ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

28. veljače 2018.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-1.1.

Odredite sve cijele brojeve a za koje je $4a^2 - 24a - 45$ prost broj.

Rješenje.

Neka je $4a^2 - 24a - 45 = p$, gdje je p prost broj. Faktorizirajmo izraz na lijevoj strani jednakosti.

$$\begin{aligned} 4a^2 - 24a - 45 &= 4a^2 - 30a + 6a - 45 \\ &= 2a(2a-15) + 3(2a-15) \\ &= (2a+3)(2a-15). \end{aligned}$$

2 boda

Tada iz $(2a+3)(2a-15) = p$ slijedi:

1) $2a + 3 = \pm 1$ i $2a - 15 = \pm p \implies a = -1, p = -17$ ili $a = -2, p = 19$. 1 bod

   Kako je $p > 0$, u ovom slučaju jedino moguće je $a = -2$, $p = 19$. 1 bod

2) $2a + 3 = \pm p$ i $2a - 15 = \pm 1 \implies a = 8, p = 19$ ili $a = 7, p = -17$. 1 bod

   U ovom slučaju jedino moguće je $a = 8$, $p = 19$.

   Prema tome, jedini cijeli brojevi za koje je dani izraz prost broj su -2 i 8. 1 bod

Zadatak B-1.2.

Za koje je realne brojeve x vrijednost izraza

$$\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^3 - \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - 3}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 1}$$

veća od 1 ?

Prvo rješenje.

Pojednostavnimo dani izraz.

$$\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^{3}-\left(x^{3}+\frac{1}{x^{3}}\right)-3}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2}-\left(x^{2}+\frac{1}{x^{2}}\right)+1}=\frac{x^{3}+3x+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^{3}}-x^{3}-\frac{1}{x^{3}}-3}{x^{2}+2+\frac{1}{x^{2}}-x^{2}-\frac{1}{x^{2}}+1} \quad \text{2 boda}$$

$$=\frac{3x+\frac{3}{x}-3}{3}=x+\frac{1}{x}-1. \quad \text{1 bod}$$

Treba riješiti nejednadžbu $x+\frac{1}{x}-1>1$, odnosno $x+\frac{1}{x}>2$. 1 bod

Slijedi $\frac{x^{2}-2x+1}{x}>0$, odnosno $\frac{(x-1)^{2}}{x}>0$. 1 bod

Budući da je brojnik uvijek veći ili jednak 0, ovaj razlomak je veći od nule ako mu je nazivnik veći od 0 i brojnik različit od nule, pa je rješenje nejednadžbe $\langle 0,\infty\rangle\setminus\{1\}$. 1 bod

Drugo rješenje.

Uvedimo zamjenu $x+\frac{1}{x}=t$. Tada je

$$x^{3}+\frac{1}{x^{3}}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^{3}-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=t^{3}-3t, \quad \text{1 bod}$$

$$x^{2}+\frac{1}{x^{2}}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2}-2=t^{2}-2. \quad \text{1 bod}$$

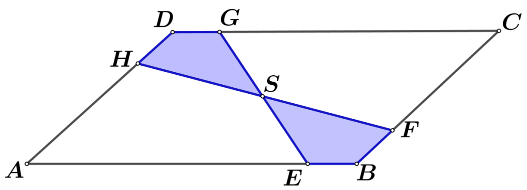
Time će se dani izraz transformirati u

$$\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^{3}-\left(x^{3}+\frac{1}{x^{3}}\right)-3}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2}-\left(x^{2}+\frac{1}{x^{2}}\right)+1}=\frac{t^{3}-\left(t^{3}-3t\right)-3}{t^{2}-\left(t^{2}-2\right)+1}=\frac{3t-3}{3}=t-1=x+\frac{1}{x}-1. \quad \text{1 bod}$$

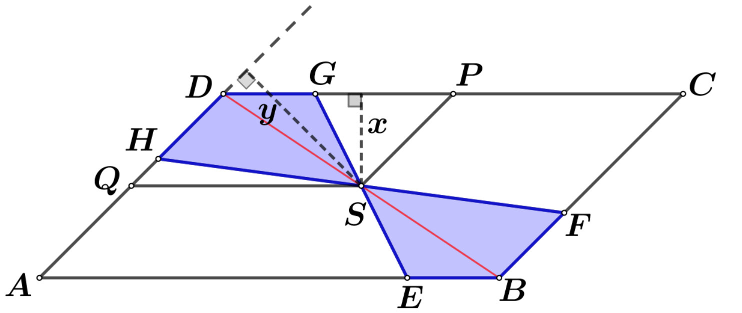
Dalje slijedi postupak i bodovanje kao u prvom rješenju. 3 boda

Zadatak B-1.3.

Duljine stranica paralelograma iznose $10\,\mathrm{cm}$ i $8\,\mathrm{cm}$. Izračunajte površinu osjenčanog dijela na slici ako je površina cijelog paralelograma $40\,\mathrm{cm}^2$ te vrijedi $|EB|=|BF|=|GD|=|DH|=1\,\mathrm{cm}$.



Prvo rješenje.



Trokuti GDH i EBF su sukladni prema poučku S–K–S, a zatim su trokuti GHS i EFS sukladni prema poučku K–S–K. Prema tome, osjenčani četverokuti $DHSG$ i $BFSE$ su sukladni te imaju istu površinu, a točka S je polovište dijagonale BD. 1 bod

Označimo s x polovinu visine paralelograma $ABCD$ na stranicu $\overline{CD}$, a s y polovinu visine na stranicu $\overline{AD}$.

Površina paralelograma $PDQS$ jednaka je četvrtini površine cijelog paralelograma što iznosi $10\,\mathrm{cm}^2$. Kako su njegove visine x i y, vrijedi:

$10 = 5 \cdot x \implies x = 2\,\mathrm{cm}$.

$10 = 4 \cdot y \implies y = 2.5\,\mathrm{cm}$. 2 boda

Površine trokuta GDS i DHS jednake su:

$$P(GDS) = \frac{|GD| \cdot x}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1\,\mathrm{cm}^2,$$
$$P(DHS) = \frac{|DH| \cdot y}{2} = \frac{1 \cdot 2.5}{2} = 1.25\,\mathrm{cm}^2.$$
2 boda

Tada je tražena površina jednaka

$$2(P(GDS) + P(DHS)) = 2(1 + 1.25) = 4.5\,\mathrm{cm}^2.$$
1 bod

Drugo rješenje.

Na isti način kao i u prvom rješenju zaključujemo da su osjenčani četverokuti $DHSG$ i $BFSE$ sukladni i da je točka S sjecište dijagonala. 1 bod

Slijedi da su trokuti AES i CGS te trokuti ASH i CSF sukladni prema poučku S–S–S. Površina osjenčanog dijela jednaka je

$$P_0 = P(ABCD) - 2P(AES) - 2P(ASH).$$

Iz formule za površinu paralelograma $P = a \cdot v_a$ slijedi $v_a = \frac{P}{a} = \frac{40}{10} = 4$. 1 bod

Analogno, iz $P = b \cdot v_b$ slijedi $v_b = \frac{P}{b} = \frac{40}{8} = 5$. 1 bod

$P(AES)=\frac{1}{2}|AE|\cdot\frac{v_a}{2}=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 2=9.$ 1 bod

$P(AHS)=\frac{1}{2}|AH|\cdot\frac{v_b}{2}=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 2.5=8.75.$ 1 bod

Slijedi $P_0=40-2\cdot 9-2\cdot 8.75=4.5\,\mathrm{cm}^2.$ 1 bod

Zadatak B-1.4.

Od svih prirodnih brojeva koji su djeljivi s 8 odredite one kojima je zbroj znamenaka jednak 7, a umnožak znamenaka jednak 6.

Rješenje.

Uočimo da brojevi ne sadrže znamenku 0 jer bi tada umnožak znamenaka bio jednak 0. 1 bod

Da bi umnožak znamenaka bio 6, broj mora imati:

- jednu znamenku 2 i jednu znamenku 3, a ostalo jedinice ili
- jednu znamenku 6, a ostalo jedinice. 1 bod

Kako je uz to zbroj znamenaka jednak 7, traženi broj može biti

- dvoznamenkasti sa znamenkama 1 i 6 ili
- četveroznamenkasti sa znamenkama $1,1,2,3$. 2 boda

Višekratnici broja 8 su djeljivi s 4, što znači da je dvoznamenkasti završetak traženog broja djeljiv s 4. Tada traženi broj završava s 12, 16 ili 32.

Ako je broj dvoznamenkast sa znamenkama 1 i 6, moguć je samo broj 16.

Ako je broj četveroznamenkast (sa znamenkama $1,1,2,3$), traženi broj može biti 1132, 1312 ili 3112, od kojih samo prvi nije djeljiv s 8, a preostala dva jesu.

Zato su sva rješenja brojevi 16, 1312 i 3112. 2 boda

Napomena: Učenik dobiva 4 boda na temelju zapisanih zaključaka riječima ili simbolima iz kojih se vidi:

– da 0 ne može biti znamenka (1 bod)
– da koristi činjenicu da je umnožak znamenaka = 6, odnosno da su jedine moguće znamenke 1, 6 ili 1, 2, 3 (1 bod)
– da koristi činjenicu da je zbroj znamenaka 7, pa broj mora biti dvoznamenkasti sa znamenkama 1, 6 ili četveroznamenkasti sa znamenkama 1, 1, 2, 3 (2 boda)

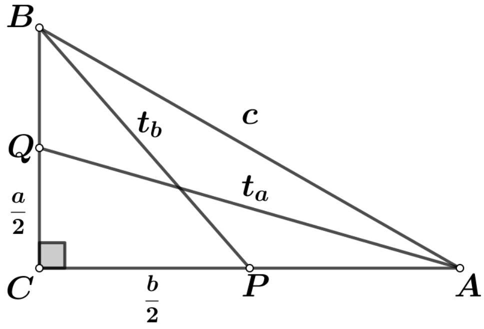
Raspisivanje mogućnosti i provjeravanje djeljivosti s 8 do traženih brojeva, 16, 1312, 3112, vrijedi 2 boda.

