ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

17. veljače 2021.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-1.1.

Put koji povezuje mjesto A s mjestom B u prvom je dijelu ravan, a ostatak je nizbrdica. Biciklist je iz mjesta A u mjesto B stigao za 1 sat i 15 minuta. Pri povratku mu je trebalo pola sata više. Na ravnome dijelu ceste vozio je brzinom za 4 km/h većom od brzine na uzbrdici. Vozeći nizbrdo dvostruko je brži nego kad ide uzbrdo i za 50% brži nego na ravnom dijelu ceste. Kolika je udaljenost mjesta A i B?

Prvo rješenje.

Neka je v brzina na uzbrdici. Tada je brzina na nizbrdici $2v$, a na ravnome dijelu $v+4$. 1 bod

Također vrijedi i $2v = 1.5\,(v+4)$. 1 bod

Iz gornje jednadžbe slijedi da je $v = 12$. To znači da je brzina na uzbrdici 12 km/h, brzina na nizbrdici je 24 km/h, a na ravnome dijelu ceste 16 km/h. 1 bod

Ako sa s_1 i s_2 označimo duljinu ravnog dijela ceste i duljinu nizbrdice na putu od mjesta A do mjesta B, vrijedi

$$\frac{s_1}{16} + \frac{s_2}{24} = 1.25$$
$$\frac{s_1}{16} + \frac{s_2}{12} = 1.75.$$ 1 bod

Zbrajanjem gornjih jednakosti redom dobivamo

$$\frac{s_1}{16} + \frac{s_1}{16} + \frac{s_2}{12} + \frac{s_2}{24} = 3,$$ 1 bod
$$s_1\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) + s_2\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{24}\right) = 3,$$
$$\frac{1}{8}\,(s_1 + s_2) = 3,$$
$$s_1 + s_2 = 24.$$ 1 bod

Udaljenost mjesta A i B je 24 km.

Drugo rješenje.

Brzine na uzbrdici, nizbrdici i ravnom dijelu izračunamo kao u prvom rješenju. 3 boda

Razlika od pola sata u putovanjima dolazi iz razloga što je biciklist u jednom smjeru dijelom puta išao uzbrdo, a u drugom nizrbrdo.

Budući da je brzina kojom je biciklist vozio nizbrdo dvostruko veća od brzine kojom je vozio uzbrdo, slijedi da je vrijeme koje mu je trebalo da prijeđe nizbrdicu dvostruko manje od vremena koje mu je trebalo da prijeđe uzbrdicu. Budući da je razlika tih vremena pola sata, slijedi da se biciklist nizbrdo spuštao pola sata, a uzbrdo penjao puni sat. 1 bod

Iz toga zaključujemo da je na ravnom dijelu biciklist (u svakom smjeru) proveo 45 minuta. 1 bod

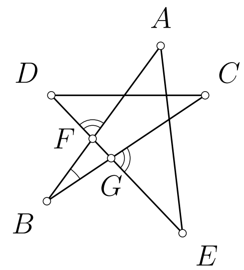
Duljina ravnog dijela je $\frac{3}{4}\,\mathrm{h} \cdot 16\,\mathrm{km/h} = 12\,\mathrm{km}$, a uzbrdice $1\,\mathrm{h} \cdot 12\,\mathrm{km/h} = 12\,\mathrm{km}$, pa je ukupna udaljenost mjesta A i B jednaka $24\,\mathrm{km}$. 1 bod

Napomena: Izračun brzina na svim dijelovima ceste vrijedi 3 boda, a preostali račun vrijedi 3 boda.

U prvom rješenju moguće je riješiti sustav za s_1 i s_2 te dobiti rješenje $s_1 = s_2 = 12$. Taj račun mijenja zadnja 2 boda u prvom rješenju.

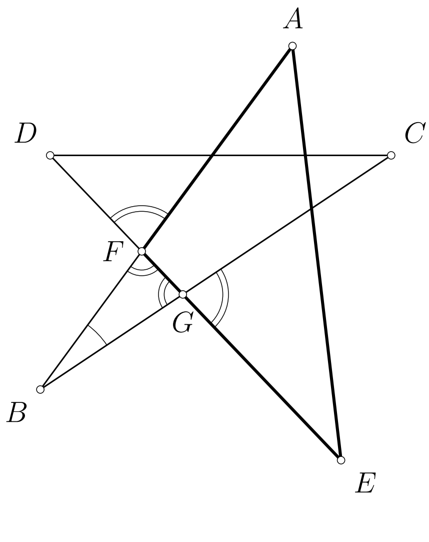
Zadatak A-1.2.

Točke A, B, C, D i E povezane su dužinama kao na slici. Dužine $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ sijeku dužinu $\overline{DE}$ redom u točkama F i G. Ako je $\sphericalangle ABC = 20°$ i ako je $\sphericalangle DFA = \sphericalangle CGE$, odredi $\sphericalangle EAB + \sphericalangle DEA$.



Rješenje.

Neka je $\varphi = \sphericalangle DFA = \sphericalangle CGE$.



Kutovi $\sphericalangle BFG$ i $\sphericalangle DFA$ su vršni, pa je $\sphericalangle BFG = \sphericalangle DFA = \varphi$. Isto tako, $\sphericalangle BGF$ i $\sphericalangle CGE$ su vršni kutovi, pa je $\sphericalangle BGF = \sphericalangle CGE = \varphi$. 1 bod

Zbroj veličina kutova u trokutu BFG je $180°$, pa vrijedi

$$180° = \sphericalangle GBF + \sphericalangle BFG + \sphericalangle BGF = \sphericalangle ABC + 2\varphi = 20° + 2\varphi,$$ 2 boda

odakle zaključujemo da je $\varphi = 80°$. 1 bod

Kutovi $\sphericalangle DFA$ i $\sphericalangle EFA$ su suplementarni, pa zato vrijedi $\sphericalangle EFA = 180° - \varphi$. 1 bod

Konačno, traženi zbroj veličina kutova upravo je zbroj veličina dva preostala kuta u trokutu AFE:

$$\sphericalangle EAB + \sphericalangle DEA = \sphericalangle EAF + \sphericalangle FEA = 180° - \sphericalangle EFA = \varphi = 80°.$$ 1 bod

Zadatak A-1.3.

Svaki od trojice prijatelja popisao je svojih deset omiljenih računalnih igara. Na sva tri popisa zajedno našlo se 15 različitih igara. Uspoređujući svoje popise uočili su da svaka dvojica imaju po 6 istih igara na popisu. Koliko se igara nalazi na sva tri popisa?

Prvo rješenje.

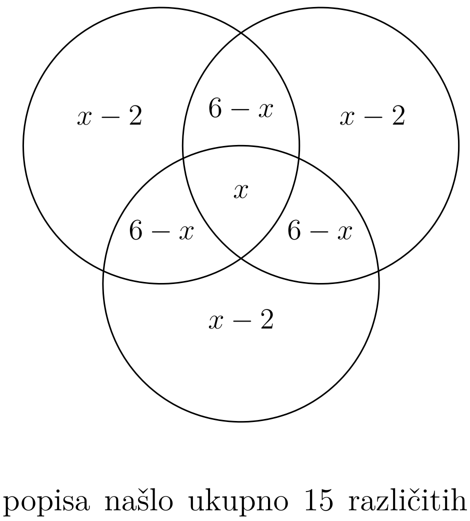
Označimo s x broj igara koje se nalaze na sva tri popisa.

Tada za svaku dvojicu prijatelja vrijedi da je broj igara koje se nalaze na njihova dva popisa, ali ne i na popisu preostalog prijatelja, jednak $6 - x$. 1 bod

Budući da svatko na popisu ima po 10 igara, broj igara koje ima na svojem popisu i ne nalaze se na drugim popisima je jednak

$$10 - x - (6 - x) - (6 - x) = x - 2.$$ 2 boda

Raspodjelu broja igara možemo prikazati dijagramom na sljedeći način:



Budući da se na sva tri popisa našlo ukupno 15 različitih igara, sa slike vidimo da vrijedi $x + 3 \cdot (6 - x) + 3 \cdot (x - 2) = 15$. 2 boda

Iz prethodne jednadžbe slijedi da je $x = 3$, odnosno na sva tri popisa su tri igre. 1 bod

Drugo rješenje.

Kao u prošlom rješenju, neka je x broj igara koje se nalaze na sva tri popisa, a $6-x$ broj igara koje svaki prijatelj ima na popisu zajedničkih s točno jednim drugim prijateljem. 1 bod

Označimo s y broj igara koje svaki prijatelj ima samo na svojem popisu.

Podatke možemo prikazati tablično:

prvi prijatelj	x	$6-x$	$6-x$		y		
drugi prijatelj	x	$6-x$		$6-x$		y	
treći prijatelj	x		$6-x$	$6-x$			y

Po retcima označavamo popise igara svakog prijatelja. Po stupcima popisujemo igre i označavamo na čijem se popisu nalazi koja igra: prvo igre koje su zajedničke svima, pa igre koje su zajedničke dvama prijateljima, i na kraju igre koje su na popisu samo jednog od prijatelja.

