_1Y_1 i $\overline{CY_1}$ je promjer te kružnice.

Pravac PS je okomit na AB, pa je to simetrala dužine $\overline{X_1X_2}$, tj. vrijedi $|SX_1| = |SX_2|$. Zato točka X_2 leži također na spomenutoj kružnici i vrijedi $\sphericalangle CX_2Y_1 = 90^\circ$. Dakle, točke Y_1 i Y_2 se podudaraju, tj. vrijedi simetričnost površine CDY u ovisnosti o položaju točke X obzirom na P. 2 boda

Promotrimo što se događa s površinom CDY kad točku X na dužini $\overline{AP}$ pomaknemo prema točki P u točku X'. Površina se smanjuje jer se točka Y pomakne prema točki D u točku Y', što možemo vidjeti na sljedeći.

Kao u prvom rješenju zaključimo da su trokuti AXY i BXD slični, pa vrijedi

$$|AY| = \frac{|AX| \cdot |XB|}{|BC|}. \qquad \text{4 boda}$$

Želimo pokazati $|AY| < |AY'|$, tj. $|AX| \cdot |XB| < |AX'| \cdot |X'B|$. Uočimo da je

$$|AX'| \cdot |X'B| = (|AX| + |XX'|) \cdot (|BX| - |XX'|) = |AX| \cdot |BX| + |XX'| \cdot (|BX'| - |AX|),$$

pa tvrdnja slijedi jer je $|XX'| > 0$ i $|BX'| > \frac{1}{2} > |AX|$. 2 boda

Zadatak A-2.3.

Odredi sve prirodne brojeve n za koje kvadratna jednadžba

$$x^2 - 3nx + n + 3 = 0$$

ima cjelobrojna rješenja.

Prvo rješenje.

Neka su x_1 i x_2 rješenja dane kvadratne jednadžbe. Prema Vièteovim formulama vrijedi

$$x_1x_2 = n + 3 \qquad \text{i} \qquad x_1 + x_2 = 3n. \qquad \text{2 boda}$$

Najprije uočimo da iz prve jednakosti slijedi da su x_1 i x_2 istog predznaka, a zatim iz druge da su x_1 i x_2 pozitivni. 1 bod

Iz $x_1x_2 = n + 3$ čitamo da su obje nultočke manje od ili jednake $n + 3$. 1 bod

Nadalje, manja nultočka mora biti manja od ili jednaka $\sqrt{n+3}$, tj. (bez smanjenja općenitosti) $x_1 \leqslant \sqrt{n+3}$. 1 bod

Budući da je $n + 3 \geqslant 4$, možemo iskoristiti i $\sqrt{n+3} \leqslant \frac{1}{2}(n+3)$. 2 boda

Sada iz $x_1 \leqslant \frac{1}{2}(n+3)$ i $x_2 \leqslant n + 3$ slijedi $x_1 + x_2 \leqslant \frac{3}{2}(n+3)$, tj. $3n \leqslant \frac{3}{2}(n+3)$. Sređivanjem ove nejednakosti dolazimo do uvjeta $n \leqslant 3$. 1 bod

Preostaje provjeriti ima li jednadžba cjelobrojna rješenja za $n = 1, 2, 3$. Uvrštavanjem i direktnom provjerom dobivamo da jedino za $n = 2$ početna jednadžba ima cjelobrojna rješenja. 2 boda

Drugo rješenje.

Do gornje ograde za n možemo doći i na drugi način. Rješenja dane kvadratne jednadžbe su

$$x_{1,2} = \frac{3n \pm \sqrt{9n^2 - 4(n+3)}}{2}.$$

Da bi ovo bili cijeli brojevi, nužno je i dovoljno da $9n^2 - 4(n+3) = 9n^2 - 4n - 12$ bude kvadrat cijelog broja. 2 boda

Ako vrijedi

$$(3n-1)^2 < 9n^2 - 4n - 12 < (3n)^2,$$

onda $9n^2 - 4n - 12$ ne može biti kvadrat cijelog broja jer se nalazi između kvadrata uzastopnih cijelih brojeva. 4 boda

Druga nejednakost očito vrijedi uvijek, a prva vrijedi ako i samo ako

$$\begin{aligned} (3n-1)^2 &< 9n^2 - 4n - 12 \\ \iff 9n^2 - 6n + 1 &< 9n^2 - 4n - 12 \\ \iff 13 &< 2n \\ \iff n &\geqslant 7. \end{aligned}$$

Prema tome, za $n \geqslant 7$ početna jednadžba nema cjelobrojnih rješenja, stoga preostaje provjeriti $n = 1, 2, \ldots, 6$. 1 bod

Uvrštavanjem svih šest mogućnosti za n i direktnom provjerom dobivamo da jedino za $n = 2$ početna jednadžba ima cjelobrojna rješenja. 3 boda

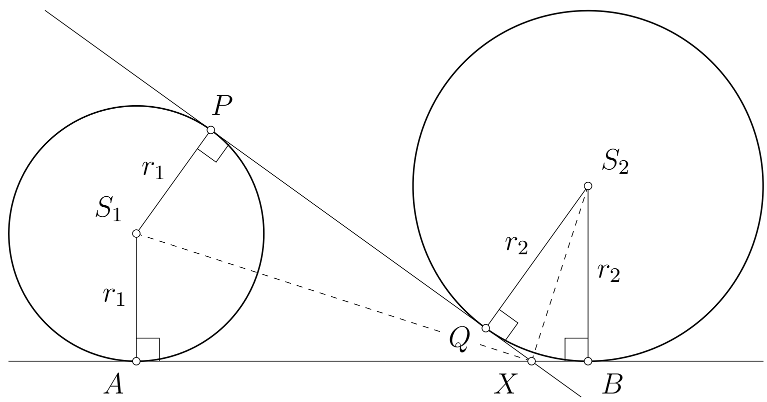
Zadatak A-2.4.