Ukoliko učenik ima točno rješenje, a nema argumentaciju ili postupak iz kojeg se vidi kako je zaključio da su to jedine mogućnosti, dobiva 2 boda.

Zadatak B-1.5.

U pravokutnom je trokutu zbroj duljina težišnica povučenih iz vrhova na hipotenuzi jednak $5\sqrt{5}$, a umnožak 30. Kolika je duljina hipotenuze?

Rješenje.



1 bod

Prema uvjetima zadatka, a uz oznake kao na slici, vrijedi $t_a + t_b = 5\sqrt{5}$, $t_a \cdot t_b = 30$. Primijenimo Pitagorin poučak na trokute AQC i BCP.

$$t_a^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$
$$t_b^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

2 boda

Zbrojimo li ove jednadžbe, dobivamo

$$t_a^2 + t_b^2 = a^2 + b^2 + \frac{a^2+b^2}{4} = \frac{5}{4}c^2.$$

1 bod

Iz $(t_a + t_b)^2 = t_a^2 + 2t_a \cdot t_b + t_b^2$ slijedi

$$t_a^2 + t_b^2 = (t_a + t_b)^2 - 2t_a \cdot t_b = 125 - 60 = 65,$$

1 bod

$$c^2 = \frac{4}{5}(t_a^2 + t_b^2) = 52 \implies c = 2\sqrt{13}.$$

1 bod

Zadatak B-1.6.

Borna i Dina pomogli su Ani oličiti sobu. Ako bi Ana ličila sama, trebalo bi joj 15 sati da oliči cijelu sobu. Borna radi 50% brže od Ane, a Dina 25% sporije. Ana je sama počela s ličenjem u 8 sati, a Borna joj se pridružio u 9 sati i 30 minuta. U trenutku kad je došla Dina ukupno je bilo oličeno 35% sobe. Nakon toga su svi zajedno ličili dok nisu oličili cijelu sobu. U koliko je sati soba bila oličena?

Rješenje.

Ana za jedan sat oliči $\frac{1}{15}$ sobe. 1 bod

Tada će Borna za jedan sat oličiti $1.5 \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{10}$ sobe. 1 bod

Dina će oličiti $0.75 \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{20}$ sobe. 1 bod

Ana je prvo sama radila 1.5 sat. Neka je x broj sati za koje su Ana i Borna zajedno ličili, a y broj sati za koje su ličili Ana, Borna i Dina zajedno.

Dio sobe koji Ana oliči za 1.5 sat sama zajedno s dijelom koji oliči za x sati s Bornom, čini ukupno 35% sobe. Pišemo:

$$1.5 \cdot \frac{1}{15} + x \cdot \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{10}\right) = 0.35 \qquad \text{2 boda}$$

$$\frac{1}{10} + x \cdot \frac{1}{6} = 0.35$$

$$\frac{x}{6} = \frac{35}{100} - \frac{1}{10} = \frac{25}{100} = 0.25$$

$$x = 1.5 \text{ sati.} \qquad \text{1 bod}$$

Analogno, iz činjenice da Ana, Borna i Dina zajedno oliče 65% sobe za y sati slijedi

$$y \cdot \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20}\right) = 0.65 \qquad \text{2 boda}$$

$$y \cdot \frac{13}{60} = \frac{65}{100} = \frac{13}{20}$$

$$y = 3 \text{ sata.} \qquad \text{1 bod}$$

Ukupno su radili $1.5 + 1.5 + 3 = 6$ sati, odnosno soba je bila oličena u 14 sati. 1 bod

Napomena: Treba priznati odgovor i ako učenik nije naveo točno vrijeme (u 14 sati) već samo trajanje posla (6 sati).

Zadatak B-1.7.

Kuhar je za 36 kolača koristio tri različite kreme: bijelu, žutu i crnu. 25 kolača ima dijelove s bijelom kremom, 28 kolača ima dijelove sa žutom kremom, a njih 20 s crnom kremom. Samo se u 5 kolača nalaze sve tri kreme. Koliko ima „jednobojnih“ kolača (onih u kojima se nalazi samo jedna vrsta kreme), a koliko „dvobojnih“ kolača?

Rješenje.

Uvedimo sljedeće oznake:

x je broj kolača koji sadrže samo bijelu kremu,

y je broj kolača koji sadrže samo žutu kremu,

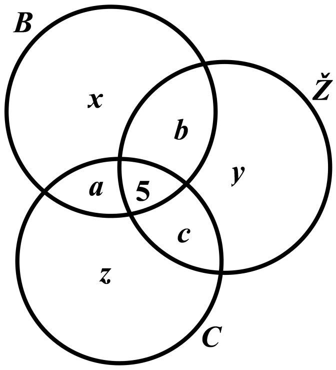
z je broj kolača koji sadrže samo crnu kremu,

a je broj kolača koji sadrže samo bijelu i crnu kremu,

b je broj kolača koji sadrže samo bijelu i žutu kremu,

c je broj kolača koji sadrže samo žutu i crnu kremu.

Zadatak ćemo riješiti koristeći Vennove dijagrame:



2 boda

Treba izračunati broj „jednobojnih” kolača, odnosno $x + y + z$.

Znamo $x + y + z + a + b + c + 5 = 36$, odnosno 1 bod

$$(x + y + z) + (a + b + c) = 31. \tag{1}$$

Iz dijagrama vidimo da je

$$\begin{aligned} a + b &= 25 - 5 - x = 20 - x \\ b + c &= 28 - 5 - y = 23 - y \\ a + c &= 20 - 5 - z = 15 - z. \end{aligned}$$

2 boda

Zbrojimo li ove posljednje tri jednakosti, dobit ćemo

$$2(a + b + c) = 58 - (x + y + z). \tag{2}$$

1 bod

Tada iz (1) i (2) slijedi

$$a + b + c = 31 - (x + y + z)$$ 1 bod

$$62 - 2(x + y + z) = 58 - (x + y + z)$$ 1 bod

$$x + y + z = 4.$$ 1 bod

Broj jednobojnih kolača jednak je $x + y + z = 4$, a broj dvobojnih $a + b + c = 27$. 1 bod

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

28. veljače 2018.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-2.1.

Ako je $a=\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{3}-1}+\sqrt{\sqrt{3}+1}\right)$, $b=\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{3}-1}-\sqrt{\sqrt{3}+1}\right)$, koliko je $a+b$?

Prvo rješenje.

$$\begin{aligned} a^2 &= \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-1+2\sqrt{\sqrt{3}-1}\cdot\sqrt{\sqrt{3}+1}+\sqrt{3}+1\right) \\ &= 2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)=2 \end{aligned}$$ 1 bod

$$\begin{aligned} b^2 &= \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-1-2\sqrt{\sqrt{3}-1}\cdot\sqrt{\sqrt{3}+1}+\sqrt{3}+1\right) \\ &= 2\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=2 \end{aligned}$$ 1 bod

Dakle, $|a|=\sqrt{2}$, $|b|=\sqrt{2}$. 1 bod

Očito je $a>0$, a kako je $\sqrt{\sqrt{3}+1}>\sqrt{\sqrt{3}-1}$ to je $b<0$. 1 bod

Kako je $a>0$, $b<0$ slijedi $a=\sqrt{2}$, $b=-\sqrt{2}$. 1 bod

Konačno je zbroj $a+b=0$. 1 bod

Napomena: Ako učenik nema zaključak da je $b<0$ i dobije rješenje $a+b=2\sqrt{2}$, oduzeti 2 boda.

Drugo rješenje.

Koristit ćemo identitet $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. 1 bod

$$\begin{aligned} a^2 &= \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-1+2\sqrt{\sqrt{3}-1}\cdot\sqrt{\sqrt{3}+1}+\sqrt{3}+1\right) \\ &= 2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)=2 \end{aligned}$$ 1 bod

$$\begin{aligned} 2ab &= 2\cdot\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\left(\sqrt{\sqrt{3}-1}+\sqrt{\sqrt{3}+1}\right)\cdot\left(\sqrt{\sqrt{3}-1}-\sqrt{\sqrt{3}+1}\right) \\ &= 2\cdot\sqrt{3-2}\left(\sqrt{3}-1-(\sqrt{3}+1\right)=2\cdot1\cdot(-2)=-4 \end{aligned}$$ 1 bod

$$
\begin{aligned}
b^2 &= \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-1-2\sqrt{\sqrt{3}-1}\cdot\sqrt{\sqrt{3}+1}+\sqrt{3}+1\right)\\
&= 2\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=2
\end{aligned}
$$
1 bod

Konačno dobivamo $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 = 2+(-4)+2 = 0$ pa je i $a+b=0$. 2 boda

Zadatak B-2.2.

Neka su $z = x+2i$, $u = 3+yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ kompleksni brojevi. Odredite sve uređene parove realnih brojeva (x, y) za koje je realni dio broja $\dfrac{z+u}{z-u}$ jednak nula, a točka s koordinatama (x, y) od ishodišta udaljena za 3.

Rješenje.

Odredimo realni dio broja $\dfrac{z+u}{z-u}$.

$$
\begin{aligned}
\frac{z+u}{z-u} &= \frac{x+2i+3+yi}{x+2i-3-yi} = \frac{(x+3)+(2+y)i}{(x-3)+(2-y)i}\\
&= \frac{((x+3)+(2+y)i)\,((x-3)-(2-y)i)}{(x-3)^2+(2-y)^2}
\end{aligned}
$$
1 bod

$$
\operatorname{Re}\left(\frac{z+u}{z-u}\right) = \frac{(x+3)(x-3)+(2+y)(2-y)}{(x-3)^2+(2-y)^2} = \frac{x^2-y^2-5}{(x-3)^2+(2-y)^2}
$$
1 bod

Ovaj je razlomak jednak nuli ako je $x^2-y^2-5=0$ uz $x \neq 3$, $y \neq 2$. 1 bod

Točka s koordinatama (x, y) je od ishodišta udaljena za 3 ako je $x^2+y^2=9$. 1 bod

Rješenje zadatka su svi uređeni parovi (x, y) koji zadovoljavaju sustav

$$
\begin{aligned}
x^2-y^2&=5\\
x^2+y^2&=9.
\end{aligned}
$$

Zbrojimo li jednadžbe tog sustava dobit ćemo $x^2=7$ pa je $x=\pm\sqrt{7}$. Tada je $y^2=2$ odnosno $y=\pm\sqrt{2}$. 1 bod

Konačno, rješenja su uređeni parovi

$$
\left(-\sqrt{7}, -\sqrt{2}\right), \left(-\sqrt{7}, \sqrt{2}\right), \left(\sqrt{7}, -\sqrt{2}\right), \left(\sqrt{7}, \sqrt{2}\right).
$$
1 bod

Zadatak B-2.3.