Na svakom popisu nalazi se po $x+2\cdot(6-x)+y=10$ igara. 1 bod

Ukupan broj igara je $x+3\cdot(6-x)+3\cdot y=15$. 2 boda

Koristeći prvu jednadžbu, izrazimo $y=x-2$ i uvrstimo u drugu. 1 bod

Dobivamo da je $x=3$. Dakle, na sva tri popisa su tri igre. 1 bod

Treće rješenje.

Kao u prošlom rješenju, neka je x broj igara koje su zajedničke svim prijateljima, a y broj igara koje su na popisu samo jednog od prijatelja.

Promotrimo popise dvojice prijatelja. Ukupan broj igara na njima je 20. Na njima je dvaput navedeno 6 igara zajedničkih obojici, te se na njima nalazi svih 15 igara osim onih y koje se nalaze samo na popisu preostalog prijatelja. Zato vrijedi

$$20-6=15-y,$$ 2 boda

odakle je $y=1$. 1 bod

Sada promotrimo igre zajedničke jednom prijatelju i svakom od preostale dvojice. Među tih 12 igara, dvaput su navedene one koje su zajedničke svoj trojici. S druge strane, to su sve igre koje se nalaze na popisu promatranog prijatelja osim onih y koje se nalaze isključivo na njegovom popisu. Zato vrijedi

$$12-x=10-y,$$ 2 boda

odakle je $x=3$. 1 bod

Dakle, na sva tri popisa su tri igre.

Zadatak A-1.4.

Na ploči su napisani brojevi $1, 2, 3, \ldots, 2021$. Je li moguće brojeve brisati jednog po jednog sve dok na ploči ne ostane samo jedan broj, tako da nakon svakog brisanja zbroj svih preostalih brojeva bude složen broj?

Rješenje.

Moguće je. 1 bod

Uočimo da je zbroj prvih n prirodnih brojeva $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ složen broj za sve $n \geqslant 3$. 1 bod

Brojeve brišemo redom od većeg prema manjem. Prvo ćemo pobrisati najveći broj 2021, a onda nastavljamo brisati sve do broja 5 (uključujući i njega). 2 boda

Preostali su brojevi 1, 2, 3 i 4. Uočimo da će uvjet zadatka biti zadovoljen ako prvo pobrišemo broj 1, nakon njega 3, pa 2 i na kraju ostane broj 4. 2 boda

Zadatak A-1.5.

Koliko ima četveroznamenkastih brojeva djeljivih s 3 čiji dekadski zapis ne sadrži znamenke 2, 4, 6 ni 9?

Rješenje.

Na raspolaganju imamo šest znamenaka: 0, 1, 3, 5, 7 i 8.

Prvu znamenku možemo odabrati na 5 načina (bilo koju znamenku osim nule). 1 bod

Drugu i treću znamenku možemo odabrati na po 6 načina. 1 bod

Neka te prve tri odabrane znamenke čine troznamenkasti broj n. Zadnju znamenku y za traženi četveroznamenkasti broj $10n + y$ možemo uvijek odabrati na točno dva načina. Naime, kako od šest znamenaka koje imamo na raspolaganju dvije daju ostatak 0, dvije ostatak 1 i dvije ostatak 2 pri dijeljenju s 3, točno dva među brojevima

$$10n + 0, \quad 10n + 1, \quad 10n + 3, \quad 10n + 5, \quad 10n + 7, \quad 10n + 8$$

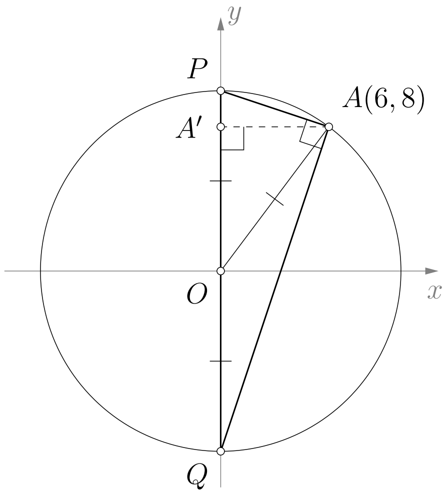
su djeljiva s 3, neovisno o broju n. 3 boda

Zato je ukupan broj takvih brojeva jednak $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 360$. 1 bod

Zadatak A-1.6.

U koordinatnom sustavu u ravnini dana su dva pravca koja se sijeku pod pravim kutom u točki $A(6, 8)$. Sjecišta P i Q tih pravaca s osi y su simetrična u odnosu na ishodište. Odredi površinu trokuta APQ.

Prvo rješenje.



Točke P i Q nalaze se na osi y i simetrične su u odnosu na ishodište, iz čega zaključujemo da su im udaljenosti od ishodišta O jednake, odnosno da je O polovište dužine $\overline{PQ}$.

Trokut PAQ je pravokutni trokut s hipotenuzom $\overline{PQ}$ jer je $\sphericalangle PAQ = 90°$. Kako u svakom pravokutnom trokutu vrijedi da je polovište hipotenuze ujedno i središte opisane kružnice, zaključujemo $|AO| = |PO| = |QO|$. 4 boda

Lako izračunamo $|AO| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$. 2 boda

Zato je

$$|PQ| = |PO| + |OQ| = 2|AO| = 20.$$ 1 bod

Duljina visine na hipotenuzu jednaka je x-koordinati točke A. 1 bod

Slijedi da je površina trokuta APQ jednaka

$$P(APQ) = \frac{20 \cdot 6}{2} = 60.$$ 2 boda

Drugo rješenje.

Točke P i Q nalaze se na osi y i simetrične su u odnosu na ishodište, pa bez smanjenja općenitosti možemo njihove koordinate označiti kao $P(0, b)$ i $Q(0, -b)$, uz $b > 0$.

Označimo s k_1 i k_2 redom koeficijente smjerova pravaca PA i QA. Tada vrijedi

$$k_1 = \frac{8-b}{6-0} \qquad \text{i} \qquad k_2 = \frac{8-(-b)}{6-0}.$$ 2 boda

Budući da se pravci PA i QA sijeku pod pravim kutom, mora vrijediti $k_1 k_2 = -1$, tj.

$$\frac{(8-b)(8+b)}{36} = -1 \qquad \Longrightarrow \qquad 100 - b^2 = 0.$$ 2 boda

Iz prethodne jednadžbe slijedi $b = \pm 10$, tj. $b = 10$ (jer je $b > 0$). 2 boda

Konačno, APQ je pravokutni trokut s hipotenuzom $\overline{PQ}$ duljine $2b = 20$. 1 bod

Površinu trokuta (koja iznosi 60) izračunamo kao u prošlom rješenju. 3 boda

Treće rješenje.

Bez smanjenja općenitosti, neka je P točka na pozitivnom dijelu osi y, a Q na negativnom dijelu osi y.

U pravokutnom trokutu APQ visina iz A na hipotenuzu $\overline{PQ}$ je duljine $v = 6$. 1 bod

Označimo s A' nožište visine iz A na $\overline{PQ}$. Označimo s p i q redom duljine $|PA'|$ i $|A'Q|$.

Prema Euklidovom poučku vrijedi $pq = v^2 = 36$. 2 boda

Kako je visina udaljena za 8 od osi x, a ishodište je polovište dužine $\overline{PQ}$, vrijedi

$$p + 8 = q - 8,$$ 2 boda

odnosno $q - p = 16$.

Iz dobivenih relacija imamo

$$(p+q)^2 = (p-q)^2 + 4pq = 16^2 + 4 \cdot 36 = 256 + 144 = 400,$$ 2 boda

odakle je $p + q = 20$. 1 bod

Površinu trokuta APQ računamo koristeći formulu

$$P(APQ) = \frac{|PQ| \cdot |AA'|}{2} = \frac{(p+q)v}{2}$$

i dobivamo da iznosi 60. 2 boda

Napomena: U trećem rješenju moguće je riješiti sustav za p i q (iz jednadžbi $pq = 36$, $q - p = 16$) i dobiti vrijednosti $p = 2$ i $q = 18$. Taj račun mijenja račun za $(p+q)^2$ i vrijedi 2 boda.

Svaki račun za površinu trokuta ukupno vrijedi 3 boda. U svim prikazanim rješenjima ta tri boda rastavljena su na pronalazak duljine visine (1 bod) te primjenu formule za površinu trokuta (2 boda).

Površinu trokuta možemo izračunati na više načina. Primjerice, kada odredimo pozicije točaka P i Q kao u prvom rješenju, možemo izračunati duljine kateta $|AP|$ i $|AQ|$ (koje iznose $2\sqrt{10}$ i $6\sqrt{10}$), pa iskoristiti formulu $P = ab/2$ za površinu pravokutnog trokuta. Račun duljine svake katete nosi 1 bod, a primjena formule za površinu još 1 bod.

Zadatak A-1.7.

Odredi sve prirodne brojeve n za koje su među brojevima n, $4^n + 1$ i $n^2 + 2$ barem dva prosta broja.

Rješenje.