Dane su dvije kružnice koja se ne sijeku, polumjera r_1 i r_2. Udaljenost dirališta zajedničke unutarnje tangente na te kružnice iznosi 12, a udaljenost dirališta zajedničke vanjske tangente na te kružnice iznosi 16. Odredi umnožak $r_1 r_2$.

Unutarnja tangenta (je ona zajednička tangenta koja) siječe dužinu koja spaja središta kružnica.

Prvo rješenje.

Neka su točke A i B dirališta vanjske tangente, a točke P i Q dirališta unutarnje tangente i zadanih kružnica s polumjerima r_1 i r_2, redom. Neka je S_1 središte kružnice polumjera r_1 i S_2 središte kružnice polumjera r_2, a X sjecište pravaca AB i PQ. 1 bod



Promotrimo trokute AXS_1 i PXS_1. Budući da je $\sphericalangle S_1AX = 90° = \sphericalangle S_1PX$, $|S_1A| = r_1 = |S_1P|$ te im je stranica $\overline{XS_1}$ zajednička, po S–S–K poučku o sukladnosti (stranica $\overline{XS_1}$ je kao hipotenuza najveća stranica u promatranim trokutima) zaključujemo da su trokuti AXS_1 i PXS_1 sukladni.

Iz dobivene sukladnosti slijedi da je $|AX| = |PX|$ i $\sphericalangle AXS_1 = \sphericalangle PXS_1 = \frac{1}{2}\sphericalangle AXP$. 2 boda

Analogno dobivamo da su trokuti BXS_2 i QXS_2 sukladni, iz čega slijedi da je $|BX| = |QX|$ i $\sphericalangle BS_2X = \sphericalangle QS_2X = \frac{1}{2}\sphericalangle QS_2B$. 2 boda

Koristeći dobivene jednakosti zaključujemo

$$16 = |AB| = |AX| + |XB| = |PX| + |QX| = |PQ| + 2|QX| = 12 + 2|QX|.$$

Iz dobivene jednakosti slijedi da je $|QX| = 2$, iz čega dobivamo da je $|XB| = 2$ te $|AX| = 14$. 1 bod

Promotrimo trokute AXS_1 i BS_2X. Budući da je $\sphericalangle S_1AX = 90° = \sphericalangle XBS_2$ i

$$\begin{aligned}
&\sphericalangle AXS_1 = \frac{1}{2}\sphericalangle AXP \overset{\text{sukuti}}{=} \frac{1}{2}(180° - \sphericalangle BXQ) \overset{\text{suma kutova u četverokutu } BXQS_2}{=} \\
&\frac{1}{2}(180° - (360° - \sphericalangle XQS_2 - \sphericalangle QS_2B - \sphericalangle S_2BX)) \overset{\text{tangenta je okomita na polumjer}}{=} \\
&\frac{1}{2}(180° - (360° - 90° - \sphericalangle QS_2B - 90°)) = \frac{1}{2}\sphericalangle QS_2B = \sphericalangle BS_2X,
\end{aligned}$$

po K–K teoremu o sličnosti zaključujemo da su trokuti AXS_1 i BS_2X slični. 2 boda

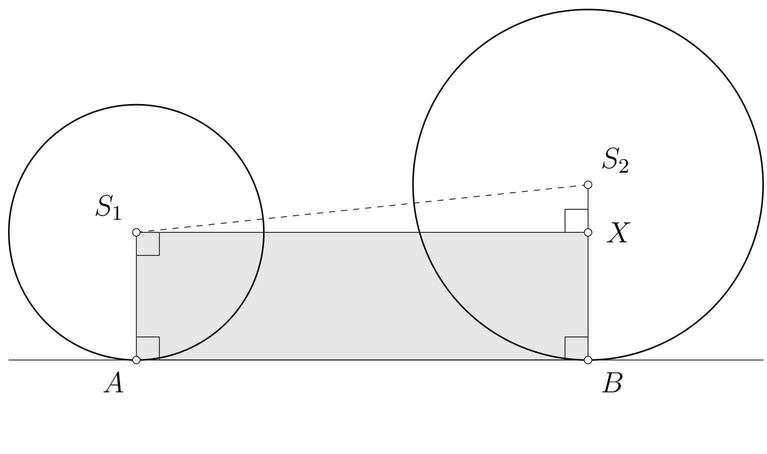
Iz dobivene sličnosti slijedi da je

$$\frac{r_1}{|AX|} = \frac{|XB|}{r_2}.$$ 1 bod

Koristeći ranije pokazano dobivamo $r_1 \cdot r_2 = 2 \cdot 14 = 28$. 1 bod

Drugo rješenje.

Neka su točke A i B dirališta vanjske tangente i zadanih kružnica s polumjerima r_1 i r_2 redom. Neka je S_1 središte kružnice polumjera r_1 i S_2 središte kružnice polumjera r_2. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $r_1 \leqslant r_2$. Neka je X nožište okomice iz točke S_1 na pravac BS_2. Kako je $r_1 \leqslant r_2$, zaključujemo da X leži na dužini $\overline{BS_2}$. 1 bod



