ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

17. veljače 2021.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-1.1.

Odredite x^y ako je $\dfrac{x}{4 \cdot 64^7} + \dfrac{1024^{-4}x}{16} = 16$ i $y = \dfrac{3^{4+n} + 5 \cdot 3^n}{3^{3+n} - 25 \cdot 3^n}$.

Rješenje.

Zapišimo u prvoj jednakosti sve brojeve kao potencije s bazom 2. Tada je

$$\frac{x}{2^2 \cdot 2^{42}} + \frac{x}{2^{40} \cdot 2^4} = 2^4, \qquad \text{2 boda}$$

$$\frac{x}{2^{44}} + \frac{x}{2^{44}} = 2^4,$$

$$x = 2^{47}. \qquad \text{1 bod}$$

Ako u brojniku i nazivniku izraza kojim je zadan y, zapišemo potencije u pogodnom obliku i izlučimo potenciju 3^n, dobivamo

$$\begin{aligned} y &= \frac{3^4 \cdot 3^n + 5 \cdot 3^n}{3^3 \cdot 3^n - 25 \cdot 3^n} \\ &= \frac{3^n(3^4+5)}{3^n(3^3-5^2)} && \text{1 bod} \\ &= \frac{86}{2} = 43. && \text{1 bod} \end{aligned}$$

Tada je

$$x^y = \left(2^{47}\right)^{43} = 2^{2021}. \qquad \text{1 bod}$$

Napomena: Rješenje se može ostaviti i u obliku $2^{43 \cdot 47}$.

Zadatak B-1.2.

Matko sakuplja sličice s portretima sportaša koje se prodaju u paketima po 5 sličica, a jedan paket košta 7 kuna. Mlađem je bratu poklonio 30% svojih sličica, pa je mama Matku kupila još 4 paketa sličica. Nakon toga je Matko bratu darovao četvrtinu trenutnog broja sličica. Za 70 kuna koje su braća dobila od bake kupili su pakete sličica i međusobno raspodijelili na jednake dijelove. Koliko sad Matko ima sličica, ako ih ima dvije više nego na početku?

Rješenje.

Neka je Matko na početku imao x sličica.

Nakon što je Matko poklonio bratu 30% sličica, ostalo mu je 70% odnosno $0.7x$.

Od mame je dobio još $4 \cdot 5 = 20$ sličica pa ima $0.7x + 20$ sličica. 1 bod

Zatim je bratu darovao četvrtinu sličica pa mu je ostalo $\frac{3}{4}(0.7x + 20)$ sličica. 1 bod

Za 70 kn može kupiti 10 paketa po 5 sličica, dakle 50 i to dijeli s bratom, pa ima još 25 sličica. 1 bod

Dakle, treba riješiti jednadžbu

$$\frac{3}{4}(0.7x + 20) + 25 = x + 2.. \qquad \text{1 bod}$$

Rješenje te jednadžbe je $x = 80$. 1 bod

Matko ima 82 sličice. 1 bod

Zadatak B-1.3.

Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 2021 koji pri dijeljenju s 5 daju ostatak 2 i koliko iznosi njihova aritmetička sredina?

Rješenje.

Najmanji prirodni broj koji pri dijeljenju s 5 daje ostatak 2 jest 2, a najveći 2017. Skup svih brojeva manjih od 2021 koji pri dijeljenju s 5 daju ostatak 2 jest 1 bod

$$A = \{2, 7, 12, 17, \ldots, 2017\}.$$

Općenito su to brojevi oblika $5k + 2$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. 1 bod

U skupu A prvi broj dobijemo za $k = 0$, a zadnji za $k = 403$ pa je ukupno $403 + 1 = 404$ broja u tomu skupu. 1 bod

Njihova je aritmetička sredina jednaka $\frac{2 + 7 + 12 + \cdots + 2017}{404}$. 1 bod

Ako je S zbroj brojeva u brojniku, tada je

$$+\begin{cases} S = 2 + 7 + 12 + \cdots + 2015 + 2017 \\ S = 2017 + 2012 + \cdots + 7 + 2 \end{cases}$$

$$\overline{2S = 2019 + 2019 + \cdots + 2019}$$

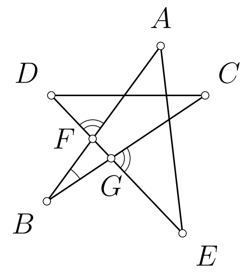
Slijedi da je $2S = 404 \cdot 2019$, tj. $S = 202 \cdot 2019$. 1 bod