Uočimo prvo da broj $4^n + 1$ može biti prost samo ako je $n = 1$ ili ako je n paran. 1 bod

Naime, za vrijednosti $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ izraz 4^n daje ostatke $4, 1, 4, 1, \ldots$ pri dijeljenju s 5. Dakle, kada je n neparan, broj $4^n + 1$ je djeljiv s 5, pa je i složen broj (osim za $n = 1$ kad je $4^n + 1 = 5$). 1 bod

Zatim, uočimo da broj $n^2 + 2$ paran (pa onda i složen) za sve parne n. 1 bod

Zadnje, primijetimo da ako broj n nije djeljiv s 3, da je tada oblika $n = 3k + 1$ ili $3k - 1$. Tada imamo

$$n^2 + 2 = (3k \pm 1)^2 + 2 = 9k^2 \pm 6k + 3,$$

odnosno $n^2 + 2$ je broj djeljiv s 3. 1 bod

Dakle, $n^2 + 2$ može biti prost jedino ako je n djeljiv s 3 (ili ako je $n = 1$, kada je taj izraz jednak 3). 1 bod

Sada promotrimo sve slučajeve:

1) Brojevi $4^n + 1$ i $n^2 + 2$ su istodobno prosti. Za $n = 1$ dobivamo rješenje (među tri broja iz teksta zadatka su dva prosta: 5 i 3). 1 bod

   Za $n > 1$, iz gornjih zaključaka dobivamo da broj ne smije biti niti paran niti neparan, što znači da nema više rješenja u ovom slučaju.

2) Brojevi $4^n + 1$ i n su istodobno prosti. Iz gornjih zaključaka znamo da broj ne smije biti neparan broj. Dakle, n mora biti paran i prost, za što je jedina mogućnost $n = 2$. To uistinu i jest rješenje (među tri broja su dva prosta: 2 i 17). 2 boda

3) Brojevi $n^2 + 2$ i n su istodobno prosti. Iz gornjih zaključaka znamo da broj mora biti djeljiv s 3. No, n je prost i djeljiv s 3 samo u slučaju $n = 3$. To uistinu i jest rješenje (među tri broja su dva prosta: 3 i 11). 2 boda

Stoga, traženi brojevi su $n = 1, 2, 3$.

Napomena: Rješenje je moguće grupirati po slučajevima na mnogo načina, no sva rješenja mora se bodovati kao gornja. Preciznije:

- tvrdnja da $4^n + 1$ ne može biti prost ako je n neparan veći od 1 (ukupno 2 boda, gdje iskaz tvrdnje i dokaz vrijede po 1 bod)
- tvrdnja da $n^2 + 2$ ne može biti prost ako je n paran (1 bod)
- tvrdnja da $n^2 + 2$ ne može biti prost ako n nije djeljiv s 3, ili jednak 1 (ukupno 2 boda, gdje iskaz tvrdnje i dokaz vrijede po 1 bod)
- zaključak da $n = 1$ jest rješenje (1 bod), a za $n \neq 1$ brojevi $4^n + 1$ i $n^2 + 2$ nisu istodobno prosti (0 bodova)
- zaključak da $n = 2$ jest rješenje (1 bod), a za $n \neq 2$ brojevi $4^n + 1$ i n nisu istodobno prosti (1 bod)
- zaključak da $n = 3$ jest rješenje (1 bod), a za $n \neq 3$ brojevi $n^2 + 2$ i n nisu istodobno prosti (1 bod).

Dokaz o složenosti broja $4^n + 1$ može se izvesti i faktorizacijom: ako je n neparan broj veći od 1, onda je

$$(4^n + 1) = (4 + 1)(4^{n-1} - 4^{n-2} + \cdots + 1)$$

očito složen broj.

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

17. veljače 2021.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-2.1.

Odredi sve prirodne brojeve n i proste brojeve p takve da je

$$6n^2 - (2p+9)n + p + 3 = 0.$$

Prvo rješenje.

Riješimo kvadratnu jednadžbu po n:

$$\begin{aligned} n_{1,2} &= \frac{2p+9 \pm \sqrt{(2p+9)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (p+3)}}{12} \\ &= \frac{2p+9 \pm \sqrt{(2p+3)^2}}{12} \\ &= \frac{2p+9 \pm (2p+3)}{12}, \end{aligned}$$ 1 bod

$$n_1 = \frac{4p+12}{12} = \frac{p}{3} + 1, \qquad n_2 = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$ 2 boda

Budući da je n prirodan broj, n_2 nije moguće rješenje. 1 bod

Za n_1 dobivamo uvjet da je $\frac{p}{3} + 1$ prirodan broj, a jedini prost broj djeljiv s 3 je $p = 3$. 1 bod

Jedino rješenje jednadžbe je $n = 2, p = 3$. 1 bod

Drugo rješenje.

Riješimo jednadžbu po p:

$$\begin{aligned} -2pn + p &= 9n - 6n^2 - 3, \\ p &= \frac{9n - 6n^2 - 3}{1 - 2n}, \\ p &= \frac{(3n-3)(2n-1)}{2n-1}, \end{aligned}$$ 1 bod

$$p = 3n - 3 = 3(n-1).$$ 3 boda

Budući da je p prost, faktor $n - 1$ mora biti jednak 1, tj. $n = 2$. 1 bod

Jedino rješenje je $n = 2, p = 3$. 1 bod

Zadatak A-2.2.

Zapisan je 2021-znamenkasti broj. Svaki dvoznamenkasti broj koji čine dvije uzastopne znamenke tog broja (bez promjene poretka) djeljiv je sa 17 ili s 23. Znamenka jedinica danog broja je 7. Koja je njegova prva znamenka?

Rješenje.

Dvoznamenkasti višekratnici broja 17 su 17, 34, 51, 68 i 85. Dvoznamenkasti višekratnici broja 23 su 23, 46, 69 i 92. 1 bod

Ako je znamenka 7 posljednja, znamenka ispred nje mora biti 1. Ispred jedinice je 5, ispred petice je 8, a ispred osmice je nužno 6. Zatim tim znamenkama moraju prethoditi 4, pa 3, pa 2, pa 9, pa ponovno 6. 1 bod

Primjećujemo da smo došli do ciklusa, tj. broj je oblika $\overline{\ldots 92346\,92346\,92346\,8517}$. 2 boda

Zadnje četiri znamenke su $\overline{8517}$, a među preostalih 2017 znamenaka se blok $\overline{92346}$ od pet znamenaka ponavlja 403 puta (jer je $2017 = 403 \cdot 5 + 2$). 1 bod

Prije svega toga pojavljuju se samo još dvije znamenke iz bloka $\overline{92346}$, a to su znamenke 4 i 6. Stoga je 4 prva znamenka zapisanog broja. 1 bod

Zadatak A-2.3.

Dana je žica duljine 10 m koju treba presjeći na dva dijela, te od jednog dijela napraviti kvadrat, a od drugog jednakostranični trokut. Na kojem mjestu treba presjeći žicu da bi ukupna površina kvadrata i jednakostraničnog trokuta bila što manja?

Rješenje.

Označimo s x mjesto na kojem treba presjeći žicu, odnosno neka je x opseg kvadrata, a $10 - x$ opseg trokuta.

Tada je površina kvadrata $\frac{x^2}{4}$, dok je površina jednakostraničnog trokuta $\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{10-x}{3}\right)^2$. 1 bod

Ukupna površina likova je

$$\frac{x^2}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{10-x}{3}\right)^2 = \frac{1}{144}\left[\left(9+4\sqrt{3}\right)x^2 - 80\sqrt{3}x + 400\sqrt{3}\right].$$ 2 boda

Dobili smo kvadratnu funkciju oblika ax^2+bx+c. Kako je vodeći koeficijent a pozitivan, izraz postiže najmanju vrijednost u tjemenu kvadratne funkcije. 1 bod

Njegovu vrijednost nalazimo po formuli $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Stoga je

$$x_0 = \frac{40\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}} = \frac{40\sqrt{3}(9-4\sqrt{3})}{(9-4\sqrt{3})(9+4\sqrt{3})} = \frac{40(3\sqrt{3}-4)}{11}.$$ 2 boda

Zaključujemo da žicu treba presjeći na udaljenosti $x_0 = \frac{40(3\sqrt{3}-4)}{11}$ od njegovog ruba.

Napomena: Rješenje se prihvaća ako je izraz sređen i na neki drugi način, poput $x_0 = \dfrac{120\sqrt{3} - 160}{11}$.

Zadatak se može riješiti i uzimajući kao nepoznanicu neke druge mjere iz zadatka. Ako se kao y uzme opseg jednakostraničnog trokuta, za rješenje se dobije $y_0 = 10 - x_0 = \dfrac{270 - 120\sqrt{3}}{11} = \dfrac{30(9 - 4\sqrt{3})}{11}$. U tom slučaju točno rješenje je također da žicu treba presjeći na udaljenosti y_0 od ruba. U slučajevima da učenik izrazi rješenje preko x_0 ili y_0, nije potrebno rečenicom zapisati konačno rješenje zadatka.

