**Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske**
**Agencija za odgoj i obrazovanje**
**Hrvatsko matematičko društvo**

# ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

## 1. razred – srednja škola – B varijanta

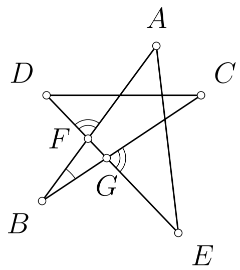
## 17. veljače 2021.

**1.** Odredite $x^y$ ako je $\dfrac{x}{4 \cdot 64^7} + \dfrac{1024^{-4}x}{16} = 16$ i $y = \dfrac{3^{4+n} + 5 \cdot 3^n}{3^{3+n} - 25 \cdot 3^n}$.

**2.** Matko sakuplja sličice s portretima sportaša koje se prodaju u paketima po 5 sličica, a jedan paket košta 7 kuna. Mlađem je bratu poklonio 30% svojih sličica, pa je mama Matku kupila još 4 paketa sličica. Nakon toga je Matko bratu darovao četvrtinu trenutnog broja sličica. Za 70 kuna koje su braća dobila od bake kupili su pakete sličica i međusobno raspodijelili na jednake dijelove. Koliko sad Matko ima sličica, ako ih ima dvije više nego na početku?

**3.** Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 2021 koji pri dijeljenju s 5 daju ostatak 2 i koliko iznosi njihova aritmetička sredina?

**4.** Točke $A$, $B$, $C$, $D$ i $E$ povezane su dužinama kao na slici. Dužine $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ sijeku dužinu $\overline{DE}$ redom u točkama $F$ i $G$. Ako je $\sphericalangle ABC = 20°$ i ako je $\sphericalangle DFA = \sphericalangle CGE$, odredi $\sphericalangle EAB + \sphericalangle DEA$.




**5.** PIN Karlovog mobitela je četveroznamenkasti prirodni broj veći od 2021 te djeljiv s 5 i 6. Ako u tome broju zamijenimo mjesta prvoj i trećoj, te drugoj i četvrtoj znamenki, dobit ćemo broj koji je od njega veći za 3960. Odredite PIN Karlovog mobitela.

* * *

**6.** Sva slova jednakosti $(a+b)(c+d)(e+f)(g+h) = 5005$ treba zamijeniti različitim brojevima od 1 do 8 tako da jednakost bude točna. Na koliko je načina to moguće napraviti?

**7.** U trokutu $ABC$ točka $D$ nalazi se na stranici $\overline{BC}$, a točka $E$ na stranici $\overline{AC}$. Dužine $\overline{BE}$ i $\overline{AD}$ sijeku se u točki $F$, a dužina $\overline{BF}$ dijeli površinu trokuta $ABD$ na dva jednaka dijela. Ako je površina trokuta $AFE$ jednaka 7, a površina trokuta $AFB$ 13, izračunajte površine trokuta $CEF$ i $CFD$.

**Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.**

**Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske**
**Agencija za odgoj i obrazovanje**
**Hrvatsko matematičko društvo**

## ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

**2. razred – srednja škola – B varijanta**

**17. veljače 2021.**

**1.** Izračunajte: $\left(\sqrt{43}+\sqrt{47}\right)^{-2} \cdot \left(43^{-1}+47^{-1}\right)+\dfrac{2}{\left(\sqrt{43}+\sqrt{47}\right)^{3}} \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{43}}+\dfrac{1}{\sqrt{47}}\right)$.

**2.** Odredite sve realne brojeve $p$ tako da za rješenja $x_1$, $x_2$ kvadratne jednadžbe

$$x(2x-3p)-3p(x-3p)=x-1$$

vrijedi $|x_1^2+x_2^2|>1$.

**3.** U pravokutnom je trokutu omjer visine i težišnice povučene iz vrha pravoga kuta jednak $\dfrac{12}{37}$. Odredite omjer duljina kateta toga trokuta.

**4.** Stigavši kući, profesor Matko je ustanovio da je zaboravio kišobran na jednom od četiriju mjesta koja je toga dana posjetio: banku, poštu, ljekarnu i trgovinu. Ljekarnik je uočio kišobran u ljekarni i poznavajući profesora, znao je da će on odmah krenuti u potragu za kišobranom. Pitao se na koliko različitih načina profesor može obići ta četiri mjesta, uz pretpostavku da se odmah nakon pronalaska kišobrana vrati kući. O kojem se broju obilazaka radi?

**5.** Duljine stranica trokuta $ABC$ su $|AB|=13$, $|BC|=14$ i $|AC|=15$. Izračunajte opseg kružnice koja dodiruje stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, a središte joj je na pravcu $BC$.