Jednadžba $y = x^2-2(m+1)x+2m^2+2018$, $m \in \mathbb{R}$ određuje skup parabola. Kojemu skupu točaka pripadaju tjemena svih takvih parabola? Odredite zbroj koordinata one točke iz tog skupa koja je najbliža x-osi.

Rješenje.

Koordinate tjemena su oblika:

$$x_0 = m + 1$$
$$y_0 = m^2 - 2m + 2017 \qquad \text{2 boda}$$

Izrazimo li iz prve jednadžbe $m = x_0 - 1$ i uvrstimo u drugu kako bi dobili vezu između koordinata tjemena, dobivamo

$$y_0 = (x_0 - 1)^2 - 2(x_0 - 1) + 2017 = x_0^2 - 4x_0 + 2020,$$

odnosno $y_0 = (x_0 - 2)^2 + 2016$. 1 bod

Zaključujemo da se tjemena svih parabola iz danog skupa nalaze na paraboli $y = (x - 2)^2 + 2016$. 1 bod

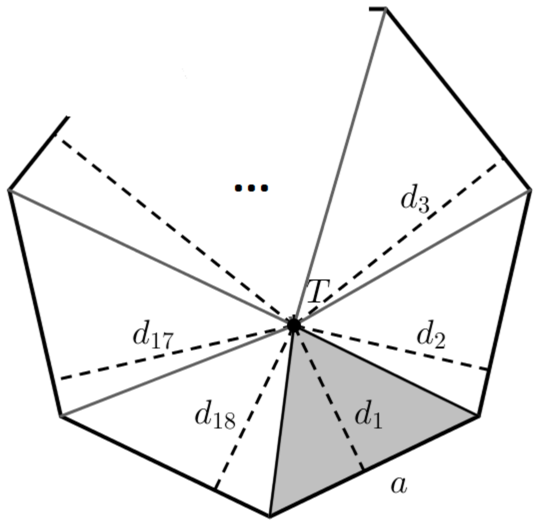
Točka te parabole koja je najbliža x-osi je njezino tjeme, odnosno $T(2, 2016)$. Stoga traženi zbroj koordinata iznosi 2018. 2 boda

Zadatak B-2.4.

Dokažite da je u pravilnome 18-erokutu aritmetička sredina udaljenosti proizvoljne točke T od pravaca na kojima leže stranice toga 18-erokuta jednaka $R\cos 10^\circ$, gdje je R polumjer opisane kružnice toga 18-erokuta.

Prvo rješenje.

Neka su $d_1, d_2, \ldots, d_{18}$ udaljenosti točke T od pravaca na kojima leže stranice pravilnoga 18-erokuta.



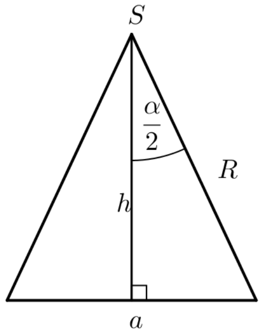
Spojimo li točku T s vrhovima toga 18-erokuta, dobit ćemo 18 različitih trokuta površina $P_i = \dfrac{1}{2}a \cdot d_i$, $i = 1, \ldots, 18$. 1 bod

Zbroj površina tih trokuta jednaka je

$$P = \frac{1}{2}a \cdot d_1 + \frac{1}{2}a \cdot d_2 + \cdots + \frac{1}{2}a \cdot d_{18} = \frac{a}{2}\left(d_1 + d_2 + \cdots + d_{18}\right). \qquad \text{1 bod}$$

S druge strane, površinu 18-erokuta računamo kao zbroj površina 18 sukladnih jednakokračnih trokuta $P = 18 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$, gdje je h visina tih jednakokračnih trokuta.

1 bod



Vrijedi $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{h}{R}$ pa je $h = R\cos\frac{\alpha}{2}$.

Iz $\alpha = \frac{360^\circ}{18}$ slijedi $\frac{\alpha}{2} = 10^\circ$.

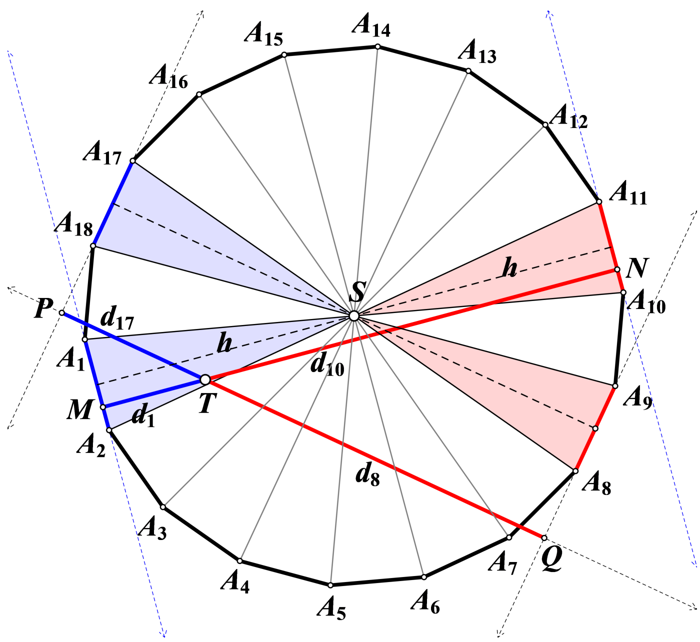
Slijedi $h = R\cos 10^\circ$, odnosno $P = 18 \cdot \frac{a}{2} \cdot R\cos 10^\circ$. 1 bod

Izjednačavanjem površina dobiva se

$$\frac{a}{2}(d_1 + d_2 + \cdots + d_{18}) = 18 \cdot \frac{a}{2} \cdot R\cos 10^\circ$$ 1 bod

pa je konačno $\frac{d_1 + d_2 + \cdots + d_{18}}{18} = R\cos 10^\circ$. 1 bod

Drugo rješenje.



Neka je S središte tom 18-erokutu opisane kružnice. Dani 18-terokut podijelimo na 18 sukladnih jednakokračnih trokuta A_1A_2S, A_2A_3S,... $A_{17}A_{18}S$, $A_{18}A_1S$ s kutom $\alpha = \frac{360^\circ}{18} = 20^\circ$ pri vrhu S.

Neka su $d_1, d_2, \ldots, d_{18}$ udaljenosti točke T od pravaca na kojima leže redom stranice $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$,..., $\overline{A_{17}A_{18}}$, $\overline{A_{18}A_1}$.

Uočimo da dvije po dvije stranice 18-erokuta leže na paralelnim pravcima. 1 bod

Primjerice, stranice $\overline{A_1A_2}$ i $\overline{A_{10}A_{11}}$ su paralelne jer su dijagonale $\overline{A_1A_{10}}$ i $\overline{A_2A_{11}}$, promjeri opisane kružnice tog 18-erokuta.

Međusobna udaljenost paralelnih stranica $\overline{A_1A_2}$ i $\overline{A_{10}A_{11}}$ jednaka je dvostrukoj visini h karakterističnog jednakokračnog trokuta. 1 bod

S druge strane, zbroj udaljenosti točke T do stranica $\overline{A_1A_2}$ i $\overline{A_{10}A_{11}}$ jednak je $d_1 + d_{10} = |MN| = 2h$.

Analogno vrijedi i za preostale parove paralelnih stranica pa možemo pisati:

$$
\begin{aligned}
d_1 + d_{10} &= 2h \\
d_2 + d_{11} &= 2h \\
&\vdots \\
d_8 + d_{17} &= 2h \\
d_9 + d_{18} &= 2h
\end{aligned}
$$

1 bod

Zbrojimo li ove jednakosti dobivamo $d_1 + d_2 + \cdots + d_{18} = 18h$

pa je $\frac{d_1 + d_2 + \cdots + d_{18}}{18} = h$. 1 bod

Visinu h računamo kao i u prvom rješenju: $h = R\cos 10^\circ$ 1 bod

odakle slijedi tvrdnja

$$\frac{d_1 + d_2 + \cdots + d_{18}}{18} = R\cos 10^\circ.$$

1 bod

Zadatak B-2.5.

Petar ima komplet od 9 sportskih majica. Na svakoj je majici otisnut jedan od brojeva iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ i svi brojevi na majicama su različiti. Petar ide na putovanje i želi ponijeti 5 majica tako da među njima budu barem tri na kojima je otisnut paran broj. Na koliko načina Petar može odabrati 5 majica koje će ponijeti na put?

Prvo rješenje.

Pitamo se ustvari, na koliko se načina može iz zadanog skupa odabrati pet brojeva tako da su među njima barem tri parna broja, odnosno koliko ima petočlanih podskupova skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ koji sadrže najmanje tri parna broja.

Primijetimo da redoslijed brojeva unutar podskupa nije važan. (Važno je samo koje će majice Petar ponijeti.) Primjerice $\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{2, 4, 1, 3, 5\}$.

Imamo sljedeća dva slučaja ovisno o tome koliko će parnih brojeva biti među pet odabranih:

1. tri parna, dva neparna,
2. četiri parna, jedan neparan. 1 bod

U prvom slučaju:

Tri parna broja koje ćemo uzeti možemo odabrati na isti broj načina kao i jedan parni broj koji nećemo uzeti iz zadanog skupa, što možemo na 4 načina. 1 bod

Prvi neparan broj možemo odabrati na 5 načina, drugi na 4 načina što je ukupno $5 \cdot 4 = 20$ načina. No time smo brojali i sve parove brojeva $\{a, b\}$ i $\{b, a\}$ koje kao podskupove ne razlikujemo. Svaki smo takav par brojali dva puta pa dobiveni broj treba podijeliti s 2.