Ako se, primjerice, za nepoznanicu uzme duljina stranice kvadrata ili duljina stranice jednakostraničnog trokuta, za rješenje se redom dobije $\dfrac{x_0}{4}$ ili $\dfrac{y_0}{3}$. U ovim slučajevima, ako učenik ne izrazi mjesto na kojem treba presjeći žicu (što je pitanje u zadatku), rješenje vrijedi najviše 5 bodova.

Zadatak A-2.4.

U svako polje tablice 10×10 upisan je po jedan prirodni broj, a svih 20 zbrojeva brojeva u njezinim retcima i stupcima međusobno su različiti. Koliko iznosi najmanji mogući zbroj svih brojeva u tako popunjenoj tablici?

Rješenje.

Ukupno je 10 redaka i 10 stupaca, što čini 20 različitih zbrojeva. Najmanji mogući zbrojevi redaka i stupaca iznose $10, 11, 12, \ldots, 29$. 1 bod

Kako zbrajajući sve zbrojeve brojeva i po retcima i po stupcima dobivamo dvostruki zbroj svih brojeva u tablici, teoretski najmanji zbroj svih brojeva u takvoj tablici iznosi

$$\frac{1}{2}\left(\frac{29 \cdot 30}{2} - \frac{9 \cdot 10}{2}\right) = 195.$$ 1 bod

Da bismo bili sigurni da je te zbrojeve zaista moguće postići, moramo konstruirati barem jedan primjer rasporeda brojeva. Jedan mogući primjer je dan u sljedećoj tablici:

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	3	3	1	1	1	1	1	1
1	1	4	5	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	5	5	1	1	1	1
1	1	1	1	6	7	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	7	7	1	1
1	1	1	1	1	1	8	9	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	9	9
1	1	1	1	1	1	1	1	10	11

4 boda

Napomena: Početak konstrukcije tablice (zapis neka dva retka ili stupca) vrijedi 2 boda.

Konstrukcija svake tablice koja zadovoljava uvjete zadatka vrijedi 4 boda. Drugačije tablice, osim permutacijom redaka i stupaca postojeće tablice, može se primjerice dobiti slažući drugačije 2×2 blokove na dijagonali tako da im zbrojevi brojeva u retcima i stupcima čine dva uzastopna broja (ostale brojeve i dalje ostavljamo da su jednaki 1). Jedan takav primjer je tablica u nastavku.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	5	1	1	1	1	1	1
1	1	6	3	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	9	1	1	1	1
1	1	1	1	10	3	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	13	1	1
1	1	1	1	1	1	14	3	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	17
1	1	1	1	1	1	1	1	18	3

Zadatak A-2.5.

Odredi sve parove $\{a, b\}$ različitih realnih brojeva takve da jednadžbe

$$x^2 + ax + b = 0 \qquad \text{i} \qquad x^2 + bx + a = 0$$

imaju barem jedno zajedničko rješenje u skupu realnih brojeva.

Prvo rješenje.

Označimo zajedničko rješenje s x_0. Izjednačimo jednadžbe i dobivamo:

$$x_0^2 + ax_0 + b = x_0^2 + bx_0 + a, \qquad \text{1 bod}$$
$$x_0a - x_0b + b - a = 0,$$
$$x_0(a-b) - (a-b) = 0,$$
$$(x_0 - 1)(a - b) = 0. \qquad \text{1 bod}$$

Iz uvjeta $a \neq b$ dobivamo $x_0 = 1$. 2 boda

Uvrštavanjem u jednadžbe dobivamo nužan uvjet za a i b:

$$1 + a + b = 0.$$

Dakle, broj 1 je rješenje kvadratnih jednadžbi ako i samo ako vrijedi gornja relacija. 1 bod

Među takvim parovima treba izbaciti one za koje vrijedi $a = b = -1 - a$, odnosno $a = -\dfrac{1}{2}$. 1 bod

Stoga, rješenja su svi parovi $\{a, b\}$ takvi da je $a + b = -1$, osim kada je $a = b = -\dfrac{1}{2}$.

Drugo rješenje.

Zbog uvjeta da su a i b različiti dobivamo da barem jedan od njih nije jednak 0. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da vrijedi $a \neq 0$.

Neka su x_0 i x_1 rješenja prve, a x_0 i x_2 rješenja druge jednadžbe. Prema Vièteovim formulama vrijedi:

$$\begin{aligned} x_0 + x_1 &= -a, \qquad & x_0 x_1 &= b, \\ x_0 + x_2 &= -b, \qquad & x_0 x_2 &= a. \end{aligned}$$

Kako vrijedi $a \neq 0$, iz zadnje jednadžbe vrijedi da ni x_0 ni x_2 nisu jednaki 0. Iz omjera jednakosti za umnožak rješenja dobivamo da je $x_1 = \frac{b}{a} x_2$. 1 bod

Oduzimajući jednakosti za zbroj rješenja dobivamo da je

$$b - a = x_1 - x_2 = \left(\frac{b}{a} - 1\right) x_2 = \frac{b-a}{a} x_2.$$

Budući da vrijedi $b - a \neq 0$, dobivamo da je $x_2 = a$. 1 bod

Iz zadnje Vièteove formule $x_0 x_2 = a$ sada dobivamo da je $x_0 = 1$. 2 boda

Uvrštavajući u $x_0 + x_2 = -b$, dobivamo uvjet

$$a + b + 1 = 0.$$

Također, uvrštavanjem $x = 1$ u kvadratne jednadžbe vidimo da je broj 1 rješenje kvadratnih jednadžbi ako i samo ako vrijedi gornja relacija. 1 bod

Među takvim parovima treba izbaciti one za koje vrijedi $b = a = -1 - b$, odnosno $b = -\frac{1}{2}$. 1 bod

Stoga, rješenja su svi parovi $\{a, b\}$ oblika $\{-1 - b, b\}$, $b \neq -\frac{1}{2}$.

Treće rješenje.

Rješenja danih kvadratnih jednadžbi su

$$x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \qquad \text{i} \qquad x_{3,4} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2}.$$

Da bi jedno od rješenja jedne jednadžbe bilo rješenje druge, posebno mora vrijediti da je jedan od dva izraza

$$-a + b \pm \sqrt{a^2 - 4b}$$

jednak $\sqrt{a^2 - 4b}$ ili $-\sqrt{a^2 - 4b}$. Kvadrirajući (i uzimajući u obzir da lijeva strana i dalje može poprimiti dvije vrijednosti), redom dobivamo:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - 2ab + a^2 - 4b \pm 2(b-a)\sqrt{a^2 - 4b} &= b^2 - 4a, \\ \pm 2(b-a)\sqrt{a^2 - 4b} &= 4b + 2ab - 2a^2 - 4a, \\ \pm 2(b-a)\sqrt{a^2 - 4b} &= 2(b-a)(a+2), \\ \pm\sqrt{a^2 - 4b} &= (a+2), \end{aligned}$$

1 bod

budući da vrijedi $a \neq b$.

Ponovno kvadrirajući dobivamo da nužno vrijedi

$$\begin{aligned} a^2 - 4b &= a^2 + 4a + 4, \\ 4(a + b + 1) &= 0, \end{aligned}$$

odnosno nužno mora vrijediti $a + b + 1 = 0$. 2 boda

Među takvim parovima treba izbaciti one za koje vrijedi $a = b = -1 - a$, odnosno $a = -\frac{1}{2}$. 1 bod

Preostaje još provjeriti da svi parovi oblika $\{a, -1 - a\}$ zadovoljavaju uvjete zadatka. Rješavajući obje jednadžbe

$$\begin{aligned} x^2 + ax + (-1 - a) &= 0 \\ x^2 + (-1 - a)x + a &= 0, \end{aligned}$$

vidimo da je broj $x = 1$ rješenje, pa imaju barem jedno zajedničko rješenje. 2 boda

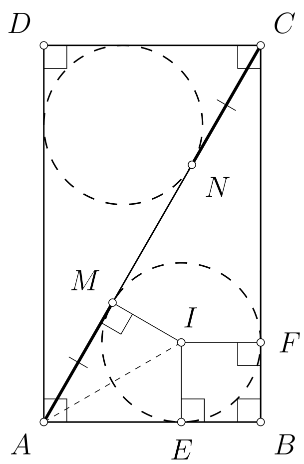
Stoga, rješenja su svi parovi $\{a, b\}$ oblika $\{a, -1 - a\}$, $a \neq -\frac{1}{2}$.

Napomena: U svakom rješenju, nakon dobivanja relacije $a + b + 1 = 0$ treba provjeriti i njenu nužnost. Dokazivanje te tvrdnje nosi 1 bod (kao u prva dva rješenja) ili 2 boda (kao u trećem rješenju), ovisno o tome je li prilikom dobivanja relacije $a + b + 1 = 0$ dokazano da je zajedničko rješenje nužno broj 1.

Zadatak A-2.6.

Neka je $ABCD$ pravokutnik u kojem je $|AB| = 1$ i $|BC| = \sqrt{3}$. Upisane kružnice trokuta ABC i ACD diraju dužinu $\overline{AC}$ u točkama M i N. Odredi $|MN|$.