* * *

**6.** Za koje realne brojeve $a$ jednadžba $\sqrt{x^2-100}=a+x$ ima rješenje u skupu realnih brojeva?

**7.** Graf kvadratne funkcije $f(x)=ax^2+bx+c$ ima tjeme u točki $(t,t)$ i prolazi točkom $(-t,-t)$. Odredite sve vrijednosti realnog broja $t$, $t\neq 0$ tako da je $a^2+b^2+c^2=\dfrac{33}{16}$.

**Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.**

**Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske**
**Agencija za odgoj i obrazovanje**
**Hrvatsko matematičko društvo**

## ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

**3. razred – srednja škola – B varijanta**

**17. veljače 2021.**

**1.** Riješite jednadžbu $x^2 - 6x + \frac{17}{2} = \left|\sin \frac{(2021+18k)\pi}{6}\right|$, za svaki $k \in \mathbb{Z}$.

**2.** U valjak je upisan uspravni stožac tako da se njegova osnovka podudara s jednom osnovkom valjka. Vrh stošca nalazi se u središtu druge osnovke valjka. Ako mjera središnjeg kuta plašta stošca iznosi $120°$, odredite u kojem su omjeru oplošja stošca i valjka.

**3.** Za koje je prirodne brojeve $n$ vrijednost izraza $\frac{n^2-4n+4}{n+1}$ cijeli broj?

**4.** Ako je $\frac{3}{1-\sin x - \cos x} = 4$, odredite čemu je jednako $\cos 4x$.

**5.** Na tri hrpe nalaze se žetoni: na jednoj je hrpi 5 žetona, na drugoj 10 žetona i na trećoj 15 žetona. Dva igrača igraju igru. Jednim je potezom dozvoljeno jednu hrpu žetona podijeliti na dvije manje, ne nužno jednake hrpe. Igrač koji nema potez gubi. Koji će igrač pobijediti, onaj koji prvi igra ili koji igra drugi?

* * *

**6.** Riješite nejednadžbu $\log_{|x-1|} 2x \geqslant 1$ u skupu realnih brojeva.

**7.** Dan je paralelogram $ABCD$ površine $75\sqrt{3}$ u kojem vrijedi $|AB| = 10$ i $\sphericalangle ABC = 120°$. Na stranici $\overline{AD}$ dana je točka $E$, a na stranici $\overline{BC}$ točka $F$ tako da je dužina $\overline{EF}$ paralelna sa stranicom $\overline{AB}$, a površina paralelograma $ABFE$ dvostruko veća od površine paralelograma $CDEF$. Odredite mjere kutova $\sphericalangle FAB$ i $\sphericalangle EFD$.

**Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.**

**Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske**
**Agencija za odgoj i obrazovanje**
**Hrvatsko matematičko društvo**

## ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

**4. razred – srednja škola – B varijanta**

**17. veljače 2021.**

**1.** Odredite najmanje prirodne brojeve $x$ i $y$ za koje vrijedi $123_{(x)} = 73_{(y)}$, pri čemu $n_{(b)}$ označava zapis broja u bazi $b$.

**2.** Odredite rješenja jednadžbe

$$\log_4(\cos^2 x) - \log_2\left(\frac{\sin x}{4}\right) = 2$$

u intervalu $[0, 2\pi]$.

**3.** Koliko ima racionalnih članova u razvoju binoma $\left(\sqrt{2} + \sqrt[4]{2}\right)^{2021}$?

**4.** Točke $A$, $B$ i $C$ vrhovi su trokuta. Na stranici $\overline{AB}$ označeno je 6 točaka, na stranici $\overline{BC}$ označeno je 7 točaka i na stranici $\overline{CA}$ označeno je 8 točaka. Vrhovi trokuta nisu među označenim točkama. Koliko različitih četverokuta možemo odrediti čiji su vrhovi označene točke?

**5.** Ako prirodni broj $n$ pri dijeljenju s 5 daje ostatak 2, koliki ostatak pri dijeljenju s 5 daje $n^7$?

* * *

**6.** Zadane su elipsa s jednadžbom $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ i hiperbola kojoj su žarišta u tjemenima elipse na velikoj osi, a tjemena u žarištima elipse. Kolika je površina šesterokuta kojemu su vrhovi tjemena elipse na maloj osi i sjecišta zadanih krivulja?

**7.** Odredite modul i argument kompleksnog broja $z^4 : w^{12}$, gdje je

$$z = -2\sin\frac{5\pi}{8} - 2i\cos\frac{13\pi}{8},$$
$$w = \sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{16} - i\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{16}.$$

**Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.**