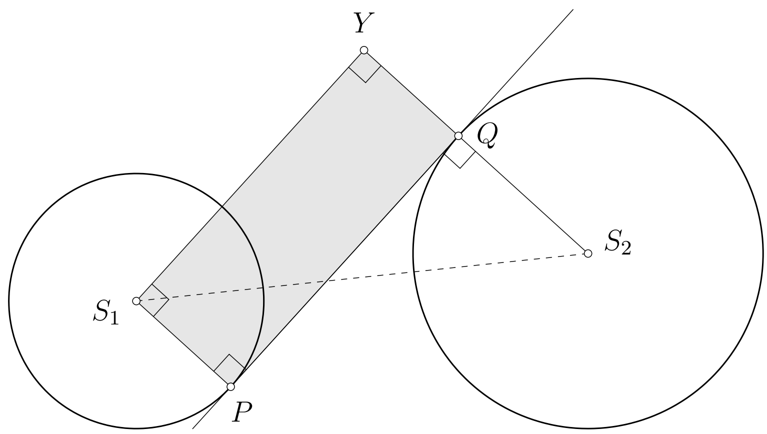
Promotrimo četverokut AS_1XB. Budući da je tangenta AB okomita na polumjere $\overline{S_1A}$ i $\overline{S_2B}$ te je pravac S_1X okomit na BS_2, zaključujemo da je AS_1XB pravokutnik. Iz toga slijedi da je $|S_1X| = |AB| = 16$ i $|BX| = r_1$. 1 bod

Primjenom Pitagorinog poučka na pravokutni trokut S_1XS_2 dobivamo

$$|S_1S_2|^2 = |S_1X|^2 + |XS_2|^2 = 16^2 + (|BS_2| - |BX|)^2 = 16^2 + (r_2 - r_1)^2. \qquad (1)$$ 2 boda

Neka su točke P i Q dirališta unutarnje tangente i danih kružnica.

Neka je Y nožište okomice iz točke S_1 na pravac QS_2. 1 bod



Promotrimo četverokut PS_1YQ. Budući da je tangenta PQ okomita na polumjere $\overline{S_1P}$ i $\overline{S_2Q}$ te je pravac S_1Y okomit na QS_2, zaključujemo da je PS_1YQ pravokutnik. Iz toga slijedi da je $|S_1Y| = |PQ| = 12$ i $|QY| = r_1$. 1 bod

Primjenom Pitagorinog poučka na pravokutni trokut S_1YS_2 dobivamo

$$|S_1S_2|^2 = |S_1Y|^2 + |YS_2|^2 = 12^2 + (|QS_2| + |QY|)^2 = 12^2 + (r_2 + r_1)^2. \qquad (2)$$ 2 boda

Oduzimanjem jednadžbi (1) i (2) dobivamo

$$0 = 16^2 + (r_2 - r_1)^2 - 12^2 - (r_2 + r_1)^2 = 112 - 4r_1r_2,$$ 1 bod

iz čega slijedi $r_1r_2 = 28$. 1 bod

Zadatak A-2.5.

Neka je $n \geqslant 4$ prirodni broj. Dokaži da među bilo kojih n brojeva iz skupa

$$\{1, 2, \ldots, 2n - 1\}$$

postoji nekoliko brojeva čiji je zbroj djeljiv s $2n$.

Rješenje.

Ako broj n nije među odabranima, onda je, prema Dirichletovom principu, među odabranim brojevima barem jedan od parova (kojih ima $n-1$)

$$\{i, 2n-i\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$ 2 boda

No, zbroj brojeva u istom paru je $2n$ pa smo time gotovi. 1 bod

Ako broj n je među odabranima, neka su $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ odabrani brojevi različiti od n. Pokažimo da među njima postoji njih nekoliko čiji je zbroj djeljiv s n. 1 bod

Odabranih $n-1$ brojeva su brojevi iz skupa $\{1, \ldots, n-1, n+1, \ldots, 2n-1\}$, primijetimo da se među njima svaki ostatak pri dijeljenju s n (osim 0) pojavljuje točno 2 puta. Kako je $n-1 \geqslant 3$, možemo pretpostaviti da brojevi a_1 i a_2 ne daju isti ostatak pri dijeljenju s n. Promotrimo niz

$$a_1,\ a_2,\ a_1+a_2,\ \ldots,\ a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}.$$ 2 boda

Ako je neki od tih brojeva djeljiv s n naša tvrdnja je dokazana, a ako nije, onda, po Dirichletovom principu, neka dva daju isti ostatak pri dijeljenju s n. Razlika ta dva broja je djeljiva s n, a ona je ili oblika $a_2 - a_1$ (što se kosi s pretpostavkom da ta dva broja daju različit ostatak pri dijeljenju s n) ili oblika $a_i + a_{i+1} + \cdots + a_j$, pa tvrdnja opet vrijedi. 3 boda

Konačno, znamo da među odabranim brojevima različitim od n postoji njih nekoliko čiji je zbroj djeljiv s n. Taj zbroj je oblika $k \cdot n$, ako je k paran onda smo našli nekoliko brojeva čiji je zbroj djeljiv s $2n$, a ako je neparan onda tim brojevima dodajmo još n pa je takav zbroj oblika $(k+1)n$ što je djeljivo s $2n$. 1 bod

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

28. veljače 2018.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-3.1.

Odredi sve parove realnih brojeva (x, y) takvih da je $x, y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ za koje vrijedi

$$\frac{2\sin^2 x + 2}{\sin x + 1} = 3 + \cos(x + y).$$

Rješenje.

Označimo $t = \sin x$. Budući da je $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ slijedi $t \in [0, 1]$. 1 bod

Za $t \in [0, 1]$ vrijedi $\frac{2t^2 + 2}{t + 1} \leqslant 2$. 2 boda

Naime,

$$\frac{2t^2 + 2}{t + 1} \leqslant 2 \iff \frac{2t^2 - 2t}{t + 1} \leqslant 0 \iff \frac{t(t - 1)}{t + 1} \leqslant 0.$$

Za $t \in [0, 1]$ nazivnik je pozitivan, a brojnik nepozitivan, pa posljednja nejednakost vrijedi. Stoga izraz na lijevoj strani dane jednadžbe iznosi najviše 2. 3 boda

S druge strane, za svaki izbor para (x, y) vrijedi $3 + \cos(x + y) \geqslant 2$. 1 bod

Time smo pokazali da je

$$\frac{2\sin^2 x + 2}{\sin x + 1} \leqslant 3 + \cos(x + y).$$

Jednakost se postiže ako i samo ako su obje strane jednake 2, što je moguće jedino ako je $\sin x = 0$ ili $\sin x = 1$, te $\cos(x + y) = -1$. 2 boda

Budući da je $x + y \in [0, \pi]$, jedino rješenje je $(x, y) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. 1 bod

Zadatak A-3.2.

Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da vrijedi

$$a^2 + b^2 - c^2 = \sqrt{3}ab, \qquad a^2 - b^2 + c^2 = \sqrt{2}ac.$$

Odredi omjer $b : c$.

Prvo rješenje.

Zbrajanjem jednadžbi dobivamo

$$2a^2 = \sqrt{3}ab + \sqrt{2}ac, \qquad \text{3 boda}$$

pa budući da je $a \neq 0$, dijeljenjem s $2a$ dobivamo

$$a = \frac{\sqrt{3}b + \sqrt{2}c}{2}. \qquad \text{1 bod}$$

Sada uvrstimo dobiveno u prvu jednadžbu. Imamo

$$\frac{3b^2 + 2\sqrt{6}bc + 2c^2}{4} + b^2 - c^2 = \frac{3b^2 + \sqrt{6}bc}{2}, \qquad \text{3 boda}$$

odakle nakon množenja s 4 dobijemo

$$7b^2 + 2\sqrt{6}bc - 2c^2 = 6b^2 + 2\sqrt{6}bc,$$

iz čega slijedi $b^2 = 2c^2$. 2 boda

Kako su b i c pozitivni, korjenovanjem dobivamo $b = \sqrt{2}c$, pa je $b : c = \sqrt{2} : 1$. 1 bod

Drugo rješenje.

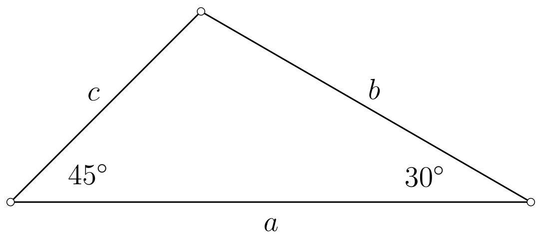
Vrijedi

$$c^2 = a^2 + b^2 - \sqrt{3}ab, \qquad b^2 = a^2 + c^2 - \sqrt{2}ac,$$

pa vidimo da se radi o dva poučka o kosinusu za trokut sa stranicama duljina a, b i c. 5 bodova

Za odgovarajuće kutove vrijedi $\cos\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 1 bod

Iz ovoga slijedi da je $\sin\gamma = \frac{1}{2}$ i $\sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 1 bod



Konačno, primjenom poučka o sinusima dobivamo

$$b : c = \sin\beta : \sin\gamma = \sqrt{2} : 1. \qquad \text{3 boda}$$

Zadatak A-3.3.

Odredi sve prirodne brojeve koji su kvadrati prirodnih brojeva i u čijem su dekadskom zapisu dvije znamenke različite od 0, a jedna od te dvije je 3.

Rješenje.

Neka je n prirodan broj takav da n^2 ima navedena svojstva.

Broj n^2 je djeljiv s 10 ako i samo ako je n djeljiv s 10, pa je $n^2 = m^2 \cdot 100^k$, za neke $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$, pri čemu $10 \nmid m$. 1 bod

Iz danih uvjeta slijedi da je $m^2 = \overline{a00\ldots00b} = a \cdot 10^l + b$, pri čemu je $a, b \neq 0$, $l \in \mathbb{N}$ te je $a = 3$ ili $b = 3$.

Zadnja znamenka broja m^2, odnosno b, mora biti u skupu $\{1, 4, 5, 6, 9\}$. 1 bod

Dakle, $a = 3$, pa je

$$m^2 = 3 \cdot 10^l + b, \quad b \in \{1, 4, 5, 6, 9\}.$$ 1 bod

Broj je djeljiv s 4 ako i samo ako mu zadnje dvije znamenke daju broj djeljiv s 4. Zaključujemo da ako je $b = 6$, onda je $l = 0$, tj. $m^2 = 36$ i $n^2 = 36 \cdot 100^k = (6 \cdot 10^k)^2$. 1 bod

Promatranjem ostataka koje m daje pri dijeljenju s 9, vidimo da m^2 može davati ostatke 0, 1, 4 i 7. Kako je $m^2 \equiv 3 + b \pmod 9$, vidimo da ne može biti $b = 5$ ni $b = 9$. 2 boda

Preostaje nam promotriti slučajeve kad je $b = 1$ i $b = 4$. Tada je

$$3 \cdot 2^l \cdot 5^l = 3 \cdot 10^l = m^2 - c^2 = (m - c)(m + c),$$ 1 bod

za $c = 1$ ili $c = 2$.

Najveća zajednička mjera M faktora $m - c$ i $m + c$ dijeli njihovu razliku $2c$, pa je $M \in \{1, 2, 4\}$. Zbog ovoga točno jedan od brojeva $m - c$ i $m + c$ može biti djeljiv s 5.

Mora biti $l \geqslant 2$ jer 31 i 34 nisu kvadrati prirodnih brojeva, pa kako je $m + c > m - c$, vidimo da $m + c$ mora biti djeljiv s 5^l. 1 bod

Vrijedi

$$2c = (m + c) - (m - c) \geqslant 5^l - 3 \cdot 2^l.$$ 1 bod

Kako je $5^l - 3 \cdot 2^l > 4$, za svaki $l \geqslant 2$, vidimo da je ovo nemoguće. Dakle ne može biti $b = 1$ ni $b = 4$.

Zaključujemo da su svi traženi kvadrati prirodnih brojeva oblika $36 \cdot 100^k$, za $k \in \mathbb{N}_0$. 1 bod

Zadatak A-3.4.