Rješenje.



Iz Pitagorinog poučka je $|AC| = \sqrt{|AB|^2 + |BC|^2} = \sqrt{4} = 2$. 1 bod

Neka je I središte kružnice upisane trokutu ABC, te E i F redom dirališta upisane kružnice sa stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$. U četverokutu $IEBF$ su tri prava kuta te su stranice

$\overline{IE}$ i $\overline{IF}$ radijusi upisane kružnice. Zaključujemo da je taj četverokut kvadrat, a duljina njegove stranice je polumjer r kružnice upisane trokutu ABC. 2 boda

Površinu trokuta ABC možemo izračunati na dva načina:

$$P = \frac{|AB| \cdot |BC|}{2} \qquad \text{i} \qquad P = r \cdot s,$$

gdje je s poluopseg trokuta ABC. 1 bod

Poluopseg iznosi $s = \dfrac{1+2+\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$. Iz jednakosti za površinu trokuta redom dobivamo

$$\begin{aligned}
\frac{|AB| \cdot |BC|}{2} &= r \cdot s, \\
\frac{\sqrt{3}}{2} &= r \cdot \frac{3+\sqrt{3}}{2}, \\
r &= \frac{\sqrt{3}-1}{2}.
\end{aligned}$$

2 boda

Oba trokuta AMI i AEI su pravokutna sa zajedničkom hipotenuzom i jedna kateta im je radijus kružnice r. Zato su i sukladni, pa imamo

$$|AM| = |AE| = |AB| - |BE| = |AB| - r = 1 - \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}.$$

2 boda

Trokuti CDA i ABC su sukladni, pa na analogan način dobivamo da je $|CN| = |AM|$. Konačno je

$$|MN| = |AC| - |AM| - |CN| = 2 - 2 \cdot \frac{3-\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} - 1.$$

2 boda

Zadatak A-2.7.

Odredi pozitivne racionalne brojeve x i y za koje su $x + \dfrac{1}{y}$ i $y + \dfrac{1}{x}$ prirodni brojevi.

Prvo rješenje.

Neka su a, b, c i d prirodni brojevi takvi da je

$$x = \frac{a}{b}, \qquad y = \frac{c}{d}, \qquad NZD(a,b) = 1, \qquad NZD(c,d) = 1.$$

1 bod

Iz uvjeta zadatka imamo da su brojevi

$$\frac{a}{b} + \frac{d}{c} = \frac{ac+bd}{bc} \qquad \text{i} \qquad \frac{b}{a} + \frac{c}{d} = \frac{bd+ac}{ad}$$

prirodni. 1 bod

Posebno, prirodan je i broj

$$a \cdot \frac{bd+ac}{ad} = \frac{bd+ac}{d} = b + \frac{ac}{d},$$

1 bod

pa je zato i $\frac{ac}{d}$ prirodan. Kako su c i d relativno prosti, $\frac{a}{d}$ je nužno prirodan broj. 1 bod

Analogno, prirodan je i broj

$$d \cdot \frac{bd+ac}{ad} - c = \frac{bd+ac}{a} - c = \frac{bd}{a},$$

pa zbog $NZD(a, b) = 1$ vrijedi da je $\frac{d}{a}$ prirodan broj. 1 bod

Jedini način da su oba broja $\frac{a}{d}$ i $\frac{d}{a}$ prirodna je da vrijedi $a = d$. 1 bod

Analogno, promatrajući brojeve $b \cdot \frac{ac+bd}{bc}$ i $c \cdot \frac{ac+bd}{bc} - d$, dobivamo da vrijedi $b = c$. 1 bod

Dakle, dobivamo da su brojevi $x + \frac{1}{y} = \frac{2a}{b}$ i $y + \frac{1}{x} = \frac{2b}{a}$ prirodni. 1 bod

Budući da su a i b relativno prosti, dobivamo da su a i b djelitelji broja 2, odakle su nužno jednaki 1 ili 2. 1 bod

Provjerom svih slučajeva dobivamo tri rješenja za (x, y): $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, $(1, 1)$, $\left(2, \frac{1}{2}\right)$. 1 bod

Drugo rješenje.

Umnožak dva prirodna broja je prirodan broj, stoga je i broj

$$\left(x + \frac{1}{y}\right)\left(y + \frac{1}{x}\right) = xy + \frac{1}{xy} + 2$$ 2 boda

prirodan, pa je i taj broj umanjen za 2 također prirodan.

Definirajmo prirodan broj $n = xy + \frac{1}{xy}$ i racionalan $t = xy$. Oni zadovoljavaju jednadžbu $t^2 - nt + 1 = 0$. 1 bod

Budući da su rješenja te jednadžbe racionalni brojevi, diskriminanta n^2-4 te jednadžbe mora biti kvadrat nenegativnog racionalnog broja. Kako je to i cijeli broj, nužno je kvadrat nenegativnog cijelog broja, pa postoji cijeli broj $k \geqslant 0$ takav da je $n^2 - 4 = k^2$. 1 bod

Brojevi $n - k$ i $n + k$ su cijeli brojevi iste parnosti, a $n + k$ je i prirodan. Stoga iz $(n - k)(n + k) = 4$ je moguće jedino $n - k = n + k = 2$, tj. $n = 2$ i $k = 0$. 2 boda

Uvrštavanjem u kvadratnu jednadžbu po t dobivamo da je $t = 1$, odnosno $xy = 1$. 1 bod

Slijedi da su brojevi $x + \frac{1}{y} = 2x$ i $y + \frac{1}{x} = 2y$ prirodni. 1 bod

Jedno očito rješenje je $x = y = 1$. Ako je neki od brojeva x i y manji od 1, on će pomnožen s 2 biti prirodan samo ako je jednak $\frac{1}{2}$. 1 bod

Zato imamo tri moguća rješenja za (x, y): $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, $(1, 1)$, $\left(2, \frac{1}{2}\right)$. 1 bod

Napomena: Rješenje u kojem učenik dobije samo parove $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ i $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ ili samo par $(1, 1)$ vrijedi najviše 9 bodova.

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

17. veljače 2021.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-3.1.

Ako je $2\sin x - 3\cos y = a$ i $2\cos x + 3\sin y = b$, koliko je $\sin(x-y)$?

Rješenje.

Kvadriranjem i zbrajanjem danih jednakosti redom dobivamo

$$4\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) - 12(\sin x\cos y - \cos x \sin y) + 9\left(\cos^2 y + \sin^2 y\right) = a^2 + b^2,$$ 1 bod

$$4 - 12(\sin x\cos y - \cos x\sin y) + 9 = a^2 + b^2,$$ 2 boda

$$13 - 12\sin(x-y) = a^2 + b^2,$$ 2 boda

$$\sin(x-y) = \frac{13 - a^2 - b^2}{12}.$$ 1 bod

Zadatak A-3.2.

Ako za pozitivne realne brojeve x, y i z vrijedi

$$4^{x+y} = z, \qquad z^{1/x} \cdot z^{1/y} = 1024,$$

odredi vrijednost izraza $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$.

Rješenje.

Iz druge dane jednakosti slijedi $z^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = 1024$. 1 bod

Potenciranjem prve dane jednakosti s $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ redom dobivamo

$$4^{(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)} = z^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = 1024 = 4^5,$$ 2 boda

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) = 5,$$ 1 bod

$$1 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 1 = 5,$$ 1 bod

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 3.$$ 1 bod

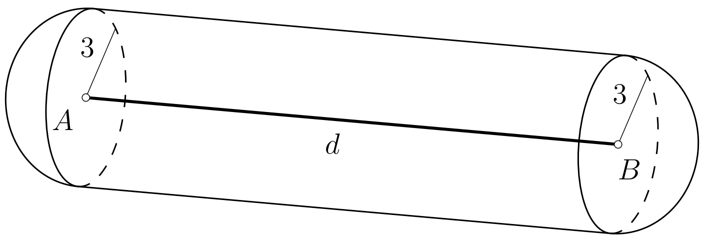
Zadatak A-3.3.

Sve točke prostora čija udaljenost od dužine $\overline{AB}$ iznosi najviše 3 čine tijelo obujma 216π. Odredi duljinu dužine $\overline{AB}$.

Rješenje.

Označimo s d duljinu dužine $\overline{AB}$.

Za svaku točku na toj dužini, skup svih točaka koje su od nje udaljene za najviše 3 je kugla radijusa 3 sa središtem u toj točki. Unija svih tih kugli je tijelo koje se sastoji od valjka sa središtima baza A i B, njihovim polumjerom jednakim 3, te dvije polukugle konstruirane nad bazama tog valjka (prema van). 3 boda



Iz uvjeta zadatka slijedi

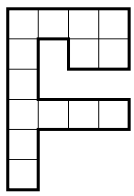
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 3^3\pi + 3^2\pi d + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 3^3\pi = 216\pi, \quad \text{1 bod}$$

$$9\pi d = 180\pi, \quad \text{1 bod}$$

$$d = 20. \quad \text{1 bod}$$

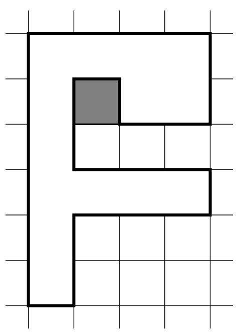
Zadatak A-3.4.