Dakle, dva neparna broja možemo odabrati na 10 načina. 1 bod

Za svaki od 4 načina odabira tri parna broja imamo 10 načina odabira neparnih, što je ukupno $4 \cdot 10 = 40$ načina da odaberemo tri parna i dva neparna broja. 1 bod

U drugom slučaju:

Četiri parna broja možemo odabrati na jedan način, a jedan neparan broj možemo odabrati na 5 načina, što je ukupno $1 \cdot 5 = 5$ načina. 1 bod

Ukupno je $4 \cdot 10 + 1 \cdot 5 = 45$ različitih podskupova s najmanje tri parna broja. 1 bod

Drugo rješenje.

Kao i u prvom rješenju treba uočiti da brojimo petočlane podskupove, odnosno da redoslijed brojeva nije važan. Promatramo dva slučaja, ovisno o broju parnih brojeva unutar podskupa: tri parna, dva neparna broja ili četiri parna, jedan neparan broj. 1 bod

Ispisivanjem svih mogućnosti dolazimo do rješenja.

1. Tri parna i dva neparna broja možemo odabrati na 40 načina:

$$
\begin{array}{llll}
24613, & 24813, & 26813, & 46813 \\
24615, & 24815, & 26815, & 46815 \\
24617, & 24817, & 26817, & 46817 \\
24619, & 24819, & \ldots & \\
24635, & \ldots & & \\
24637, & \ldots & & \\
24639, & \ldots & & \\
24657, & \ldots & & \\
24659, & \ldots & & \\
24679, & 24879, & 26879, & 46879
\end{array}
$$

3 boda

2. Četiri parna i jedan neparan broj možemo odabrati na pet načina:

$$24681, \quad 24683, \quad 24685, \quad 24687, \quad 24689.$$ 1 bod

Ukupno je 45 različitih odabira 5 majica koje će Petar ponijeti na putovanje. 1 bod

Napomena: Ukoliko je učenik prilikom ispisivanja izostavio jedan ili više podskupova:

- U prvom slučaju za jedan izostavljeni podskup gubi jedan bod, za dva izostavljena gubi dva boda, a za više od tri izostavljena gubi sva tri boda.
- U drugom slučaju za makar jedan izostavljeni podskup gubi jedan bod, odnosno sve predviđene bodove.

Zadatak B-2.6.

Za koje cijele brojeve b izraz

$$\left(\frac{b}{b+8}-\frac{4b}{\left(b^{\frac{1}{3}}+2\right)^{3}}\right)\cdot\left(\frac{1+2b^{-\frac{1}{3}}}{1-2b^{-\frac{1}{3}}}\right)^{2}+\frac{24}{b+8}$$

ima vrijednost veću od 1 ?

Rješenje.

Pojednostavnimo dani izraz.

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{b}{b+8}-\frac{4b}{\left(b^{\frac{1}{3}}+2\right)^{3}}\right)\cdot\left(\frac{1+2b^{-\frac{1}{3}}}{1-2b^{-\frac{1}{3}}}\right)^{2}+\frac{24}{b+8}\\
&=\left(\frac{b}{\left(b^{\frac{1}{3}}+2\right)\left(b^{\frac{2}{3}}-2b^{\frac{1}{3}}+4\right)}-\frac{4b}{\left(b^{\frac{1}{3}}+2\right)^{3}}\right)\cdot\left(\frac{\frac{b^{\frac{1}{3}}+2}{b^{\frac{1}{3}}}}{\frac{b^{\frac{1}{3}}-2}{b^{\frac{1}{3}}}}\right)^{2}+\frac{24}{b+8}
\end{aligned}$$ 2 boda

1 bod za faktorizaciju prvog nazivnika, 1 bod za zbrajanje u drugoj zagradi

$$=\frac{b\left(b^{\frac{1}{3}}+2\right)^{2}-4b\left(b^{\frac{2}{3}}-2b^{\frac{1}{3}}+4\right)}{\left(b^{\frac{1}{3}}+2\right)^{3}\left(b^{\frac{2}{3}}-2b^{\frac{1}{3}}+4\right)}\cdot\left(\frac{b^{\frac{1}{3}}+2}{b^{\frac{1}{3}}-2}\right)^{2}+\frac{24}{b+8}$$ 1 bod

svođenje na zajednički nazivnik

$$=\frac{b\left(b^{\frac{2}{3}}+4b^{\frac{1}{3}}+4-4b^{\frac{2}{3}}+8b^{\frac{1}{3}}-16\right)}{\left(b^{\frac{1}{3}}+2\right)^{3}\left(b^{\frac{2}{3}}-2b^{\frac{1}{3}}+4\right)}\cdot\frac{\left(b^{\frac{1}{3}}+2\right)^{2}}{\left(b^{\frac{1}{3}}-2\right)^{2}}+\frac{24}{b+8}$$ 1 bod

izlučivanje b i kvadriranje u brojniku nakon svođenja na zajednički nazivnik

$$= \frac{b\left(-3b^{\frac{2}{3}}+12b^{\frac{1}{3}}-12\right)}{(b+8)\left(b^{\frac{1}{3}}-2\right)^{2}}+\frac{24}{b+8}$$ 1 bod

sređivanje brojnika i množenje s drugim razlomkom

$$= \frac{-3b\left(b^{\frac{1}{3}}-2\right)^{2}}{(b+8)\left(b^{\frac{1}{3}}-2\right)^{2}}+\frac{24}{b+8}$$ 1 bod

uočavanje kvadrata binoma

$$= \frac{-3b}{b+8}+\frac{24}{b+8}=\frac{-3(b-8)}{b+8}.$$ 1 bod

skraćivanje i konačan zapis pojednostavljenog izraza

Riješimo nejednadžbu $\frac{-3(b-8)}{b+8}>1$ u skupu $\mathbb{Z}$.

$$\frac{-3(b-8)}{b+8}>1 \iff \frac{-3b+24-b-8}{b+8}>0 \iff \frac{-4b+16}{b+8}>0 \iff \frac{-b+4}{b+8}>0$$ 1 bod

Raspisivanjem slučajeva ili tablicom predznaka dobivamo rješenje $b \in \langle -8, 4\rangle$. 1 bod

Konačno rješenje su svi cijeli brojevi iz tog intervala osim nule jer za $b=0$ početni izraz nije definiran (pojavljuje se negativan eksponent).

Dakle vrijedi $b \in \{-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,1,2,3\}$. 1 bod

Napomena: Ako je učenik uključio 0 u rješenje skinuti 1 bod.

Napomena: Zadatak se može riješiti i s pomoću zamjene $b=a^3$. Tada dobivamo izraz:

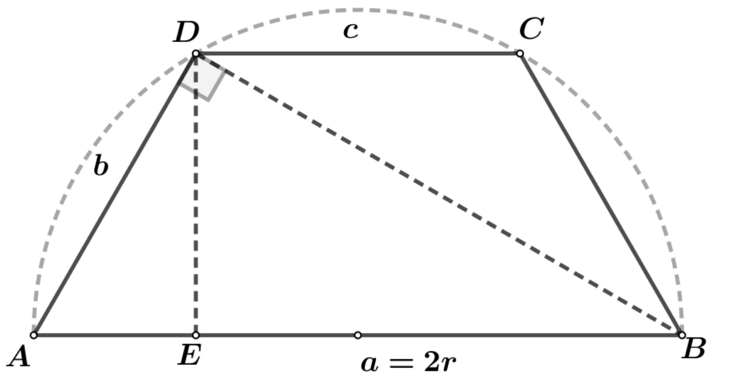
$$\left(\frac{a^3}{a^3+8}-\frac{4a^3}{(a+2)^3}\right)\cdot\left(\frac{1+2a^{-1}}{1-2a^{-1}}\right)^2+\frac{24}{a^3+8},$$

a dalje rješavamo kao u prvom načinu. Bodovanje je analogno.

Zadatak B-2.7.

Jednakokračan trapez upisan je u polukrug polumjera 4 cm tako da mu je veća osnovica promjer. Koji od svih takvih trapeza ima maksimalan opseg? Obrazložite i odredite njegovu površinu.

Rješenje.



Vrijedi $a = 2r = 8\,\mathrm{cm}$.

Kut $\sphericalangle ADB$ je pravi kut jer je to obodni kut nad promjerom. 1 bod

Također, $|AE| = \dfrac{a-c}{2} = 4 - \dfrac{c}{2}$. 1 bod

Prema Euklidovom poučku iz pravokutnog trokuta ABD slijedi:

$$\begin{aligned} b^2 &= |AE| \cdot a \\ &= \left(4 - \frac{c}{2}\right) \cdot 8 = 32 - 4c. \end{aligned}$$ 1 bod

odakle slijedi $c = \dfrac{32 - b^2}{4}$. 1 bod

Tada je opseg trapeza u ovisnosti o kraku b jednak:

$$o = a + c + 2b = 8 + \frac{32 - b^2}{4} + 2b = -\frac{b^2}{4} + 2b + 16.$$ 2 boda

Vidimo da je opseg trapeza kvadratna funkcija po b koja postiže maksimum za

$b = \dfrac{-2}{-\frac{2}{4}} = 4.$ 1 bod

Tada je manja osnovica $c = \frac{32-b^2}{4} = 4\,\mathrm{cm}$.

Dakle, trapez će imati maksimalan opseg ako su krakovi i manja osnovica jednaki polumjeru r. 1 bod

Iz $|DE|^2 = b^2 - |AE|^2 = r^2 - \left(\dfrac{r}{2}\right)^2$ dobivamo $|DE| = 2\sqrt{3}$. 1 bod

Površina danog trapeza je

$$P = \frac{a+c}{2} \cdot |DE| = 6 \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2.$$ 1 bod

Napomena: Površina se može izračunati tako da se iz $\frac{a}{2} = b = c = r$ uoči da je trapez polovina pravilnog šesterokuta sa stranicom duljine r. (Nakon zaključka $b = c = r$ računanje površine nosi 2 boda.)