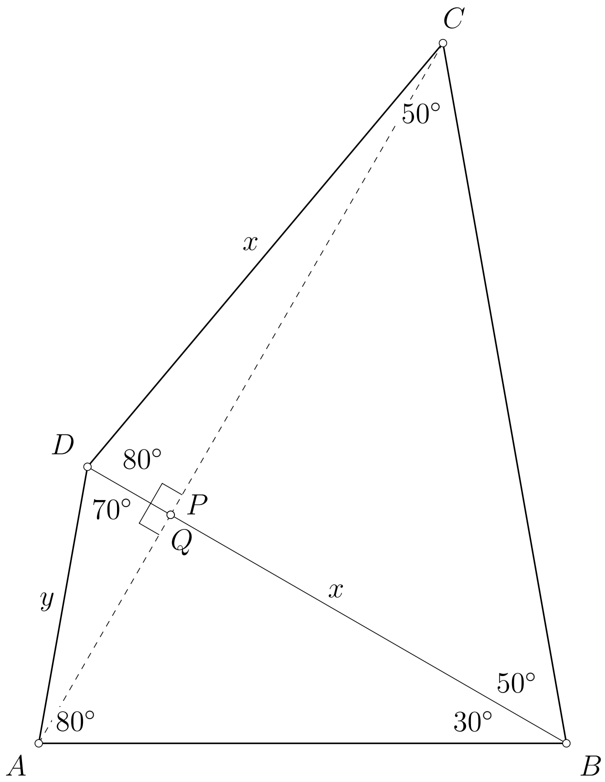
U četverokutu $ABCD$ je $\sphericalangle DBC = \sphericalangle DCB = 50°$ i $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC = \sphericalangle BDC$. Dokaži da je $AC \perp BD$.

Rješenje.

Prema uvjetima zadatka vrijedi $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC = \sphericalangle BDC = 80°$, $\sphericalangle ABD = 30°$ i $\sphericalangle ADB = 70°$. 1 bod

Neka je $|DB| = |DC| = x$, a $|AD| = y$.

Neka su Q i P redom nožišta okomica iz A i C na $\overline{BD}$. Želimo pokazati da se točke Q i P zapravo podudaraju. 2 boda



Primjenom trigonometrije u trokutima DPC, DQA i DBA dobivamo

$$|DP| = x \cdot \cos 80°,$$ 1 bod

$$|DQ| = y \cdot \cos 70°,$$ 1 bod

$$\frac{x}{y} = \frac{\sin 80°}{\sin 30°}.$$ 1 bod

Iz ovih jednakosti dobivamo

$$\frac{|DP|}{|DQ|} = \frac{x \cdot \cos 80°}{y \cdot \cos 70°} = \frac{\sin 80° \cdot \cos 80°}{\sin 30° \cdot \cos 70°},$$

tj. $|DP| = |DQ|$ ako i samo ako je $\sin 80° \cdot \cos 80° = \sin 30° \cdot \cos 70°$. 1 bod

Ova jednakost je točna jer vrijedi

$$\sin 30° = \frac{1}{2}, \quad \sin 80° \cdot \cos 80° = \frac{1}{2} \cdot \sin 160° = \frac{1}{2} \cdot \sin 20° = \sin 30° \cdot \cos 70°.$$ 3 boda

Dakle, točke Q i P su jednako udaljene od točke D, pa zaključujemo da se podudaraju.
Iz toga slijedi da je AC okomito na BD.

Zadatak A-3.5.

Neka je n prirodni broj. Niz od $2n$ realnih brojeva je *dobar* ako za svaki prirodni broj $1 \leqslant m \leqslant 2n$ vrijedi da je zbroj prvih m ili zbroj zadnjih m članova niza cijeli broj. Odredi najmanji mogući broj cijelih brojeva u dobrom nizu.

Rješenje.

Tvrdimo da je za svaki n najmanji mogući broj cijelih brojeva jednak 2. 1 bod

Neka je $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ dobar niz realnih brojeva. Ako je $n = 1$, onda x_1 i x_2 moraju biti cijeli brojevi. Neka je sada $n > 1$.

Zbog uvjeta za $m = 1$, x_1 ili x_{2n} mora biti cijeli broj. 1 bod

Budući da je $x_1 + \cdots + x_n$ ili $x_{n+1} + \cdots + x_{2n}$ cijeli broj, a i zbroj im je cijeli broj, vidimo da oba ta broja moraju biti cijeli. 2 boda

Nadalje, $x_1 + \cdots + x_{n-1}$ ili $x_{n+2} + \cdots + x_{2n}$ mora biti cijeli broj. Ako je $x_1 + \cdots + x_{n-1}$ cijeli, budući da je $x_1 + \cdots + x_n$ cijeli, zaključujemo da je x_n cijeli broj. Analogno, ako je $x_{n+2} + \cdots + x_{2n}$ cijeli, vidimo da x_{n+1} mora biti cijeli. Dakle, x_n ili x_{n+1} mora biti cijeli broj. 2 boda

Time smo pokazali da barem dva člana dobrog niza moraju biti cijeli brojevi.

Sada dokažimo da za svaki prirodni broj n postoji dobar niz realnih brojeva s točno dva cijela broja.

1. Ako je n neparan, definiramo $x_1 = x_{n+1} = 1$ i $x_k = \frac{1}{2}$ za sve ostale $k \in \{1, \ldots, 2n\}$. 1 bod

   Neka je $1 \leqslant m \leqslant n$. Za neparan m zbroj prvih m članova je $1 + (m-1) \cdot \frac{1}{2}$, što je cijeli broj. Za paran m zbroj zadnjih m članova je $m \cdot \frac{1}{2}$, što je u ovom slučaju cijeli broj.