Polja ploče dimenzija 300×300 iste su veličine kao i 14 kvadratića od kojih se sastoji lik prikazan na slici. Koliko je najviše takvih likova moguće postaviti na tu ploču bez preklapanja? Likove se može rotirati i prevrtati.

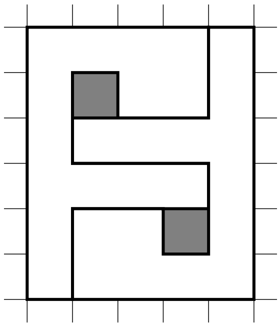


Rješenje.

Postavimo jedan takav lik na ploču i promatrajmo nepokriveno polje koje je označeno na slici. Uočimo da na koji god način postavimo još jedan zadani lik na ploču bez preklapanja s prethodnim, to polje će ostati nepokriveno. 2 boda



S druge strane, od dva zadana lika možemo složiti pravokutnik dimenzija 6×5 u kojem će samo dva prethodno opisana polja ostati nepokrivena. 2 boda



Čitavu ploču možemo popločati s ukupno $60 \cdot 50 = 3000$ takvih pravokutnika, tj. na ploču možemo postaviti najviše $2 \cdot 3000 = 6000$ zadanih likova. 2 boda

Zadatak A-3.5.

Koliko ima četveroznamenkastih brojeva djeljivih sa 7 čiji dekadski zapis ne sadrži znamenke 1, 2 ni 7?

Rješenje.

Na raspolaganju imamo sedam znamenaka: 0, 3, 4, 5, 6, 8 i 9.

Prvu znamenku možemo odabrati na 6 načina (bilo koju znamenku osim nule). 1 bod

Drugu i treću znamenku možemo odabrati na po 7 načina. 1 bod

Neka te prve tri odabrane znamenke čine troznamenkasti broj n. Zadnju znamenku y za traženi četveroznamenkasti broj $10n + y$ možemo uvijek odabrati na točno jedan način. Naime, kako svih sedam znamenaka koje imamo na raspolaganju daju različite ostatke pri dijeljenju sa 7, točno jedan od brojeva

$$10n + 0, \quad 10n + 3, \quad 10n + 4, \quad 10n + 5, \quad 10n + 6, \quad 10n + 8, \quad 10n + 9$$

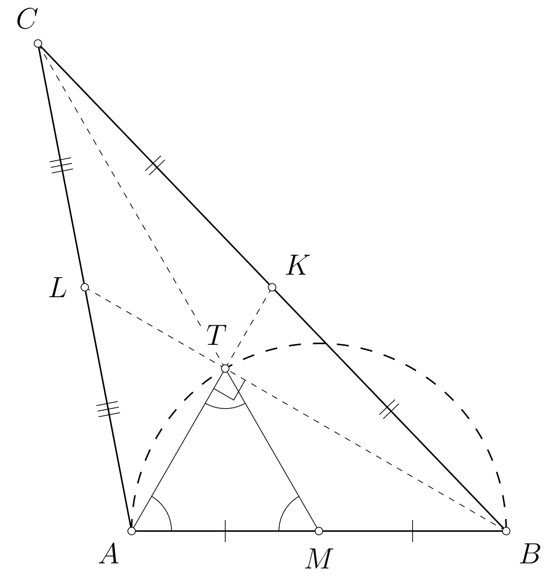
je djeljiv sa 7, neovisno o broju n. 3 boda

Zato je ukupan broj takvih brojeva jednak $6 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 = 294$. 1 bod

Zadatak A-3.6.

Točka M je polovište stranice $\overline{AB}$, a T težište trokuta ABC. Ako je AMT jednakostraničan trokut stranice duljine 1, odredi duljine stranica trokuta ABC.

Prvo rješenje.



Budući da je $|MB| = |MA| = 1$, vrijedi $|AB| = 2$. 1 bod

Nadalje, kako je $|AM| = |TM| = |BM|$, slijedi da je M središte kružnice opisane trokutu ABT, pa je prema Talesovom poučku $\sphericalangle ATB = 90°$. Zato iz Pitagorinog poučka slijedi $|BT| = \sqrt{|AB|^2 - |AT|^2} = \sqrt{3}$. 2 boda

Neka su K i L redom polovišta stranica $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$. Budući da težište dijeli težišnicu u omjeru $2:1$, slijedi $|TL| = \frac{1}{2}|BT| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $|TK| = \frac{1}{2}|AT| = \frac{1}{2}$. 3 boda

Sada iz pravokutnih trokuta BTK i ATL dobivamo

$$|BK| = \sqrt{|BT|^2 + |TK|^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}, \qquad \text{1 bod}$$

$$|AL| = \sqrt{|AT|^2 + |TL|^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}, \qquad \text{1 bod}$$

odakle slijedi $|BC| = 2|BK| = \sqrt{13}$ i $|AC| = 2|AL| = \sqrt{7}$. 2 boda

Drugo rješenje.

Kao i u prethodnom rješenju zaključujemo $|AB| = 2$, te $|CM| = 3|TM| = 3$. 2 boda

Sada iz poučka o kosinusu primijenjenog na trokute AMC i BMC dobivamo

$$|AC| = \sqrt{|AM|^2 + |CM|^2 - 2|AM| \cdot |CM| \cos\sphericalangle AMC} = \sqrt{1^2 + 3^2 - 6 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{7}, \qquad \text{4 boda}$$

$$|BC| = \sqrt{|BM|^2 + |CM|^2 - 2|BM| \cdot |CM| \cos\sphericalangle BMC} = \sqrt{1^2 + 3^2 + 6 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{13}. \qquad \text{4 boda}$$

Zadatak A-3.7.

Odredi sve parove (a, b) prirodnih brojeva za koje vrijedi

$$a^b - b^a + 2^a = 17a^4 - 2b^2 + 52.$$

Rješenje.

Promatrajući parnost izraza u jednadžbi, slijedi da je b nužno paran broj. 1 bod

Pretpostavimo prvo da je a paran broj. Pogledajmo jednadžbu modulo 8. Desna strana daje ostatak 4 pri dijeljenju s 8. S druge strane, kada bi oba broja a i b bila veća od ili jednaka 4, tada bi lijeva strana bila djeljiva s 8, čime dobivamo kontradikciju. Dakle, vrijedi $a \leqslant 3$ ili $b \leqslant 3$. 2 boda

Budući da su a i b parni, treba provjeriti slučajeve $a = 2$ i $b = 2$.

1) Ako je $a = 2$, jednadžbu svodimo na:

$$\begin{aligned} 2^b - b^2 + 4 &= 17 \cdot 16 - 2b^2 + 52, \\ 2^b + b^2 &= 320. \end{aligned}$$

Za $b = 8$ dobivamo jednakost i jedno rješenje $(a, b) = (2, 8)$. 1 bod

Lijeva strana jednadžbe raste kako i b raste, pa za sve b različite od 8 jednakost ne vrijedi te nemamo više rješenja. 1 bod

2) Ako je $b = 2$, jednadžbu svodimo na:

$$\begin{aligned} a^2 - 2^a + 2^a &= 17a^4 - 2 \cdot 4 + 52, \\ 17a^4 - a^2 + 44 &= 0. \end{aligned}$$

Kako za sve prirodne brojeve a vrijedi $a^4 \geqslant a^2$, lijeva strana jednadžbe je očito strogo veća od nule, pa ova jednadžba nema prirodnih rješenja. 1 bod

Pretpostavimo sada da je a neparan broj. Ponovno gledamo jednadžbu modulo 8. Kako kvadrat neparnog broja daje ostatak 1 pri dijeljenju s 8, desna strana daje ostatak 5. S druge strane, kada bi a bio veći od ili jednak 3, tada bi iz istog razloga lijeva strana dala ostatak 1 pri dijeljenju s 8, čime opet dobivamo kontradikciju. Dakle, vrijedi $a \leqslant 2$. 3 boda

Budući da je a neparan, jedina mogućnost je $a = 1$. Jednadžbu tada svodimo na:

$$\begin{aligned} 1 - b + 2 &= 17 - 2b^2 + 52, \\ 2b^2 - b - 66 &= 0, \\ (2b + 11)(b - 6) &= 0, \end{aligned}$$

što nam daje rješenje $(a, b) = (1, 6)$. 1 bod

Konačno, svi traženi parovi (a, b) su $(1, 6)$ i $(2, 8)$.

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

17. veljače 2021.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-4.1.

Odredi sve kompleksne brojeve z koji zadovoljavaju jednakosti

$$|z+1| = 1 \qquad \text{i} \qquad |z^2+1| = 1.$$

Prvo rješenje.