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

28. veljače 2018.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-3.1.

Neka su x i y realni brojevi takvi da je

$$\sin x - \sin y = \sqrt{\frac{1008}{1009}}, \quad \cos x - \cos y = 1.$$

Čemu je jednako $\cos(x-y)$?

Rješenje.

Nakon kvadriranja zadanih jednakosti dobivamo:

$$\begin{aligned}\sin^2 x - 2\sin x \sin y + \sin^2 y &= \frac{1008}{1009},\\ \cos^2 x - 2\cos x \cos y + \cos^2 y &= 1.\end{aligned}$$

2 boda

Zbrojimo dobivene izraze.

$$\sin^2 x + \cos^2 x - 2\left(\cos x \cos y + \sin x \sin y\right) + \sin^2 y + \cos^2 y = 1 + \frac{1008}{1009}$$

1 bod

$$1 - 2\cos(x-y) + 1 = 1 + \frac{1008}{1009}$$

2 boda

pa je konačno $\cos(x-y) = \frac{1}{2018}$.

1 bod

Zadatak B-3.2.

Odredite sve parne prirodne brojeve n za koje vrijedi

$$\left|\log_{0.5} 20^{\cos\pi} + \log_{0.5} 30^{\cos 2\pi} + \log_{0.5} 42^{\cos 3\pi} + \cdots + \log_{0.5}\left(n^2+7n+12\right)^{\cos n\pi}\right| = 1.$$

Rješenje.

Pojednostavnimo zadani izraz.

$$\left|\log_{0.5}\left(20^{\cos\pi}\cdot 30^{\cos 2\pi}\cdot 42^{\cos 3\pi}\cdot\cdots\cdot\left(n^2+7n+12\right)^{\cos n\pi}\right)\right|=1$$

$$\left|\log_{0.5}\left(20^{-1}\cdot 30^{1}\cdot 42^{-1}\cdot\cdots\cdot\left(n^2+7n+12\right)^{1}\right)\right|=1$$ 1 bod

$$\left|\log_{0.5}\left((4\cdot5)^{-1}\cdot(5\cdot6)\cdot(6\cdot7)^{-1}\cdot\cdots\cdot(n+3)(n+4)\right)\right|=1$$ 1 bod

$$\left|\log_{0.5}\left(\frac{1}{4\cdot5}\cdot(5\cdot6)\cdot\frac{1}{6\cdot7}\cdot\cdots\cdot(n+3)(n+4)\right)\right|=1$$ 1 bod

$$\left|\log_{0.5}\left(\frac{1}{4}\cdot(n+4)\right)\right|=1 \quad\Longrightarrow\quad \log_{0.5}\left(\frac{1}{4}\cdot(n+4)\right)=\pm1$$ 1 bod

Iz $\frac{n+4}{4}=\frac{1}{2}$ slijedi $n=-2$ no to nije prirodan broj. 1 bod

Iz $\frac{n+4}{4}=2$ dobivamo rješenje $n=4$. 1 bod

Zadatak B-3.3.

Riješite jednadžbu $x^2-x-\sin(\pi x)=-1.25$.

Prvo rješenje.

Jednadžbu $x^2-x-\sin(\pi x)=-1.25$ zapišimo u obliku

$$\begin{aligned} x^2-x+1.25&=\sin(\pi x)\\ (x^2-x+0.25)+1&=\sin(\pi x)\\ (x-0.5)^2+1&=\sin(\pi x)\end{aligned}$$ 1 bod

Uočimo da je $(x-0.5)^2+1\geqslant 1$ za sve $x\in\mathbb{R}$ i $\sin(\pi x)\leqslant 1$ za sve $x\in\mathbb{R}$. 2 boda

Zato jednakost $(x-0.5)^2+1=\sin(\pi x)$ vrijedi ako i samo ako je $(x-0.5)^2+1=1$ i $\sin(\pi x)=1$. 1 bod

Iz $(x-0.5)^2+1=1$ slijedi $x=0.5$, 1 bod

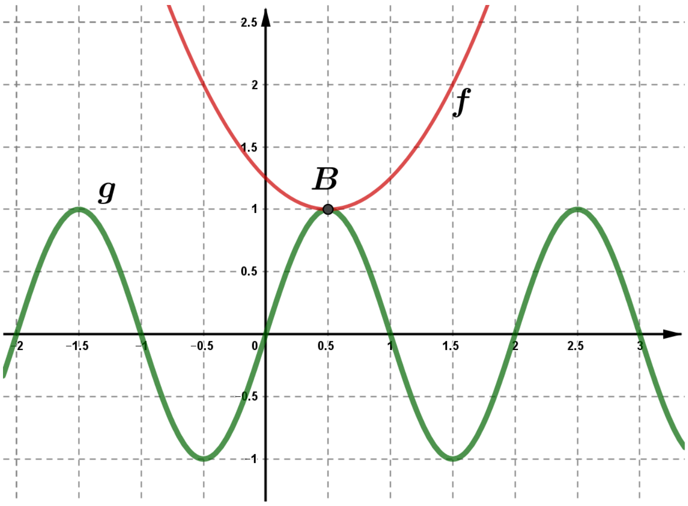
a kako je u tom slučaju $\sin(\pi x)=\sin\frac{\pi}{2}=1$, zaključujemo da je $x=\frac{1}{2}$ jedinstveno rješenje dane jednadžbe. 1 bod

Drugo rješenje.

Kao i u prvom rješenju jednadžbu $x^2 - x - \sin(\pi x) = -1.25$ zapišimo u obliku $x^2 - x + 1.25 = \sin(\pi x)$. 1 bod

Označimo $f(x) = x^2 - x + 1.25$ i $g(x) = \sin(\pi x)$.

Dalje rješavamo grafičkom metodom. Nacrtamo grafove funkcija f i g u istom koordinatnom sustavu.



2 boda

Graf kvadratne funkcije f je parabola kojoj je tjeme u točki $B(0.5, 1)$. To znači da je najmanja vrijednost funkcije f jednaka 1, a postiže se samo za $x = 0.5$. 1 bod

S druge je strane amplituda funkcije g jednaka 1, pa je maksimum funkcije g jednak 1.

Prema tome, jedina je mogućnost da obje funkcije za neki, isti x postižu vrijednost 1. Očito je samo jedna takva mogućnost za $x = 0.5$. 1 bod

Provjerimo je li $g(0.5) = 1$.
Vrijedi $g(0.5) = \sin(\pi \cdot 0.5) = 1$. Stoga je jedino rješenje $x = 0.5$. 1 bod

Zadatak B-3.4.

Izračunajte površinu romba $ABCD$ ako su polumjeri opisanih kružnica trokuta ABD i ACD redom jednaki 10 i 20.

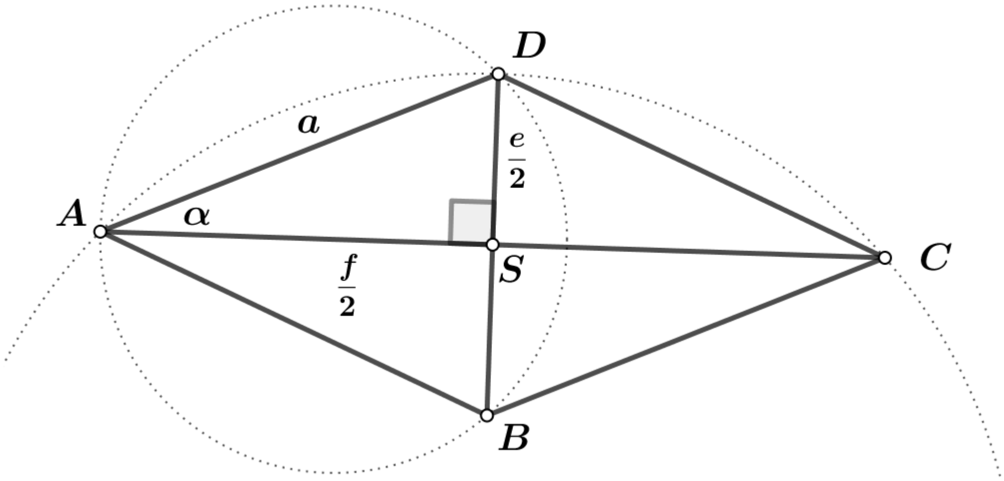
Rješenje.

Označimo polumjer trokutu ABD opisane kružnice s r, a polumjer trokutu ACD opisane kružnice s R.

Prema poučku o sinusima za trokute ABD i ACD vrijedi:

$$\frac{e}{\sin 2\alpha} = 2r = 20, \qquad \frac{f}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} = 2R = 40$$ 1 bod

pa je $e = 20 \sin 2\alpha$, $f = 40 \sin 2\alpha$. 1 bod



Tada je

$$\frac{e}{f}=\frac{20\sin 2\alpha}{40\sin 2\alpha}=\frac{1}{2}.$$ 1 bod

Dakle vrijedi $f=2e$

pa je $a=|AD|=\sqrt{\left(\frac{e}{2}\right)^2+\left(\frac{f}{2}\right)^2}=\frac{e\sqrt{5}}{2}$,

a odatle slijedi $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$

te $\sin 2\alpha=\frac{4}{5}$. 1 bod

Slijedi $e=20\sin 2\alpha=20\cdot\frac{4}{5}=16$, $f=32$. 1 bod

Površina romba jednaka je $P=\frac{e\cdot f}{2}=\frac{16\cdot 32}{2}=256$. 1 bod

Zadatak B-3.5.

Marko se pokušava prisjetiti jedne od svojih lozinki. Zapamtio je da se radi o peteroznamenkastom broju s različitim znamenkama kojemu se prva i zadnja znamenka razlikuju za 4, a niz od preostale tri znamenke u sredini tvori dvoznamenkasti ili troznamenkasti broj djeljiv s 5. Ako bi Marko krenuo ispisivati sve takve brojeve, koliko bi najviše brojeva mogao ispisati da dođe do svoje lozinke? Prva znamenka lozinke nije nula.

Prvo rješenje.

Tražimo ukupan broj peteroznamenkastih brojeva $\overline{xabcy}$ koji imaju tražena svojstva (pritom su $x,y,a,b,c\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ i $x\neq 0$).