   Ako je $m > n$, onda prema dokazanom vidimo da je zbroj prvih ili zadnjih $m - n$ članova cijeli broj, pa kako je $x_1 + \cdots + x_{2n}$ cijeli broj, vidimo da i zbroj prvih ili zadnjih m članova mora biti cijeli broj. 1 bod

2. Ako je n paran, definiramo niz $x_1 = x_n = 1$ i $x_k = \frac{1}{2}$ za sve ostale $k \in \{1, \ldots, 2n\}$. 1 bod

   Ponovno je dovoljno dokazati da je zbroj prvih ili zadnjih m članova cijeli broj za $m < n$. U ovom slučaju za neparan m zbroj prvih m članova je $1 + (m-1) \cdot \frac{1}{2}$, a za paran m zbroj zadnjih m članova je $m \cdot \frac{1}{2}$, pa vidimo da je navedeni niz dobar. 1 bod

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

28. veljače 2018.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-4.1.

Prirodni broj zovemo *babilonskim* ako je veći od 9 i ako je njegov zapis u sustavu s bazom 60 jednak njegovom dekadskom zapisu bez vodeće znamenke. Npr. broj 123 je babilonski jer je $123 = (23)_{60}$. Koliko ima babilonskih brojeva manjih od 10 000?

Rješenje.

Dvoznamenkasti broj $\overline{ab}$ ne može biti babilonski jer bi tada bilo $10a + b = b$, odnosno $a = 0$. Dakle, nema dvoznamenkastih babilonskih brojeva. 1 bod

Troznamenkasti broj $\overline{abc}$ je babilonski ako i samo ako je $100a + 10b + c = 60b + c$, odnosno ako i samo ako je $2a = b$. 2 boda

To znači da su svi troznamenkasti babilonski brojevi oblika $\overline{12c}$, $\overline{24c}$, $\overline{36c}$ i $\overline{48c}$, gdje je c proizvoljna znamenka. Dakle, troznamenkastih babilonskih brojeva ima 40. 1 bod

Četveroznamenkasti broj $\overline{abcd}$ je babilonski ako i samo ako je $1000a+100b+10c+d = 3600b + 60c + d$, odnosno ako i samo ako je $20a = 70b + c$. 2 boda

Kako su brojevi $20a$ i $70b$ djeljivi s 10, zaključujemo da je i broj c djeljiv s 10, to znači da je $c = 0$. 1 bod

Sada dobivamo da je $\overline{abcd}$ babilonski ako i samo ako je $2a = 7b$, $c = 0$, a d bilo koja znamenka.

Kako je $2a$ paran broj, takav mora biti i $7b$, odnosno, b mora biti paran. 1 bod

Ako je $b = 0$, onda je $a = 0$, što je nemoguće. Za $b = 2$ dobijemo $a = 7$, a za $b \geqslant 4$ slijedi da je $a \geqslant 14$, što je također nemoguće. 1 bod

Dakle, svi četveroznamenkasti babilonski brojevi su oblika $\overline{720d}$, gdje je d proizvoljna znamenka. Stoga četveroznamenkastih babilonskih brojeva ima 10. 1 bod

Konačno, babilonskih brojeva manjih od 10 000 ima 50.

Zadatak A-4.2.

Neka je n prirodni broj. Dokaži nejednakost

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1} > 1.$$

Prvo rješenje.

Nejednakost dokazujemo matematičkom indukcijom po n. 1 bod

Za $n=1$ imamo
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}>1.$$
1 bod

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki prirodni broj n, tj. da je
$$S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}>1.$$

Računamo
$$\begin{aligned} S_{n+1}&=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+4} && \text{1 bod}\\ &=S_n-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+4}. && \text{1 bod}\end{aligned}$$

Dovoljno je pokazati
$$-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+4}>0.$$
2 boda

Vrijedi
$$\begin{aligned} &-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+4}\\ =&\frac{-3(3n+2)(3n+4)+(3n+3)(3n+4)+(3n+2)(3n+4)+(3n+2)(3n+3)}{(3n+2)(3n+3)(3n+4)}\\ =&\frac{2}{(3n+2)(3n+3)(3n+4)}>0.\end{aligned}$$
4 boda

Ovime smo proveli korak. Po principu matematičke indukcije dana nejednakost vrijedi za svaki prirodni broj n.

Drugo rješenje.

Primijetimo da je s lijeve strane nejednakosti $2n+1$ brojeva, te primijenimo na brojeve $n+1, n+2, \ldots, n+(2n+1)$ nejednakost između aritmetičke i harmonijske sredine. 1 bod

Dobivamo
$$\frac{(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+(2n+1))}{2n+1}\geqslant\frac{2n+1}{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+(2n+1)}}.$$
3 boda

Budući da brojevi nisu međusobno jednaki, ne vrijedi jednakost, već stroga nejednakost. 1 bod

Sređivanjem dobivamo
$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}>\frac{(2n+1)^2}{(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+(2n+1))}.$$
2 boda

Konačno, kako je
$$(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+(2n+1))=n\cdot(2n+1)+\frac{(2n+1)(2n+2)}{2}=(2n+1)^2,$$
dobivamo traženu nejednakost. 3 boda