Neka je $z = a + bi$. Vrijedi $z^2 = (a+bi)(a+bi) = (a^2 - b^2) + 2abi$. 1 bod

Iz (kvadriranih) uvjeta zadatka dobivamo

$$\begin{aligned} (a+1)^2 + b^2 &= 1, \\ (a^2 - b^2 + 1)^2 + 4a^2b^2 &= 1. \end{aligned}$$ 1 bod

Iz prve jednadžbe dobijemo $b^2 = -a^2 - 2a$. 1 bod

To uvrštavamo u drugu jednadžbu:

$$\begin{aligned} (2a^2 + 2a + 1)^2 - 4a^2(a^2 + 2a) &= 1, \\ 4a^4 + 4a^2 + 1 + 8a^3 + 4a^2 + 4a - 4a^4 - 8a^3 &= 1, \\ 8a^2 + 4a &= 0. \end{aligned}$$ 1 bod

Rješenja ove jednadžbe su $a = 0$ i $a = -\dfrac{1}{2}$. Za njih dobivamo odgovarajuće vrijednosti za imaginarni dio broja z: $b = 0$ i $b = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 1 bod

Dakle, rješenja sustava su $z_1 = 0$ i $z_{2,3} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$. 1 bod

Drugo rješenje.

Uvedimo trigonometrijski zapis kompleksnoga broja: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r \geqslant 0$, $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$. Kvadriranjem prvog uvjeta dobivamo

$$\begin{aligned}(r\cos\varphi + 1)^2 + r^2\sin^2\varphi &= 1,\\ r^2\cos\varphi + 2r\cos\varphi + 1 + r^2\sin^2\varphi &= 1,\\ r^2 + 2r\cos\varphi &= 0.\end{aligned}$$

1 bod

Kvadriranjem drugog uvjeta analogno dobivamo

$$r^2 + 2r\cos(2\varphi) = 0.$$

1 bod

Ako je $r = 0$, dobivamo rješenje $z = 0$. 1 bod

U suprotnom, oduzimanjem zadnje dvije jednakosti i dijeljenjem s r dobivamo jednadžbu

$$\cos\varphi = \cos(2\varphi).$$

1 bod

Gornja jednakost vrijedi ako je razlika ili zbroj argumenata višekratnik od 2π. U prvom slučaju to znači $\varphi = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, odnosno $\varphi = 0$, što daje već dobiveno rješenje $z = 0$. U drugom slučaju imamo $3\varphi = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, odakle je $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$ ili $\dfrac{2\pi}{3}$. Time dobivamo rješenja $z = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$. 2 boda

Dakle, rješenja sustava su $z_1 = 0$ i $z_{2,3} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$.

Treće rješenje.

Kvadrirajući izraze i koristeći da za svaki kompleksan broj vrijedi $w \cdot \overline{w} = |w|^2$, dobivamo

$$\begin{aligned}(z+1)(\overline{z}+1) &= 1,\\ (z^2+1)(\overline{z}^2+1) &= 1,\end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned}|z|^2 + z + \overline{z} + 1 &= 1,\\ |z|^4 + z^2 + \overline{z}^2 + 1 &= 1.\end{aligned}$$

1 bod

Prvu jednadžbu prepišemo kao $-|z|^2 = z + \overline{z}$ i kvadriramo:

$$|z|^4 = z^2 + 2 \cdot z \cdot \overline{z} + \overline{z}^2 = z^2 + \overline{z}^2 + 2|z|^2.$$

1 bod

Iz zadnje dvije jednakosti izrazimo $z^2 + \overline{z}^2$ i dobivamo

$$z^2 + \overline{z}^2 = -|z|^4 = |z|^4 - 2|z|^2,$$

odnosno

$$|z|^4 - |z|^2 = 0.$$

1 bod

Dobivamo dvije mogućnosti: $|z| = 0$ ili $|z| = 1$. 1 bod

Ako je $|z| = 0$, imamo prvo rješenje $z = 0$. 1 bod

Ako je $|z| = 1$, tada je $\overline{z} = \frac{1}{z}$. Stoga se možemo vratiti u prvu jednadžbu i dobiti

$$1 + z + \frac{1}{z} = 0.$$

Množeći sa z, dobivamo kvadratnu jednadžbu $z^2+z+1 = 0$ kojoj su rješenja $\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$. 1 bod

Dakle, rješenja sustava su $z_1 = 0$ i $z_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$.

Napomena: U trećem rješenju kada se dobije $|z| = 1$ rješenje se može dovršiti uvodeći trigonometrijski zapis kompleksnog broja: zbog $r = 1$ prvi uvjet se svede na $\cos\varphi = \frac{1}{2}$.

Zadatak A-4.2.

Gumena lopta bačena je s visine od 200 metara. Svaki put nakon što se odbije od površine, dosegne 4/5 prethodne visine: nakon prvog odbijanja popne se na 160 metara, nakon drugog odbijanja na 128 metara, itd. Koliko iznosi ukupna udaljenost koju lopta prijeđe dok se ne zaustavi?

Rješenje.

Lopta najprije prijeđe 200 metara padajući, a potom za svako odbijanje prijeđe jednak put prema gore i natrag prema dolje.

S obzirom na to da je

$$\begin{aligned} d &= 200 + 2 \cdot 200 \cdot \frac{4}{5} + 2 \cdot 200 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cdots && \text{2 boda} \\ &= 200 + 2 \cdot 200 \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{4^2}{5^2} + \frac{4^3}{5^3} + \cdots\right) \\ &= 200 + 2 \cdot 200 \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{4}{5}} - 1\right) && \text{2 boda} \\ &= 200 + 2 \cdot 200 \cdot 4 = 1800, && \text{2 boda} \end{aligned}$$

zaključujemo da lopta prijeđe ukupnu udaljenost od 1800 metara.

Napomena: Ako učenik u rješenju pomnoži sve pribrojnike osim prvog s 2, ili zaboravi pomnožiti bilo koji faktor s 2 (nego rješava zadatak kao da lopta putuje samo u jednom smjeru), rješenje treba bodovati s 4 boda.

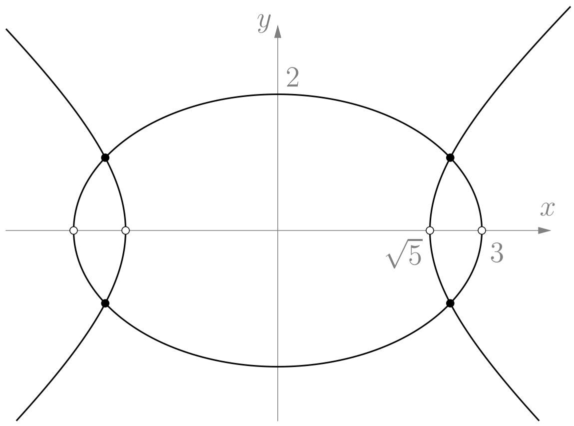
Zadatak A-4.3.

Zadana je elipsa s jednadžbom $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ i hiperbola kojoj su žarišta u glavnim tjemenima te elipse, a tjemena u žarištima elipse. Odredi sjecišta hiperbole i elipse.

Rješenje.

Iz jednadžbe elipse iščitavamo da je velika poluos $a = 3$ i mala poluos $b = 2$, odakle slijedi da je udaljenost žarišta elipse od ishodišta $e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5}$. 1 bod

Dakle, žarišta hiperbole su u točkama $(\pm 3, 0)$, a njezina tjemena u točkama $(\pm\sqrt{5}, 0)$. 2 boda



Sada zaključujemo da je jednadžba promatrane hiperbole

$$1 = \frac{x^2}{e^2} - \frac{y^2}{a^2 - e^2} = \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4}.$$ 1 bod

Zbrajanjem jednadžbi elipse i hiperbole dobivamo

$$2 = \frac{x^2}{5} + \frac{x^2}{9} = \frac{14x^2}{45},$$ 1 bod

odakle slijedi $x = \pm\frac{3\sqrt{35}}{7}$, a zatim uvrštavanjem natrag u jednu od jednadžbi krivulja slijedi i $y = \pm\frac{2\sqrt{14}}{7}$, čime dobivamo četiri tražena sjecišta:

$$\left(\frac{3\sqrt{35}}{7}, \frac{2\sqrt{14}}{7}\right), \quad \left(\frac{3\sqrt{35}}{7}, -\frac{2\sqrt{14}}{7}\right), \quad \left(-\frac{3\sqrt{35}}{7}, \frac{2\sqrt{14}}{7}\right), \quad \left(-\frac{3\sqrt{35}}{7}, -\frac{2\sqrt{14}}{7}\right).$$ 1 bod

Zadatak A-4.4.

Rekurzivno je zadan niz:

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 3,$$
$$a_n = (n+1)a_{n-1} - na_{n-2} \quad \text{za } n \geqslant 3.$$

Odredi sve prirodne brojeve n za koje je a_n djeljivo s 9.

Prvo rješenje.