Jedanaest je različitih mogućnosti za odabir prve i zadnje znamenke:

$(x,y)\in\{(1,5),(5,1),(4,0),(5,9),(9,5),(2,6),(6,2),(3,7),(7,3),(4,8),(8,4)\}$. 1 bod

Ako je $\overline{abc}$ dvoznamenkasti ili troznamenkasti broj djeljiv s 5, $c\in\{0,5\}$. 1 bod

S obzirom da su sve znamenke danog broja različite, možemo razlikovati dva slučaja.

1° Barem je jedna od prve ili zadnje znamenke jednaka 0 ili 5.
Tada je četvrta znamenka c jednoznačno određena pa je
$(x, y, c) \in \{(1,5,0),(5,1,0),(4,0,5),(5,9,0),(9,5,0)\}$. 1 bod
Za svaki od ovih pet odabira znamenaka x, y, c imamo 7 načina da odaberemo drugu znamenku a (ne mogu biti već odabrane x, y, c), te 6 načina da odaberemo treću znamenku b. To je ukupno $5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$ različitih peteroznamenkastih brojeva. 1 bod

2° Prva i zadnja znamenka su različite od 0 i 5.
Tada je $(x, y) \in \{(2,6),(6,2),(3,7),(7,3),(4,8),(8,4)\}$.
Znamenku c možemo odabrati na dva načina (0 ili 5), znamenku a na 7 načina i znamenku b na 6 načina, što je ukupno $6 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6 = 504$ različitih peteroznamenkastih brojeva. 1 bod

Ukupno imamo $210 + 504 = 714$ načina odabira peteroznamenkastih brojeva s traženim svojstvom. 1 bod

Drugo rješenje.

Neka je $\overline{xabcy}$, gdje su $x, y, a, b, c, \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $x \neq 0$, traženi peteroznamenkasti broj.

Prema uvjetima zadatka, znamenke x, y, c, odnosno prva, zadnja i četvrta znamenka mogu biti jedna od sljedećih 17 mogućnosti:

$$\begin{aligned}(x, y, c) \in \{\,&(1,5,0),(5,1,0),(4,0,5),(5,9,0),(9,5,0),\\ &(2,6,0),(2,6,5),(6,2,0),(6,2,5),(3,7,0),(3,7,5),\\ &(7,3,0),(7,3,5),(4,8,0),(4,8,5),(8,4,0),(8,4,5)\,\}\end{aligned}$$ 3 boda

Za svaki od ovih odabira znamenki x, y, c, znamenku a možemo odabrati na 7 načina, a znamenku b na 6 načina. 2 boda

Tada je ukupno $17 \cdot 7 \cdot 6 = 714$ peteroznamenkastih brojeva s traženim svojstvom. 1 bod

Zadatak B-3.6.

Prirodan broj n ima ukupno 6 djelitelja od kojih su točno dva prosti brojevi. Odredite broj n ako je zbroj svih njegovih djelitelja jednak 248.

Rješenje.

(Ako je broj n oblika $n = p \cdot q$ pri čemu su p i q prosti brojevi, tada broj n ima točno 4 djelitelja. To su brojevi 1, p, q, pq.)

Broj n je oblika $p^2 \cdot q$ a djelitelji su mu 1, p, p^2, q, pq, p^2q. 2 boda

Kako je zbroj svih djelitelja broja n jednak 248, vrijedi

$$1 + p + p^2 + q + pq + p^2q = 248.$$

Slijedi

$$q(1 + p + p^2) + (1 + p + p^2) = 248$$

$$(1 + p + p^2)(q + 1) = 248$$ 2 boda

$$(1 + p + p^2)(q + 1) = 2^3 \cdot 31$$ 1 bod

Kako je broj $1 + p + p^2 = 1 + p(p + 1)$ neparan broj, mora biti $1 + p + p^2 = 31$ pa je $q + 1 = 8$. 2 boda

Dakle $q = 7$, a iz $p^2 + p + 1 = 31$ dobivamo $p = 5$ (negativno rješenje $p = -6$ odbacujemo). 2 boda

Dakle, $n = 5^2 \cdot 7 = 175$. 1 bod

Zadatak B-3.7.

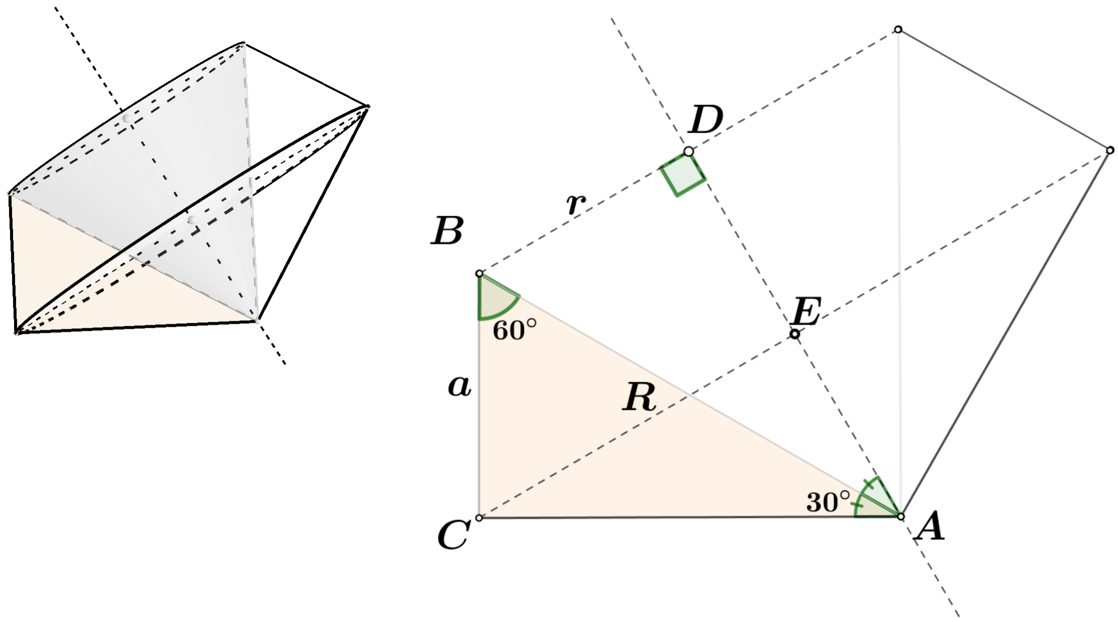
Pravokutni trokut ABC, s katetom $|BC| = 10$ i nasuprotnim kutom $\alpha = 30°$, rotira oko pravca p koji prolazi vrhom A tako da s pravcem AB zatvara kut od $30°$ ($C \notin p$). Koliki je obujam tako nastalog rotacijskog tijela?

Rješenje.

Rotacijom nastaje tijelo koje se sastoji od stošca S_1 i krnjeg stošca sa zajedničkom (većom) bazom, a bez stošca S_2 koji ima zajedničku manju bazu s krnjim stošcem.

Skica ili opis 1 bod

Obujam nastalog tijela izračunat ćemo tako da zbrojimo obujam stošca S_1 i obujam krnjeg stošca te od toga oduzmemo obujam stošca S_2.



Uočimo sukladne trokute: $\triangle ABC \cong \triangle ABD$ (KSK - imaju sukladne kutove i zajedničku stranicu $\overline{AB}$). 1 bod

Duljine stranica trokuta ABC su:

$$a = |BC| = 10, \quad b = |AC| = a \operatorname{ctg} 30° = 10\sqrt{3}, \quad c = |AB| = \frac{a}{\sin 30°} = 20.$$ 1 bod

Polumjer manje baze krnjeg stošca je $r = a = 10$. 1 bod

Iz trokuta ACE računamo polumjer veće baze krnjeg stošca:

$R = b \sin 60^\circ = 10\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 15.$ 1 bod

U istom je trokutu visina stošca S_1 jednaka $v_1 = |AE| = b \cos 60^\circ = 5\sqrt{3}.$ 1 bod

Visina stošca S_2 jednaka je $v_2 = |AD| = b = 10\sqrt{3}.$ 1 bod

Visina krnjeg stošca jednaka je $v = v_2 - v_1 = 5\sqrt{3}.$ 1 bod

Izračunajmo traženi obujam.

$$V = \frac{1}{3}R^2\pi v_1 + \frac{1}{3}\pi v(R^2 + Rr + r^2) - \frac{1}{3}r^2\pi v_2$$ 1 bod

$$= \frac{1}{3}\pi(1125\sqrt{3} + 2375\sqrt{3} - 1000\sqrt{3}) = \frac{2500\pi\sqrt{3}}{3}.$$ 1 bod

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

28. veljače 2018.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-4.1.

Ako u svakom članu razvoja binoma $(x-y)^n$, $n \geqslant 2$, $x, y \neq 0$, stavimo $x = 672y$, zbroj trećeg i četvrtog člana bit će jednak 0. Odredite 2018. član po redu u razvoju tog binoma.

Rješenje.

Zbroj trećeg i četvrtog člana u razvoju binoma jednak je

$$\binom{n}{2} x^{n-2}(-y)^2 + \binom{n}{3} x^{n-3}(-y)^3 = 0.$$ 1 bod

$$\frac{1}{2} n(n-1) \cdot (672y)^{n-2} y^2 - \frac{1}{6} n(n-1)(n-2) \cdot (672y)^{n-3} y^3 = 0.$$ 1 bod

Kako je $n \geqslant 2$, posljednju jednakost možemo podijeliti s $\frac{1}{2}n(n-1)$. Dobivamo

$$(672y)^{n-2} y^2 - \frac{1}{3}(n-2) \cdot (672y)^{n-3} y^3 = 0$$

$$672^{n-2} y^n - \frac{1}{3}(n-2) \cdot 672^{n-3} y^n = 0$$ 1 bod

$$672^{n-3} y^n \left(672 - \frac{n-2}{3}\right) = 0.$$ 1 bod

Budući da je $y \neq 0$, mora biti $672 - \frac{n-2}{3} = 0$ odnosno $n = 672 \cdot 3 + 2 = 2018$. To znači da je 2018. član po redu u razvoju danog binoma jednak 1 bod

$$\binom{2018}{2017} x^1 (-y)^{2017} = 2018 \cdot 672y \cdot (-y)^{2017} = -1356096 y^{2018}.$$ 1 bod

Napomena: Rezultat priznati u bilo kojem od tih zapisa.