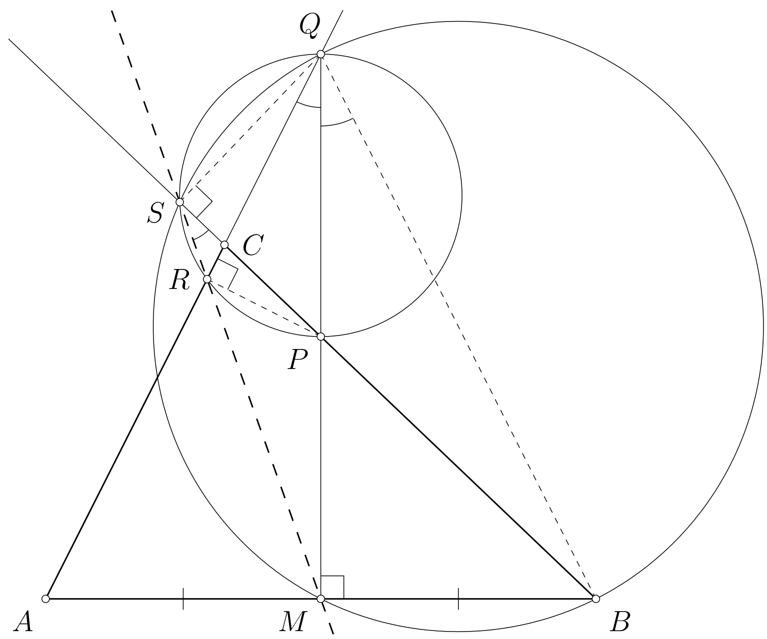
Zadatak A-4.3.

Neka je ABC šiljastokutni trokut takav da je $|BC| > |AC|$. Simetrala dužine $\overline{AB}$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki P, a pravac AC u točki Q. Točka R je nožište okomice iz točke P na stranicu $\overline{AC}$, a točka S je nožište okomice iz točke Q na pravac BC.

Dokaži da pravac RS raspolavlja dužinu $\overline{AB}$.

Prvo rješenje.

Iz uvjeta $|BC| > |AC|$ slijedi da se točka Q nalazi na produžetku dužine $\overline{AC}$ preko točke C, a točka S na produžetku dužine $\overline{BC}$, također preko točke C. Označimo s M polovište dužine $\overline{AB}$.



Budući da je $\sphericalangle BMQ = \sphericalangle BSQ = 90°$, četverokut je $BQSM$ tetivan. 1 bod

Zato vrijedi $\sphericalangle MSB = \sphericalangle MQB$. 2 boda

Budući da je $\sphericalangle PRQ = \sphericalangle PSQ = 90°$, zaključujemo da je četverokut $PQSR$ tetivan. 1 bod

Iz toga zaključujemo da je $\sphericalangle RQP = \sphericalangle RSP$. 2 boda

Budući da je pravac MQ simetrala dužine $\overline{AB}$, slijedi da je $\sphericalangle AQM = \sphericalangle MQB$. 2 boda

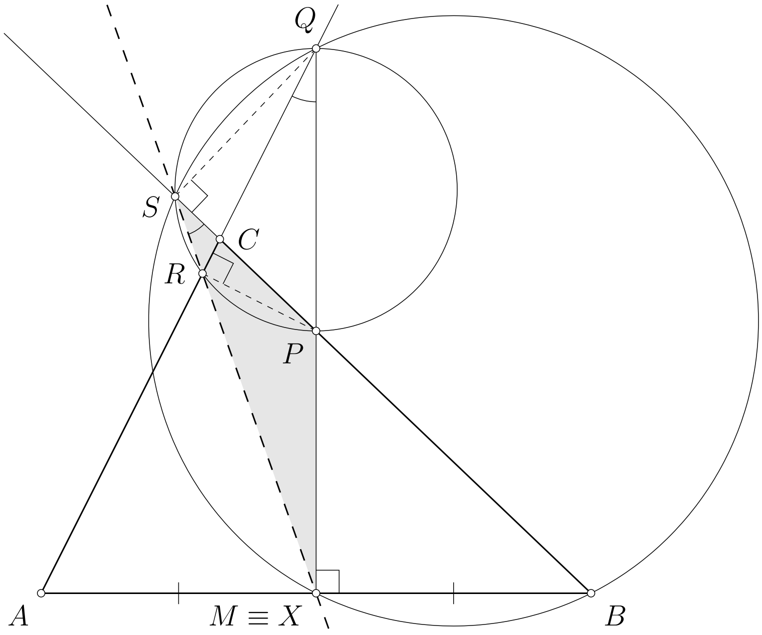
Vrijedi

$$\sphericalangle RSP = \sphericalangle RQP = \sphericalangle AQM = \sphericalangle MQB = \sphericalangle MSB = \sphericalangle MSP.$$ 2 boda

Dakle, točke S, R i M su kolinearne, što je i trebalo pokazati.

Drugo rješenje.

Neka je točka M polovište dužine $\overline{AB}$, a točka X sjecište pravaca RS i MP. Želimo pokazati da se točke M i X podudaraju.



Koristeći uobičajene oznake za duljine stranica i veličine kutova trokuta ABC, iz pravokutnih trokuta AMQ i PMB zaključujemo

$$|QM| = \frac{c}{2}\operatorname{tg}\alpha, \quad |PM| = \frac{c}{2}\operatorname{tg}\beta \quad \text{i} \quad |QP| = |QM| - |PM| = \frac{c}{2}(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta).$$ 1 bod

Budući da pravokutni trokuti QSP i PMB imaju vršne kutove u P, vrijedi $\sphericalangle QPS = \sphericalangle MPB = 90^\circ - \beta$ te je

$$|PS| = |QP|\cos\sphericalangle QPS = \frac{c}{2}(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)\cos(90^\circ - \beta) = \frac{c}{2}\sin\beta(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta).$$ 2 boda

S obzirom na to da je $\sphericalangle PRQ = \sphericalangle PSQ = 90^\circ$, četverokut $PQSR$ je tetivan. 1 bod

Zato vrijedi $\sphericalangle XSP = \sphericalangle RSP = \sphericalangle RQP = \sphericalangle AQM = 90^\circ - \alpha$. 2 boda

Nadalje, promatrajući trokut PSX određujemo

$$\sphericalangle PXS = 180^\circ - \sphericalangle XSP - \sphericalangle SPX = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - (90^\circ + \beta) = \alpha - \beta,$$ 1 bod

pa primjenom poučka o sinusima dobivamo

$$\frac{|PS|}{\sin\sphericalangle PXS} = \frac{|PX|}{\sin\sphericalangle XSP}.$$ 1 bod

Slijedi

$$\begin{aligned}
|PX| &= \frac{\sin \sphericalangle XSP}{\sin \sphericalangle PXS} \cdot |PS| = \frac{\sin (90^\circ - \alpha)}{\sin (\alpha - \beta)} \cdot \frac{c}{2} \sin \beta (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) \\
&= \frac{\cos \alpha}{\sin (\alpha - \beta)} \cdot \frac{c}{2} \sin \beta \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \right) \\
&= \frac{c}{2} \sin \beta \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin (\alpha - \beta)} \cdot \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} \\
&= \frac{c}{2} \sin \beta \cdot \frac{1}{\cos \beta} = \frac{c}{2} \operatorname{tg} \beta = |PM|,
\end{aligned}$$

2 boda

čime smo dokazali tvrdnju.

Zadatak A-4.4.

Ploča P je dobivena uklanjanjem tri polja u kutovima ploče 7×7. U svako od 46 polja ploče P upisan je neki prirodni broj. Razlika brojeva u bilo koja dva polja koja imaju zajedničku stranicu je najviše 4. Dokaži da su u neka dva polja upisani isti brojevi.

Rješenje.

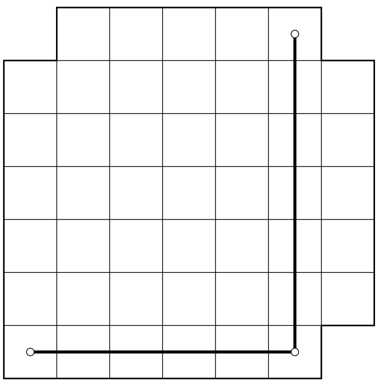
Numerirajmo retke i stupce ploče P brojevima $1, 2, \ldots, 7$. Na taj način smo uveli koordinatni sustav. Preciznije, uređeni par (i, j) označava polje koje se nalazi u i-tom stupcu i j-tom retku ploče P. Zbog simetrije možemo, bez smanjenja općenitosti, pretpostaviti da su uklonjena sva polja u kutovima osim donjeg lijevog.

Definirajmo *udaljenost* polja (i, j) i (k, l) kao vrijednost $|k - i| + |l - j|$. Intuitivno, zamislimo li da se po ploči krećemo usporedno s njenim rubovima, udaljenost je najmanji broj polja koje moramo posjetiti da bismo došli od polja (i, j) do polja (k, l). 2 boda

Najveća moguća udaljenost između dva polja će biti kada su brojevi $|k - i|$ i $|l - j|$ najveći mogući. Koordinate su brojevi iz skupa $\{1, 2, \ldots, 7\}$ pa je svaki od tih brojeva jednak najviše 6. 1 bod

No, ne mogu istovremeno oba biti jednaki 6 jer su tri polja u kutovima uklonjena. 1 bod

Dakle, najveća moguća udaljenost između dva polja je 11. 1 bod



Budući da je razlika brojeva upisanih na susjednim poljima najviše 4, slijedi da je razlika brojeva upisanih na poljima (k, l) i (i, j) najviše

$$4 \cdot (|k - i| + |l - j|) \leqslant 4 \cdot 11 = 44.$$

2 boda

Konačno, na ploči je 46 prirodnih brojeva, a razlika bilo koja dva je najviše 44, pa prema Dirichletovom principu neka dva broja moraju biti jednaka. 3 boda

Zadatak A-4.5.

Neka je d prirodni broj te (a_n) aritmetički niz prirodnih brojeva s razlikom d. Ako je $d \leqslant 2018$, dokaži da najviše 11 uzastopnih članova niza (a_n) mogu biti prosti brojevi.

Rješenje.

Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji prirodni broj n takav da su brojevi

$$a_n, \quad a_n + d, \quad a_n + 2d, \quad \ldots, \quad a_n + 11d$$

(njih 12 uzastopnih) prosti.

Ako je $a_n \leqslant 11$, onda a_n dijeli $a_n + a_n d$, pa broj $a_n + a_n d$ ne može biti prost. 2 boda

Zato je $a_n > 11$.

Pokazat ćemo da p dijeli d za $p \in \{2, 3, 5, 7, 11\}$. 2 boda

Promotrimo brojeve

$$a_n, \quad a_n + d, \quad \ldots, \quad a_n + (p-1)d.$$

Ako je d relativno prost s p (tj. p ne dijeli d), ti brojevi daju međusobno različite ostatke pri dijeljenju s p. 4 boda

Stoga je barem jedan od navedenih brojeva djeljiv s p, ali to je nemoguće jer su to prosti brojevi veći od p. Dakle, d je djeljiv s p. 1 bod

Konačno, vidimo da je d djeljiv s $2, 3, 5, 7, 11$, što znači da je $d \geqslant 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$, što je kontradikcija s uvjetom da je $d \leqslant 2018$. 1 bod

Dakle, nemoguće je da 12 (a time ni više) uzastopnih članova niza (a_n) budu prosti brojevi.

Napomena: Poznata je tvrdnja da za prost broj p, i broj d koji nije djeljiv s p, brojevi

$$0, d, 2d, \ldots, (p-1)d$$

daju različite ostatke pri dijeljenju s p, pa ju učenici ne moraju dokazivati. Oni učenici kojima ta tvrdnja nije poznata mogu je jednostavno dokazati na sljedeći način.

Pretpostavimo da postoje $i, j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, $i < j$ takvi da brojevi jd i id daju isti ostatak pri dijeljenju p. Tada je $jd - id = (j-i)d$ djeljiv brojem p, a to je nemoguće jer je $j - i < p$ i d nije djeljiv s p.