Koristeći zadanu rekurzivnu relaciju dobivamo jednakosti

$$\begin{aligned}
a_3 &= (3+1)a_2 - 3a_1 = 9, \\
a_4 &= (4+1)a_3 - 4a_2 = 33, \\
a_5 &= (5+1)a_4 - 5a_3 = 153, \\
a_6 &= (6+1)a_5 - 6a_4 = 873.
\end{aligned}$$

1 bod

Dokažimo indukcijom da su svi članovi a_n, za $n \geqslant 5$, djeljivi s 9. Za bazu indukcije vidimo da je $a_5 = 153 = 17 \cdot 9$, te $a_6 = 873 = 97 \cdot 9$. 1 bod

Pretpostavimo da za neki $n \geqslant 5$ vrijedi $9 \mid a_n$ i $9 \mid a_{n+1}$. 1 bod

Pokažimo da isto vrijedi i za a_{n+2}. Koristeći pretpostavku indukcije, iz

$$a_{n+2} = (n+3)a_{n+1} - (n+2)a_n$$

vidimo da je a_{n+2} razlika dva broja djeljiva s 9, pa je i sam djeljiv s 9, čime je tvrdnja indukcije dokazana. 2 boda

Uzevši u obzir i prethodno ispisane članove niza, zaključujemo da je rješenje $n = 3$ i svi $n \geqslant 5$. 1 bod

Drugo rješenje.

Dokažimo indukcijom da za svaki prirodni broj n vrijedi

$$a_n = 1! + 2! + \cdots + n!.$$

1 bod

Baza indukcije: za $n = 1$ imamo $a_1 = 1 = 1!$, a za $n = 2$ imamo $a_2 = 3 = 1! + 2!$. Pretpostavimo da za neki prirodni broj n vrijedi da su a_n i a_{n+1} redom sume prvih n i $n+1$ faktorijela prirodnih brojeva. 1 bod

Pokažimo da to vrijedi i za $n+2$. Kako prema pretpostavci indukcije vrijedi identitet $a_{n+1} - a_n = (n+1)!$, imamo

$$\begin{aligned}
a_{n+2} &= (n+3)a_{n+1} - (n+2)a_n \\
&= a_{n+1} + (n+2)(a_{n+1} - a_n) \\
&= 1! + 2! + \cdots + (n+1)! + (n+2)(n+1)! \\
&= 1! + 2! + \cdots + (n+1)! + (n+2)!,
\end{aligned}$$

gdje smo još jednom iskoristili pretpostavku indukcije za $n+1$. Dakle, tvrdnja indukcije je dokazana. 2 boda

Računajući članove niza za $n \leqslant 5$, kao u prošlom rješenju vidimo da tvrdnja vrijedi za $n = 3, 5$. 1 bod

Za sve $n \geqslant 6$ vrijedi da je

$$a_n = 1! + 2! + \cdots + 5! + 6! + \cdots + n! = 153 + 6! + \cdots + n!$$

djeljivo s 9 jer je izraz $n!$ djeljiv s 9 za svaki $n \geqslant 6$. 1 bod

Zaključujemo da je rješenje $n = 3$ i svi $n \geqslant 5$.

Zadatak A-4.5.

Odredi posljednje tri znamenke broja 21^{2021}.

Prvo rješenje.

Koristeći binomni poučak dobivamo

$$\begin{aligned} 21^{2021} = (1+20)^{2021} &= 1 + 2021 \cdot 20 + \binom{2021}{2} \cdot 20^2 + \binom{2021}{3} \cdot 20^3 + \cdots && \text{2 boda} \\ &= 1 + 40420 + 2021 \cdot 1010 \cdot 400 + \binom{2021}{3} \cdot 8000 + \cdots && \text{1 bod} \\ &= 40421 + 1000N, && \text{2 boda} \end{aligned}$$

za neki prirodan broj N (neispisani pribrojnici sadrže faktor 20^k, gdje je $k \geqslant 4$, pa su sigurno djeljivi s 1000).

Posljednje tri znamenke broja 21^{2021} su stoga 421. 1 bod

Drugo rješenje.

Neka je $x = 21$. Tada računamo

$$\begin{aligned} x^{50} - 1 &= (x^{25}+1)(x^{25}-1) = (x^{25}+1)(x^{20}+x^{15}+x^{10}+x^5+1)(x^5-1) \\ &= (x^{25}+1)(x^{20}+x^{15}+x^{10}+x^5+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x-1). && \text{1 bod} \end{aligned}$$

Budući da je $x = 21$, prva je zagrada parna, a zadnja je djeljiva s 20. Kako je $x \equiv 1 \pmod 5$, a isto vrijedi i za bilo koju potenciju od x, dvije zagrade u sredini su djeljive s 5. Tako smo dobili da je izraz na desnoj strani djeljiv s 1000, odnosno da vrijedi $21^{50} \equiv 1 \pmod{1000}$. 1 bod

Zato je dovoljno naći zadnje tri znamenke broja 21^{21} (jer je $2021 = 40 \cdot 50 + 21$). Očito je $21^1 \equiv 21 \pmod{1000}$. Redom kvadrirajući dobivamo

$$\begin{aligned} 21^2 &\equiv 441 \pmod{1000}, \\ 21^4 &\equiv 481 \pmod{1000}. && \text{1 bod} \end{aligned}$$

Sada vidimo da je $21^5 = 21^4 \cdot 21 \equiv 101 \pmod{1000}$. 1 bod

Ponovno kvadrirajući, dobivamo

$$\begin{aligned} 21^{10} &\equiv 201 \pmod{1000}, \\ 21^{20} &\equiv 401 \pmod{1000}, && \text{1 bod} \end{aligned}$$

te

$$21^{21} = 21^{20} \cdot 21 \equiv 421 \pmod{1000}.$$

Stoga broj 21^{2021} završava s 421. 1 bod

Napomena: Početak drugog rješenja može se izvesti i koristeći Eulerov poučak: budući da je $\varphi(1000) = 400$, dobivamo da je $21^{2021} \equiv 21^{21} \pmod{1000}$. Taj zaključak mijenja prva 2 boda.

Rješenje je moguće izvesti i potencirajući ostatak pri dijeljenju s 1000 broja 21 na 2021. potenciju, recimo koristeći identitet $21^{2021} = \left(21^{43}\right)^{47}$ ili $21^{2021} = \left(21^{47}\right)^{43}$. Točno izračunavanje ostatka pri dijeljenju s 1000 nekog od brojeva 21^{43} ili 21^{47} vrijedi 2 boda.

Zadatak A-4.6.

Svaki član niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitivnih realnih brojeva, počevši od drugog, jednak je aritmetičkoj sredini geometrijske i aritmetičke sredine dvaju njemu susjednih članova.

Ako je $a_1 = \dfrac{1}{505}$ i $a_{505} = 505$, odredi a_{1010}.

Rješenje.

Prema uvjetu zadatka za svaki $n \geqslant 2$ vrijedi

$$a_n = \frac{\sqrt{a_{n-1}a_{n+1}} + \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_{n+1}}\right)^2}{4}.$$ 2 boda

Dakle,

$$\sqrt{a_n} = \frac{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_{n+1}}}{2},$$ 2 boda

pa je niz $(\sqrt{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ aritmetički niz. 1 bod

Označimo s d razliku tog niza. Iz uvjeta zadatka slijedi

$$(505-1)d = \sqrt{a_{505}} - \sqrt{a_1} = \sqrt{505} - \frac{1}{\sqrt{505}} = \frac{504}{\sqrt{505}} \qquad \Longrightarrow \qquad d = \frac{1}{\sqrt{505}}.$$ 2 boda

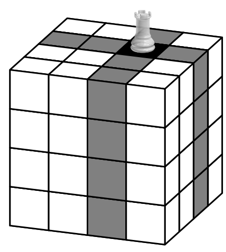
Stoga je

$$\sqrt{a_{1010}} = \sqrt{a_1} + (1010-1)d = \frac{1010}{\sqrt{505}} = 2\sqrt{505},$$ 2 boda

tj. $a_{1010} = 4 \cdot 505 = 2020$. 1 bod

Zadatak A-4.7.

Figura postavljena na oplošje kocke K_n dimenzija $n \times n \times n$ na strani na kojoj se nalazi napada sva polja u retku i stupcu u kojima se nalazi, poput šahovskog topa, ali i polja na ostalim stranama u produžetcima tih redaka/stupaca. (Na slici su označena vidljiva polja na kocki K_4 koja postavljena figura napada.)



Koliko najviše figura možemo postaviti na oplošje kocke K_{50} tako da se međusobno ne napadaju?

Rješenje.

Odgovor je 75. 1 bod

Prstenom ćemo nazivati redak ili stupac zajedno sa svojim produžetcima. 2 boda

Primijetimo da figura napada sva polja u prstenu u kojem se nalazi te da se svaka figura nalazi u točno dva prstena. 1 bod

Budući da je ukupno 150 prstenova, a nikoje dvije figure se ne smiju nalaziti u istom, zaključujemo da na oplošje kocke K_{50} možemo postaviti najviše 75 figura. 2 boda

Preostaje naći konfiguraciju kada možemo postaviti točno 75 figura.

Odaberimo neke tri strane kocke koje imaju zajednički vrh i podijelimo svaku na četiri kvadrata dimenzija 25×25. 2 boda

Sada na svakoj od te tri strane biramo po jedan kvadrat i postavljamo po 25 figura na njihove dijagonale, kao na slici. 2 boda