Dakle, tražena aritmetička sredina je broj $\frac{2 + 7 + 12 + \cdots + 2017}{404} = \frac{2019}{2} = 1009.5$. 1 bod

Napomena: Učenik može zaključiti (bez formalnog dokaza) da je aritmetička sredina brojeva koji se međusobno razlikuju za isti broj, u ovom slučaju za 5, jednaka aritmetičkoj sredini prvog i zadnjeg broja u tomu nizu. No, za sva 3 boda mora navesti ovu činjenicu ili valjano obrazloženje. Primjerice: Aritmetička sredina brojeva a i b jednako je udaljena od broja a i broja b, pa ako su svi brojevi između a i b (uključujući a i b) jednako razmaknuti, aritmetička sredina svih brojeva u tome nizu jednaka je aritmetičkoj sredini brojeva a i b.

Zadatak B-1.4.

Točke A, B, C, D i E povezane su dužinama kao na slici. Dužine $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ sijeku dužinu $\overline{DE}$ redom u točkama F i G. Ako je $\sphericalangle ABC = 20°$ i ako je $\sphericalangle DFA = \sphericalangle CGE$, odredi $\sphericalangle EAB + \sphericalangle DEA$.



Rješenje.

Označimo s φ kut $\sphericalangle DFA = \sphericalangle CGE$.

Kutovi $\sphericalangle BFG$ i $\sphericalangle DFA$ su vršni, pa je $\sphericalangle BFG = \sphericalangle DFA = \varphi$. Isto tako, $\sphericalangle BGF$ i $\sphericalangle CGE$ su vršni kutovi, pa je $\sphericalangle BGF = \sphericalangle CGE = \varphi$. 1 bod

Zbroj kutova u trokutu BFG je $180°$, pa vrijedi

$$180° = \sphericalangle GBF + \sphericalangle BFG + \sphericalangle BGF = \sphericalangle ABC + 2\varphi = 20° + 2\varphi$$ 2 boda

odakle zaključujemo da je $\varphi = 80°$. 1 bod

Kutovi $\sphericalangle DFA$ i $\sphericalangle EFA$ su suplementarni, pa zato vrijedi $\sphericalangle EFA = 180° - \varphi$. 1 bod

Konačno, zbroj traženih kutova upravo je zbroj dva preostala kuta u trokutu AFE:

$$\sphericalangle EAB + \sphericalangle DEA = \sphericalangle EAF + \sphericalangle FEA = 180° - \sphericalangle EFA = \varphi = 80°.$$ 1 bod

Dakle, traženi zbroj iznosi $80°$.

Zadatak B-1.5.

PIN Karlovog mobitela je četveroznamenkasti prirodni broj veći od 2021 te djeljiv s 5 i 6. Ako u tome broju zamijenimo mjesta prvoj i trećoj, te drugoj i četvrtoj znamenki, dobit ćemo broj koji je od njega veći za 3960. Odredite PIN Karlovog mobitela.

Rješenje.

Budući da je traženi broj djeljiv s 5 i 6 djeljiv je također s 3 i 10 što znači da mu je zadnja znamenka 0.

Dakle, PIN je broj oblika $\overline{abc0}$. 1 bod

Prema uvjetu iz zadatka vrijedi:

$$\begin{aligned}
\overline{abc0} &= \overline{c0ab} - 3960 \\
1000a + 100b + 10c &= 1000c + 10a + b - 3960 \qquad \text{1 bod} \\
990a + 99b &= 990c - 3960 \\
10a + b &= 10c - 40 \qquad \text{1 bod}
\end{aligned}$$

Desna je strana djeljiva s 10, pa b mora biti 0 i vrijedi $a = c - 4$. 1 bod

Također, zbroj znamenki $a + c$ mora biti djeljiv s 3, pa uvrštavanjem svih mogućnosti za $c = 5, 6, 7, 8, 9$ dobivamo rješenja $c = 5$, $a = 1$ ili $c = 8$ i $a = 4$. 1 bod

Prvu opciju odbacujemo jer znamenka a mora biti veća ili jednaka 2, pa je traženi PIN jednak 4080. 1 bod

Zadatak B-1.6.

Sva slova jednakosti $(a + b)(c + d)(e + f)(g + h) = 5005$ treba zamijeniti različitim brojevima od 1 do 8 tako da jednakost bude točna. Na koliko je načina to moguće napraviti?

Rješenje.

Rastav broja 5005 na proste faktore jest $5005 = 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. 1 bod

Stoga je svaka zagrada u zadanoj jednakosti jednaka jednom od prostih faktora 5, 7, 11, 13. Njih je moguće napisati kao zbroj dva broja od 1 do 8 na sljedeća dva načina:

1. Ako je $5 = 1 + 4$, tada mora biti $7 = 2 + 5$, $11 = 3 + 8$, $13 = 6 + 7$. 2 boda
2. Ako je $5 = 2 + 3$, jedina je mogućnost da je $7 = 1 + 6$, $11 = 4 + 7$, $13 = 5 + 8$. 2 boda

U oba slučaja faktore, odnosno zagrade možemo složiti na $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ načina. 2 boda

U svakoj od zagrada brojevima možemo zamijeniti mjesta pa je takvih rasporeda $2^4 = 16$. 2 boda

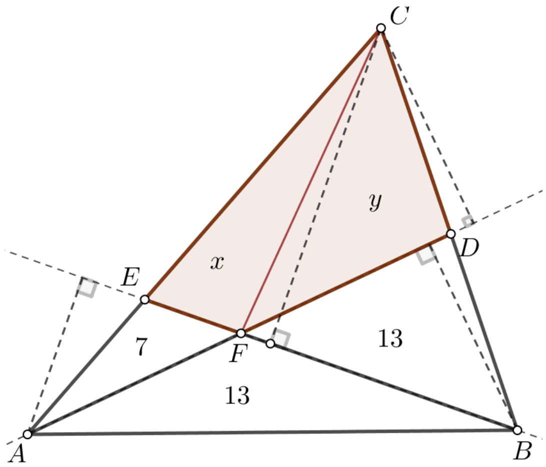
Ukupno je mogućih razmještaja $2 \cdot 24 \cdot 16 = 768$. 1 bod

Napomena: Ako učenik nije uzeo u obzir međusobni razmještaj zagrada i pribrojnika unutar zagrada može dobiti najviše 5 bodova.
Ako učenik samo nije uzeo u obzir zamjenu mjesta pribrojnika, pa je dobio ukupno rješenje 48, dodijeliti 8 bodova.
Ako učenik samo nije uzeo u obzir razmještaj zagrada, pa je dobio ukupno rješenje 32, dodijeliti 8 bodova.

Zadatak B-1.7.

U trokutu ABC točka D nalazi se na stranici $\overline{BC}$, a točka E na stranici $\overline{AC}$. Dužine $\overline{BE}$ i $\overline{AD}$ sijeku se u točki F, a dužina $\overline{BF}$ dijeli površinu trokuta ABD na dva jednaka dijela. Ako je površina trokuta AFE jednaka 7, a površina trokuta AFB 13, izračunajte površine trokuta CEF i CFD.

Rješenje.



Neka je x površina trokuta CEF, a y površina trokuta CFD.
Trokuti AFB i FBD imaju zajedničku visinu iz vrha B, a budući da imaju iste površine imaju i iste duljine osnovica na koju je spuštena ta visina. 1 bod
Dakle, vrijedi $|AF| = |FD|$. 1 bod
To znači da trokuti AFC i FDC imaju iste osnovice na koje je spuštena zajednička visina iz vrha C, pa imaju iste površine, odnosno:

$$y = x + 7. \qquad (*)$$ 2 boda

Uočimo da trokuti AFE i ABF imaju zajedničku visinu iz vrha A, što znači da je omjer njihovih površina jednak omjeru duljina osnovica $\overline{EF}$ i $\overline{FB}$:

$$\frac{|EF|}{|FB|} = \frac{7}{13}.$$ 2 boda

S druge strane, trokuti EFC i FBC imaju zajedničku visinu na te iste osnovice pa je omjer njihovih površina jednak omjeru duljina tih osnovica. Vrijedi:

$$\frac{x}{y+13} = \frac{7}{13},$$ 2 boda

što zajedno s $(*)$ daje

$$\frac{x}{x+20} = \frac{7}{13},$$ 1 bod

odnosno $13x = 7x + 140 \Rightarrow 6x = 140$, te su površine $x = \dfrac{70}{3}$ i $y = \dfrac{70}{3} + 7 = \dfrac{91}{3}$. 1 bod

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

17. veljače 2021.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-2.1.

Izračunajte: $\left(\sqrt{43}+\sqrt{47}\right)^{-2} \cdot \left(43^{-1}+47^{-1}\right)+\dfrac{2}{\left(\sqrt{43}+\sqrt{47}\right)^{3}} \cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{43}}+\dfrac{1}{\sqrt{47}}\right)$.

Rješenje.

Zapišimo dani izraz bez negativnih eksponenata i provedimo računske operacije kako slijedi:

$\dfrac{1}{\left(\sqrt{43}+\sqrt{47}\right)^{2}} \cdot\left(\dfrac{1}{43}+\dfrac{1}{47}\right)+\dfrac{2}{\left(\sqrt{43}+\sqrt{47}\right)^{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{43}+\sqrt{47}}{\sqrt{43} \cdot \sqrt{47}}=$ 1 bod

$\dfrac{1}{\left(\sqrt{43}+\sqrt{47}\right)^{2}} \cdot \dfrac{43+47}{43 \cdot 47}+\dfrac{2}{\left(\sqrt{43}+\sqrt{47}\right)^{2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{43} \cdot \sqrt{47}}=$ 1 bod

$\dfrac{43+47+2 \cdot \sqrt{43} \cdot \sqrt{47}}{\left(\sqrt{43}+\sqrt{47}\right)^{2} \cdot 43 \cdot 47}=$ 2 boda

$\dfrac{\left(\sqrt{43}+\sqrt{47}\right)^{2}}{\left(\sqrt{43}+\sqrt{47}\right)^{2} \cdot 43 \cdot 47}=$ 1 bod

$\dfrac{1}{2021}$. 1 bod

Zadatak B-2.2.

Odredite sve realne brojeve p tako da za rješenja x_1, x_2 kvadratne jednadžbe

$$x(2x-3p)-3p(x-3p)=x-1$$

vrijedi $|x_1^2+x_2^2|>1$.

Rješenje.

Danu jednadžbu zapišimo u općem obliku: $2x^2-(6p+1)x+9p^2+1=0$. 1 bod

Vrijedi da je $\left|x_1^2+x_2^2\right|=\left|(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right|$. 1 bod

Primijenimo Vieteove formule

$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=\dfrac{6p+1}{2}$, $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}=\dfrac{9p^2+1}{2}$. 1 bod

Tada je

$$\left|x_1^2+x_2^2\right| = \left|\frac{(6p+1)^2}{4} - (9p^2+1)\right| = \left|\frac{12p-3}{4}\right|.$$ 1 bod

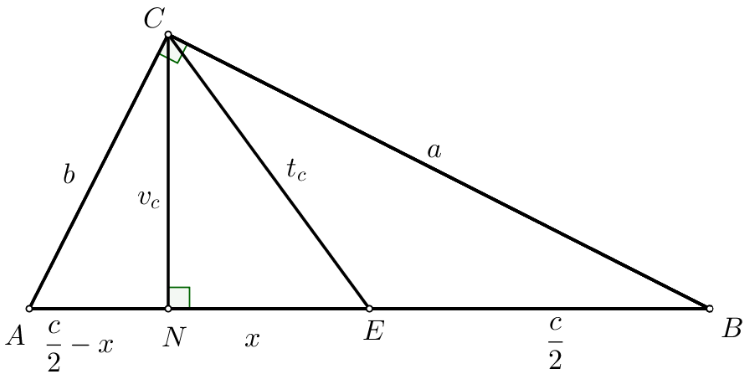
Iz $\left|\frac{12p-3}{4}\right| > 1$ dobivamo $p \in \left\langle -\infty, -\frac{1}{12}\right\rangle \cup \left\langle \frac{7}{12}, +\infty\right\rangle$. 2 boda

Zadatak B-2.3.

U pravokutnom je trokutu omjer visine i težišnice povučene iz vrha pravoga kuta jednak $\frac{12}{37}$. Odredite omjer duljina kateta toga trokuta.

Rješenje.

Neka su A, B, C vrhovi danog trokuta, a N nožište visine iz vrha pravog kuta C.



Uz oznake kao na slici, iz $v_c : t_c = 12 : 37$ slijedi $v_c = 12k$ i $t_c = 37k$, gdje je $k > 0$ realan broj.

Kako je u pravokutnom trokutu središte opisane kružnice u polovištu hipotenuze, vrijedi $\frac{c}{2} = t_c = 37k$, odakle dobivamo da je $c = 74k$. 1 bod

Iz pravokutnog trokuta CNE primjenom Pitagorina poučka dobivamo

$$x^2 = t_c^2 - v_c^2 = (37k)^2 - (12k)^2 = (37k-12k)(37k+12k) = 25k \cdot 49k,$$

odakle slijedi da je $x = 35k$. 2 boda

Kako je $\triangle ANC \sim \triangle CNB$, dobivamo:

$$\frac{a}{v_c} = \frac{b}{\frac{c}{2}-x}$$ 2 boda

$$\frac{a}{b} = \frac{v_c}{\frac{c}{2}-x} = \frac{12k}{37k-35k} = 6 \text{ ili } \frac{b}{a} = \frac{1}{6}.$$ 1 bod

Napomena: Umjesto sličnosti učenici u zadnja dva koraka rješenja mogu koristiti i tangens kuta pri vrhu A ili B.

Isto tako, umjesto sličnosti, učenici mogu i primjenom Pitagorina poučka na trokut ANC dobiti

$$b=\sqrt{v_c^2+\left(\frac{c}{2}-x\right)^2}=\sqrt{(12k)^2+(37k-35k)^2}=\sqrt{148k^2}=2k\sqrt{37}$$

te analogno primjenom Pitagorina poučka na trokut CNB

$a=\sqrt{v_c^2+\left(\frac{c}{2}+x\right)^2}=\sqrt{(12k)^2+(37k+35k)^2}=\sqrt{144k^2+5184k^2}=\sqrt{5328k^2}=12k\sqrt{37}$.

Zadatak B-2.4.

Stigavši kući, profesor Matko je ustanovio da je zaboravio kišobran na jednom od četiriju mjesta koja je toga dana posjetio: banku, poštu, ljekarnu i trgovinu. Ljekarnik je uočio kišobran u ljekarni i poznavajući profesora, znao je da će on odmah krenuti u potragu za kišobranom. Pitao se na koliko različitih načina profesor može obići ta četiri mjesta, uz pretpostavku da se odmah nakon pronalaska kišobrana vrati kući. O kojem se broju obilazaka radi?

Rješenje.

Budući da je kišobran u ljekarni, profesor je prije dolaska u ljekarnu mogao obići još jedno, dva ili tri mjesta.

Broj obilazaka jednog mjesta jednak je 3: PBT (**P**ošta, **B**anka, **T**rgovina). 1 bod

Broj obilazaka dva mjesta jednak je 6: PB, BP, PT, TP, BT, TB. 2 boda

Također i broj obilazaka triju mjesta jednak je 6: PBT, PTB, TBP, TPB, BTP, BPT.

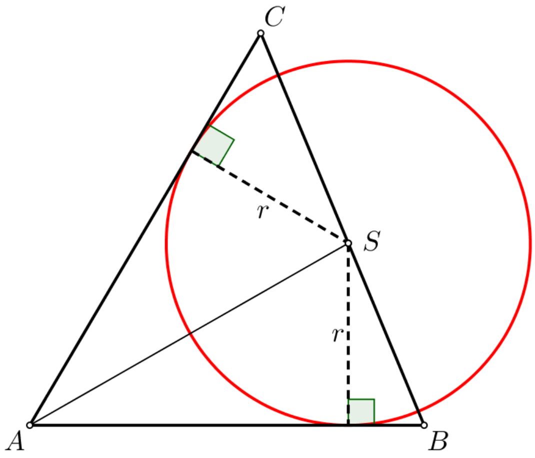
2 boda

Dakle, ukupan broj obilazaka koji završavaju u ljekarni jednak je $1+3+6+6=16$. 1 bod

Zadatak B-2.5.

Duljine stranica trokuta ABC su $|AB|=13$, $|BC|=14$ i $|AC|=15$. Izračunajte opseg kružnice koja dodiruje stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, a središte joj je na pravcu BC.

Rješenje.



Primjenom Heronove formule na trokut ABC dobivamo

$s=\dfrac{13+14+15}{2}=21$ cm, a $P(ABC)=\sqrt{21\cdot8\cdot7\cdot6}=84\ \mathrm{cm}^2$. 1 bod

Vrijedi:

$P(ABS)=\dfrac{|AB|\cdot r}{2}=\dfrac{13r}{2}$,

$P(ASC)=\dfrac{|AC|\cdot r}{2}=\dfrac{15r}{2}$. 2 boda

Kako je površina trokuta ABC jednaka zbroju površina trokuta ABS i ASC, dobivamo

$\dfrac{13r}{2}+\dfrac{15r}{2}=84$, tj. $r=6$ cm. 2 boda

Opseg kružnice je $O=2r\pi=12\pi$ cm. 1 bod

Zadatak B-2.6.

Za koje realne brojeve a jednadžba $\sqrt{x^2-100}=a+x$ ima rješenje u skupu realnih brojeva?

Rješenje.

Dva su uvjeta na rješenje: $x^2-100\geqslant0$ i $a+x\geqslant0$. 2 boda

Kvadriranjem zadane jednadžbe dobivamo

$x^2-100=a^2+2ax+x^2$, odnosno $x=\dfrac{-a^2-100}{2a}$, $a\neq0$. 2 boda

Dobiveni izraz za x mora zadovoljavati postavljene uvjete pa je

$\left(\dfrac{-a^2-100}{2a}\right)^2-100\geqslant0$ i $a+\dfrac{-a^2-100}{2a}\geqslant0$.

Nakon sređivanja, iz prvog uvjeta dobijemo $\dfrac{(a^2-100)^2}{4a^2}\geqslant0$ što vrijedi za svaki realan broj $a\neq0$. 2 boda

Iz drugog uvjeta slijedi $\dfrac{a^2-100}{2a}\geqslant0$ odnosno $a\in[-10,0\rangle\cup[10,+\infty\rangle$. 3 boda

Konačno, presjek skupova rješenja ovih dvaju uvjeta je skup svih realnih brojeva a za koje dana jednadžba ima rješenje, odnosno skup $a \in [-10, 0\rangle \cup [10, +\infty\rangle$. 1 bod

Napomena:

Učeniku koji je postavio oba uvjeta, ali nije provjerio jedan od njih: za prvi oduzeti dva boda, a za drugi 3 boda.

Učenik je mogao riješiti jednadžbu i bez postavljanja uvjeta pa provjerom doći do jednakosti $\sqrt{\left(\frac{a^2-100}{2a}\right)^2} = \frac{a^2-100}{2a}$, odnosno $\left|\frac{a^2-100}{2a}\right| = \frac{a^2-100}{2a}$ što će biti točno samo ako je $\frac{a^2-100}{2a} \geqslant 0$, odnosno $a \in [-10, 0\rangle \cup [10, +\infty\rangle$. Uz ovaj postupak provjere i dobiveno točno rješenje za x, učeniku treba dodijeliti sve bodove.

Zadatak B-2.7.

Graf kvadratne funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ ima tjeme u točki (t, t) i prolazi točkom $(-t, -t)$. Odredite sve vrijednosti realnog broja t, $t \neq 0$ tako da je $a^2+b^2+c^2 = \frac{33}{16}$.

Rješenje.

Apscisa tjemena kvadratne funkcije jest $t = -\frac{b}{2a}$ pa je $b = -2at$. 1 bod

Uvrstimo koordinate točaka (t, t) i $(-t, -t)$ u jednadžbu grafa. Tada je $t = at^2+bt+c$, odnosno $t = -at^2 + c$ (zbog $b = -2at$) i 1 bod

$-t = at^2 - bt + c$ odnosno $t = -3at^2 - c$. 1 bod

Slijedi $4at^2 = -2t$, pa je $a = -\frac{1}{2t}$. 1 bod

Odatle dobivamo $b = -2at = 1$, a $c = t + at^2 = \frac{t}{2}$. 2 boda

Nakon što dobivene izraze za a, b i c uvrstimo u jednakost $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{33}{16}$ dobivamo jednadžbu $\frac{1}{4t^2} + 1 + \frac{t^2}{4} = \frac{33}{16}$, 1 bod

koja se nakon sređivanja svodi na bikvadratnu jednadžbu $4t^4 - 17t^2 + 4 = 0$. 1 bod

Tada je $t^2 = 4$, $t^2 = \frac{1}{4}$, odnosno 1 bod

$t \in \left\{-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right\}$. 1 bod

Napomena:

Učenik koeficijente a, b i c može dobiti i na sljedeće načine (za što dobiva označene bodove):

1. način:

Apscisa tjemena kvadratne funkcije jest $t = -\frac{b}{2a}$ pa je $b = -2at$. 1 bod

Ordinata tjemena kvadratne funkcije jest $t = \frac{4ac-b^2}{4a}$, odakle uz $b = -2at$ dobivamo $c = at^2 + t$. 1 bod

Uvrstimo li koordinate točke $(-t,-t)$ u jednadžbu grafa dobivamo $-t=at^2-bt+c$, odakle uz $b=-2at$ i $c=at^2+t$ slijedi 1 bod

$-t=at^2+2at^2+at^2+t$, odnosno $a=-\dfrac{1}{2t}$ 1 bod

$b=-2at=1$, a $c=t+at^2=\dfrac{t}{2}$. 2 boda

2. način:

Funkciju f možemo zapisati u obliku $f(x)=a(x-x_0)^2+y_0$ pri čemu je (x_0,y_0) tjeme grafa funkcije. Tada je $f(x)=a(x-t)^2+t$. 2 boda

Uvrstimo li koordinate točke $(-t,-t)$ u jednadžbu grafa dobivamo $-t=4at^2+t$, odnosno $a=-\dfrac{1}{2t}$. 2 boda

Stoga je $f(x)=-\dfrac{1}{2t}x^2+x+\dfrac{t}{2}$, pa je $b=1$, $c=\dfrac{t}{2}$. 2 boda

3. način:

Budući da je točka (t,t) tjeme grafa kvadratne funkcije, a točka $(-t,-t)$ pripada grafu te funkcije, tada zbog simetrije točka $(3t,-t)$ također pripada grafu te funkcije. 2 boda

Uvrstimo li koordinate tih točaka u $f(x)=ax^2+bx+c$ dobivamo sustav
$at^2+bt+c=t$
$at^2-bt+c=-t$
$9at^2+3bt+c=-t$ 1 bod

Pomnožimo li prvu jednadžbu s -1 i zbrojimo li s drugom dobivamo $2bt=2t \Rightarrow b=1$ $(t\neq 0)$. 1 bod

Uvrstimo li $b=1$ u drugu i treću jednadžbu slijedi
$at^2+c=0$
$9at^2+c=-4t$.
Odavde dobivamo: $a=-\dfrac{1}{2t}$ i $c=\dfrac{t}{2}$. 2 boda

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

17. veljače 2021.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-3.1.

Riješite jednadžbu $x^2 - 6x + \frac{17}{2} = \left|\sin \frac{(2021 + 18k)\pi}{6}\right|$, za svaki $k \in \mathbb{Z}$.

Rješenje.

Odredimo vrijednost izraza na desnoj strani zadane jednadžbe.

$$\left|\sin \frac{(2021+18k)\pi}{6}\right| = \left|\sin\left(\frac{2021\pi}{6} + 3k\pi\right)\right| = \qquad \text{1 bod}$$

$$= \left|\sin\left(\frac{5\pi}{6} + 3k\pi\right)\right|. \qquad \text{1 bod}$$

Ako je k paran cijeli broj, $\sin\left(\frac{5\pi}{6} + 3k\pi\right)$ ima istu vrijednost kao i $\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$, a ako je k neparan cijeli broj kao i $\sin\frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$. 1 bod

Stoga je $\left|\sin\left(\frac{5\pi}{6} + 3k\pi\right)\right| = \frac{1}{2}$ pa se zadana jednadžba svodi na kvadratnu

$x^2 - 6x + \frac{17}{2} = \frac{1}{2}$, tj. 1 bod

$x^2 - 6x + 8 = 0$. 1 bod

Slijedi $x_1 = 2, x_2 = 4$. 1 bod

Zadatak B-3.2.

U valjak je upisan uspravni stožac tako da se njegova osnovka podudara s jednom osnovkom valjka. