Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

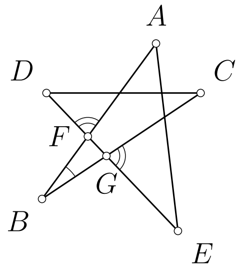
ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

17. veljače 2021.

1. Put koji povezuje mjesto A s mjestom B u prvom je dijelu ravan, a ostatak je nizbrdica. Biciklist je iz mjesta A u mjesto B stigao za 1 sat i 15 minuta. Pri povratku mu je trebalo pola sata više. Na ravnome dijelu ceste vozio je brzinom za 4 km/h većom od brzine na uzbrdici. Vozeći nizbrdo dvostruko je brži nego kad ide uzbrdo i za 50% brži nego na ravnom dijelu ceste. Kolika je udaljenost mjesta A i B?

2. Točke A, B, C, D i E povezane su dužinama kao na slici. Dužine $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ sijeku dužinu $\overline{DE}$ redom u točkama F i G. Ako je $\sphericalangle ABC = 20^\circ$ i ako je $\sphericalangle DFA = \sphericalangle CGE$, odredi $\sphericalangle EAB + \sphericalangle DEA$.



3. Svaki od trojice prijatelja popisao je svojih deset omiljenih računalnih igara. Na sva tri popisa zajedno našlo se 15 različitih igara. Uspoređujući svoje popise uočili su da svaka dvojica imaju po 6 istih igara na popisu. Koliko se igara nalazi na sva tri popisa?

4. Na ploči su napisani brojevi $1, 2, 3, \ldots, 2021$. Je li moguće brojeve brisati jednog po jednog sve dok na ploči ne ostane samo jedan broj, tako da nakon svakog brisanja zbroj svih preostalih brojeva bude složen broj?

5. Koliko ima četveroznamenkastih brojeva djeljivih s 3 čiji dekadski zapis ne sadrži znamenke 2, 4, 6 ni 9?

* * *

6. U koordinatnom sustavu u ravnini dana su dva pravca koja se sijeku pod pravim kutom u točki $A(6, 8)$. Sjecišta P i Q tih pravaca s osi y su simetrična u odnosu na ishodište. Odredi površinu trokuta APQ.

7. Odredi sve prirodne brojeve n za koje su među brojevima n, $4^n + 1$ i $n^2 + 2$ barem dva prosta broja.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

17. veljače 2021.

1. Odredi sve prirodne brojeve n i proste brojeve p takve da je

$$6n^2 - (2p+9)n + p + 3 = 0.$$

2. Zapisan je 2021-znamenkasti broj. Svaki dvoznamenkasti broj koji čine dvije uzastopne znamenke tog broja (bez promjene poretka) djeljiv je sa 17 ili s 23. Znamenka jedinica danog broja je 7. Koja je njegova prva znamenka?

3. Dana je žica duljine $10\,\mathrm{m}$ koju treba presjeći na dva dijela, te od jednog dijela napraviti kvadrat, a od drugog jednakostranični trokut. Na kojem mjestu treba presjeći žicu da bi ukupna površina kvadrata i jednakostraničnog trokuta bila što manja?

4. U svako polje tablice 10×10 upisan je po jedan prirodni broj, a svih 20 zbrojeva brojeva u njezinim retcima i stupcima međusobno su različiti. Koliko iznosi najmanji mogući zbroj svih brojeva u tako popunjenoj tablici?

5. Odredi sve parove $\{a, b\}$ različitih realnih brojeva takve da jednadžbe

$$x^2 + ax + b = 0 \qquad \text{i} \qquad x^2 + bx + a = 0$$

imaju barem jedno zajedničko rješenje u skupu realnih brojeva.

* * *

6. Neka je $ABCD$ pravokutnik u kojem je $|AB| = 1$ i $|BC| = \sqrt{3}$. Upisane kružnice trokuta ABC i ACD diraju dužinu $\overline{AC}$ u točkama M i N. Odredi $|MN|$.

7. Odredi pozitivne racionalne brojeve x i y za koje su $x + \dfrac{1}{y}$ i $y + \dfrac{1}{x}$ prirodni brojevi.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

17. veljače 2021.

1. Ako je $2\sin x - 3\cos y = a$ i $2\cos x + 3\sin y = b$, koliko je $\sin(x-y)$?

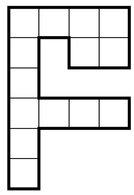
2. Ako za pozitivne realne brojeve x, y i z vrijedi

$$4^{x+y} = z, \qquad z^{1/x} \cdot z^{1/y} = 1024,$$

odredi vrijednost izraza $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$.

3. Sve točke prostora čija udaljenost od dužine $\overline{AB}$ iznosi najviše 3 čine tijelo obujma 216π. Odredi duljinu dužine $\overline{AB}$.

4. Polja ploče dimenzija 300×300 iste su veličine kao i 14 kvadratića od kojih se sastoji lik prikazan na slici. Koliko je najviše takvih likova moguće postaviti na tu ploču bez preklapanja? Likove se može rotirati i prevrtati.



5. Koliko ima četveroznamenkastih brojeva djeljivih sa 7 čiji dekadski zapis ne sadrži znamenke 1, 2 ni 7?

* * *

6. Točka M je polovište stranice $\overline{AB}$, a T težište trokuta ABC. Ako je AMT jednakostraničan trokut stranice duljine 1, odredi duljine stranica trokuta ABC.

7. Odredi sve parove (a, b) prirodnih brojeva za koje vrijedi

$$a^b - b^a + 2^a = 17a^4 - 2b^2 + 52.$$

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

17. veljače 2021.

1. Odredi sve kompleksne brojeve z koji zadovoljavaju jednakosti

$$|z+1| = 1 \qquad \text{i} \qquad |z^2+1| = 1.$$

2. Gumena lopta bačena je s visine od 200 metara. Svaki put nakon što se odbije od površine, dosegne 4/5 prethodne visine: nakon prvog odbijanja popne se na 160 metara, nakon drugog odbijanja na 128 metara, itd. Koliko iznosi ukupna udaljenost koju lopta prijeđe dok se ne zaustavi?

3. Zadana je elipsa s jednadžbom $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ i hiperbola kojoj su žarišta u glavnim tjemenima te elipse, a tjemena u žarištima elipse. Odredi sjecišta hiperbole i elipse.

4. Rekurzivno je zadan niz:

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 3,$$
$$a_n = (n+1)a_{n-1} - na_{n-2} \quad \text{za } n \geqslant 3.$$

Odredi sve prirodne brojeve n za koje je a_n djeljivo s 9.

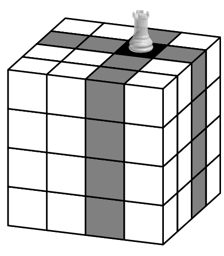
5. Odredi posljednje tri znamenke broja 21^{2021}.

* * *

6. Svaki član niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitivnih realnih brojeva, počevši od drugog, jednak je aritmetičkoj sredini geometrijske i aritmetičke sredine dvaju njemu susjednih članova.

Ako je $a_1 = \dfrac{1}{505}$ i $a_{505} = 505$, odredi a_{1010}.

7. *Figura* postavljena na oplošje kocke K_n dimenzija $n\times n\times n$ na strani na kojoj se nalazi napada sva polja u retku i stupcu u kojima se nalazi, poput šahovskog topa, ali i polja na ostalim stranama u produžetcima tih redaka/stupaca. (Na slici su označena vidljiva polja na kocki K_4 koja postavljena figura napada.)



Koliko najviše figura možemo postaviti na oplošje kocke K_{50} tako da se međusobno ne napadaju?

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.