Zadatak B-4.2.

Odredite $n \in \mathbb{N}$ tako da polinom $P(x) = (2x^2+1)^{n+1} - (3x+15)^{2n}$ bude djeljiv polinomom $Q(x) = x + 2$. Odredite u tom slučaju sve nultočke polinoma P koje nisu realne.

Rješenje.

Polinom P je djeljiv s $x+2$ ako i samo ako je $P(-2)=0$. 1 bod

Vrijedi $P(-2)=9^{n+1}-9^{2n}$ pa iz $9^{n+1}-9^{2n}=0$ slijedi $n+1=2n$ odnosno $n=1$. 2 boda

Tada je polinom P jednak

$$P(x)=(2x^2+1)^2-(3x+15)^2=\left(2x^2-3x-14\right)\left(2x^2+3x+16\right). \qquad \text{1 bod}$$

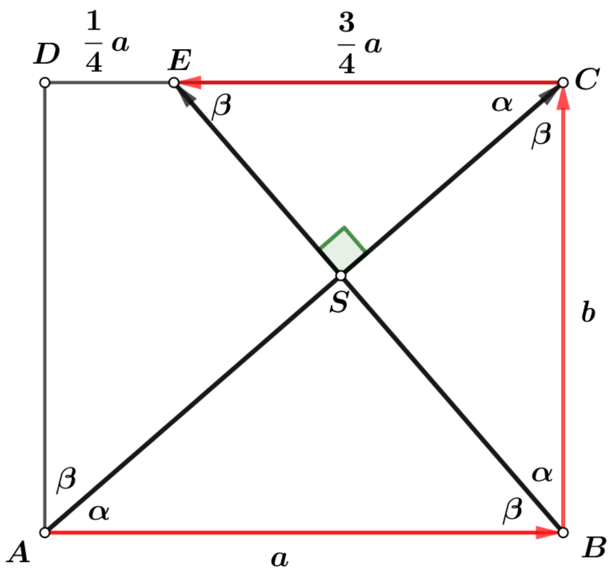
Tražene nultočke su rješenja jednadžbe $2x^2+3x+16=0$, 1 bod

a to su $x_{1,2}=\dfrac{-3\pm i\sqrt{119}}{4}$. 1 bod

Zadatak B-4.3.

U pravokutniku $ABCD$, točka E dijeli stranicu $\overline{CD}$ u omjeru $1:3$ od vrha D. Ako je pravac AC okomit na pravac BE, odredite omjer duljina stranica tog pravokutnika.

Prvo rješenje.



Zadatak ćemo riješiti koristeći vektore. Ako je pravac AC okomit na pravac BE, tada je skalarni umnožak vektora $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BE}$ jednak nula, odnosno $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BE}=0$. 1 bod

Prikažimo vektore $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BE}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ i $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{b},\\ \overrightarrow{BE}&=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\vec{b}-\frac{3}{4}\vec{a}.\end{aligned} \qquad \text{2 boda}$$

Sada uvjet $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BE}=0$ prelazi u:

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{b}-\frac{3}{4}\vec{a}\right)=0$$

odnosno

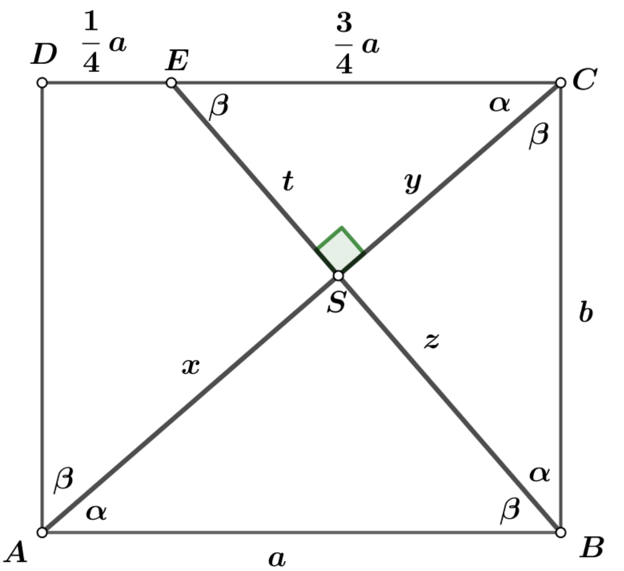
$$\vec{a}\vec{b} - \frac{3}{4}(\vec{a})^2 + (\vec{b})^2 - \vec{b} \cdot \frac{3}{4}\vec{a} = 0. \qquad \text{1 bod}$$

Vektori $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ su okomiti, pa je $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Zbog toga i zbog $(\vec{a})^2 = |\vec{a}|^2 = |AB|^2 = a^2$, $(\vec{b})^2 = |\vec{b}|^2 = |BC|^2 = b^2$ slijedi

$$0 - \frac{3}{4}a^2 + b^2 - 0 = 0, \qquad \text{1 bod}$$

odnosno $b^2 = \frac{3}{4}a^2$ odakle dobivamo $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (ili $\frac{a}{b} = \frac{2}{\sqrt{3}}$). 1 bod

Drugo rješenje.



Uz oznake kao na slici uočimo sličnost trokuta ASB i CSE. To su pravokutni trokuti s kutovima α i β pa su slični prema poučku KK. 1 bod

Tada je $\frac{x}{y} = \frac{a}{\frac{3}{4}a}$ odnosno $x = \frac{4}{3}y$.

Analogno dobivamo i $z = \frac{4}{3}t$ 1 bod

Primjenom Pitagorinog poučka na trokute ABC, BCE i uvrštavanjem $x = \frac{4}{3}y$ i $z = \frac{4}{3}t$ dobivamo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{3}y + y\right)^2 = a^2 + b^2 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{49}{9}y^2 = a^2 + b^2 \\ \left(\frac{4}{3}t + t\right)^2 = \frac{9}{16}a^2 + b^2 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{49}{9}t^2 = \frac{9}{16}a^2 + b^2 \end{aligned} \qquad \text{1 bod}$$

Zbrajanjem ovih dviju jednakosti te primjenom Pitagorinog poučka na trokut CSE

slijedi:

$$\frac{49}{9}\left(y^2+t^2\right)=\frac{25}{16}a^2+2b^2 \qquad \text{1 bod}$$
$$\frac{49}{9}\cdot\frac{9}{16}a^2=\frac{25}{16}a^2+2b^2 \qquad \text{1 bod}$$
$$\frac{3}{2}a^2=2b^2$$

Dakle, $\frac{a}{b}=\frac{2}{\sqrt{3}}$ (ili $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$). 1 bod

Napomena: Učenik može na različite načine koristiti Pitagorin poučak i sličnost da dođe do omjera. U tom je slučaju bodovanje sljedeće:

– uočavanje sličnosti pravokutnih trokuta 1 bod
– određivanje koeficijenta sličnosti 1 bod
– primjena Pitagorinog poučka na najmanje tri pravokutna trokuta 2 boda
(ako učenik nije došao do rješenja, a ima primjenu samo na 1 ili 2 trokuta ovdje dobiva samo 1 bod)
– korištenje sličnosti 1 bod
– sređivanje izraza do traženog omjera 1 bod

Zadatak B-4.4.

Niz je zadan rekurzivnom formulom

$$x_1=1,\ x_{n+1}=x_n+2n+1,\ n\geqslant 1.$$

Odredite x_{2018}.

Prvo rješenje.

Zapišimo prvih n članova niza.

$$\begin{aligned}x_1&=1\\x_2&=x_1+2\cdot 1+1\\x_3&=x_2+2\cdot 2+1\\&\dots\\x_n&=x_{n-1}+2\cdot(n-1)+1\end{aligned} \qquad \text{1 bod}$$

Zbrajanjem gornjih jednakosti imamo:

$$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+2\cdot(1+2+\cdots+(n-1))+n\cdot 1 \qquad \text{2 boda}$$

Slijedi $x_n=2\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2}+n$ 1 bod

odnosno $x_n=n^2$. 1 bod

Traženi član iznosi: $x_{2018}=2018^2$. 1 bod

Drugo rješenje.

Izračunajmo prvih nekoliko članova niza:

$$\begin{aligned}
&x_1 = 1\\
&x_2 = x_1 + 2\cdot 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 4\\
&x_3 = x_2 + 2\cdot 2 + 1 = 4 + 4 + 1 = 9\\
&x_4 = x_3 + 2\cdot 3 + 1 = 9 + 6 + 1 = 16\\
&\ldots
\end{aligned}$$

1 bod

Tvrdimo da vrijedi $x_n = n^2$, za sve $n \in \mathbb{N}$. 1 bod

Dokažimo ovu tvrdnju matematičkom indukcijom:

Provjerimo tvrdnju za $n = 1$. $x_1 = 1 = 1^2$ 1 bod

Pretpostavimo da je tvrdnja $x_n = n^2$ istinita za neki $n \in \mathbb{N}$. 1 bod

Dokažimo da tada tvrdnja vrijedi i za sljedeći prirodan broj, to jest da je $x_{n+1} = (n+1)^2$.

Iz same je definicije niza $x_{n+1} = x_n + 2n + 1$, a kako je zbog pretpostavke indukcije $x_n = n^2$, slijedi $x_{n+1} = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ što smo i trebali dobiti. 1 bod

Traženi član iznosi: $x_{2018} = 2018^2$. 1 bod

Napomena: Učenik koji dođe do konačnog rezultata, a nije dokazao formulu za opći član niza dobiva 3 boda.

Zadatak B-4.5.

Neka su

$$A = \left\{(x, y) \mid \log(1 + x^2 + y^2) \leqslant 1 + \log(x + y)\right\}$$

i

$$B = \left\{(x, y) \mid \log(2 + x^2 + y^2) \leqslant 2 + \log(x + y)\right\}$$

skupovi točaka u ravnini. U kojem su omjeru površina skupa B i površina skupa A?

Rješenje.

Primijenimo svojstva logaritma na zadane nejednakosti kako bismo odredili skupove A i B.

$$\begin{aligned}
&\log(1 + x^2 + y^2) \leqslant 1 + \log(x + y)\\
\Leftrightarrow\ &\log(1 + x^2 + y^2) \leqslant log(10(x + y)) && \text{1 bod}\\
\Leftrightarrow\ &1 + x^2 + y^2 \leqslant 10(x + y)\\
\Leftrightarrow\ &x^2 + y^2 - 10x - 10y + 1 \leqslant 0\\
\Leftrightarrow\ &(x - 5)^2 + (y - 5)^2 \leqslant 49. && \text{1 bod}
\end{aligned}$$

Analogno,

$$\begin{aligned}
&\log(2 + x^2 + y^2) \leqslant 2 + \log(x + y)\\
\Leftrightarrow\ &2 + x^2 + y^2 \leqslant 100(x + y)\\
\Leftrightarrow\ &(x - 50)^2 + (y - 50)^2 \leqslant 4998. && \text{1 bod}
\end{aligned}$$

Zaključujemo da su skupovi A i B krugovi s pripadnim kružnicama. Središte i polumjer kruga A je $S_1(5,5)$, $r_1 = 7$, a središte i polumjer kruga B je $S_2(0,50)$, $r_2 = \sqrt{4998}$. 1 bod

Za koordinate točaka (x,y) iz oba skupa mora biti ispunjen uvjet $x+y>0$ (zbog logaritma), odnosno sve se točke skupova A i B trebaju nalaziti iznad pravca $y=-x$. Ovo je očito ispunjeno za sve (x,y). 1 bod

Stoga je traženi omjer jednak $\dfrac{4998\pi}{49\pi} = 102$. 1 bod

Zadatak B-4.6.

Odredite sve četveroznamenkaste prirodne brojeve koji su za 1949 veći od zbroja kvadrata svojih znamenaka.

Rješenje.

Neka je traženi broj $x = \overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$ gdje su a, b, c i d znamenke, odnosno $a,b,c,d \in \{0,1,2,\ldots,9\}$ i $a \neq 0$. Tada vrijedi

$$1000a + 100b + 10c + d = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 1949.$$ 1 bod

Zbroj kvadrata $a^2+b^2+c^2+d^2$ može biti najviše $4\cdot 81 = 324$. Stoga je $x \leqslant 324+1949 = 2273$ pa znamenka a može biti samo 1 ili 2. 1 bod

Ako je $a=1$ onda iz $1000a + 100b + 10c + d = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 1949$ slijedi

$$100b + 10c + d = b^2 + c^2 + d^2 + 950.$$

Kako je na desnoj strani broj veći od 950 ova jednakost nije moguća za $b<9$. 1 bod

No u slučaju $b=9$ ne postoje znamenke c i d za koje bi vrijedila jednakost $10c+d = 131+c^2+d^2$ (jer je na lijevoj strani dvoznamenkasti broj, a na desnoj troznamenkasti).

Zato mora biti $a=2$. 1 bod

Tada je $2000 + 100b + 10c + d = 1949 + 4 + b^2 + c^2 + d^2$, odnosno

$$100b + 10c + d + 47 = b^2 + c^2 + d^2 \qquad (*)$$

Kako je $b^2+c^2+d^2 \leqslant 3\cdot 81 = 243$, prethodna je jednakost moguća samo za $b \in \{0,1,2\}$. 1 bod

1° $b=2$

Iz (*) slijedi $200 + 10c + d + 47 = 4 + c^2 + d^2$ odnosno $10c + d + 243 = c^2 + d^2$.

Kako je $c^2 + d^2 \leqslant 2\cdot 81 = 162$ slijedi da je lijeva strana veća od 243, a desna manja od 162, što je nemoguće, pa je $b \neq 2$. 1 bod

2° $b=1$

Iz (*) slijedi $100 + 10c + d + 47 = 1 + c^2 + d^2$ odnosno $10c + d = c^2 + d^2 - 146$.

Na lijevoj strani je dvoznamenkasti broj pa slijedi $c^2 + d^2 \geqslant 146$, što je moguće samo ako je $c=d=9$. Direktnom provjerom dobivamo da ni u tom slučaju prethodna jednakost ne vrijedi pa je $b \neq 1$. 1 bod

3° $b = 0$

Iz (*) slijedi

$$10c + d + 47 = c^2 + d^2. \qquad (**)$$

U ovu jednakost možemo redom uvrstiti $c = 0$, $c = 1, \ldots, c = 9$ ili uočiti da c mora biti neparan broj pa uvrstiti samo neparne znamenke. 1 bod

Radi jednostavnije provjere jednakost (**) možemo pisati u obliku

$$d(d-1) = 47 + 10c - c^2 = 72 - (c-5)^2.$$

Sada tražimo sve brojeve c, za koje je broj na desnoj strani jednak umnošku dvije uzastopne znamenke.

$c = 1$, $d(d-1) = 56 = 8 \cdot 7$

$c = 3$, $d(d-1) = 68$

$c = 5$, $d(d-1) = 72 = 9 \cdot 8$

$c = 7$, $d(d-1) = 68$

$c = 9$, $d(d-1) = 56 = 8 \cdot 7$

Dakle, rješenje zadatka su brojevi 2018, 2059 i 2098. 2 boda

Napomena: Ukoliko je učenik samo ispisivanjem nekih slučajeva pogodio 1 ili 2 rješenja dobiva 1 bod.

Napomena: Za pogođena sva tri rješenja ispisivanjem nekih slučajeva, bez obrazloženja zašto su to jedina rješenja, učenik dobiva 2 boda.

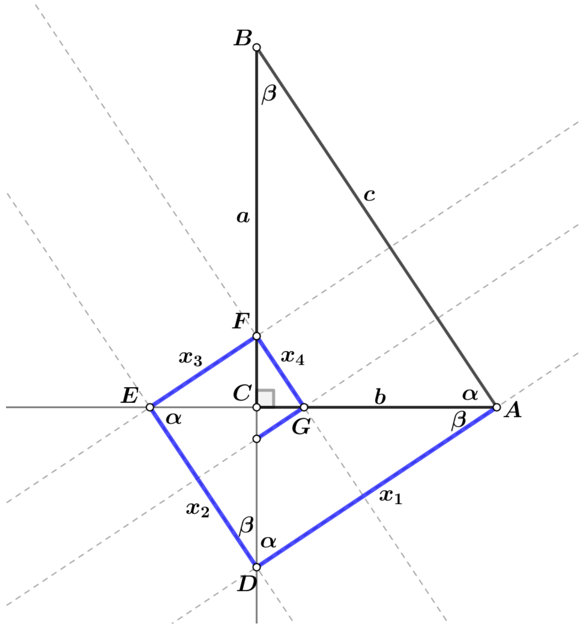
Napomena: Ukoliko je učenik zaključio da traženi broj počinje znamenkom 2 te ispisao sve takve brojeve i provjerom došao do točnog rješenja, dati sve bodove.

Napomena: Inače je bodovanje sljedeće:
– zapis $1000a + 100b + 10c + d = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 1949$ 1 bod
– zaključak $a \in \{1, 2\}$ 1 bod
– provjera za $a = 1$ i zaključak da je $a = 2$ 2 boda
– zaključak da je $b = 0$, bilo provjerom svih 10 znamenaka ili odbacivanjem nekih mogućnosti 3 boda
(podjela na slučajeve 1 bod, odbacivanje slučajeva i argumentiranje 2 boda)
–određivanje znamenki c, d, odnosno konačnog rješenja (rapisivanje + provjera ili kao u ponuđenom rješenju ograničavanje + provjera nekih slučajeva) 3 boda

Zadatak B-4.7.

U pravokutnom trokutu ABC duljina hipotenuze $\overline{AB}$ jednaka je c, a pri vrhu A je veći šiljasti kut mjere α. Okomica na hipotenuzu u točki A siječe pravac BC u točki D. Okomica u točki D, na prethodno povučenu okomicu AD, siječe pravac AC u točki E. U dobivenoj točki E opet povučemo okomicu na prethodnu okomicu DE, a njeno sjecište s pravcem DC označimo s F. Nastavimo li opisanim postupkom povlačiti „okomicu na okomicu" dobit ćemo niz dužina $\overline{AD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, ... Odredite zbroj njihovih duljina.

Rješenje.



1 bod

Označimo duljine dobivenih dužina redom

$$x_1 = |AD|, \quad x_2 = |DE|, \quad x_3 = |EF|, \quad \ldots$$

U trokutu ACD je kut pri vrhu D jednak α (kutovi s okomitim kracima), u trokutu CDE kut pri vrhu E također je jednak α, ... 1 bod

Sve dobivene dužine su hipotenuze u tim pravokutnim trokutima.

Slijedi $\sin\alpha = \dfrac{b}{x_1} = \dfrac{|CD|}{x_2}$ pa je $x_2 = \dfrac{x_1 \cdot |CD|}{b}$. 1 bod

S druge strane je $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{b}{|CD|}$ pa je $|CD| = \dfrac{b}{\operatorname{tg}\alpha}$. 1 bod

Znači da je $x_2 = \dfrac{x_1}{\operatorname{tg}\alpha}$ i analogno $x_3 = \dfrac{x_2}{\operatorname{tg}\alpha}, \ldots$ 1 bod

Duljine nacrtanih dužina čine geometrijski niz s količnikom $\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$. 1 bod

Kako je α veći od dva šiljasta kuta u pravokutnom trokutu, vrijedi $\alpha > 45°$ pa je $\operatorname{tg}\alpha > 1$ i $\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha} < 1$. 2 boda

Traženi zbroj duljina svih promatranih dužina jednak je

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots = \frac{x_1}{1 - \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}$$ 1 bod

$$= \frac{x_1 \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - 1} = \frac{\frac{b}{\sin\alpha} \cdot \frac{a}{b}}{\operatorname{tg}\alpha - 1} = \frac{c}{\operatorname{tg}\alpha - 1}.$$ 1 bod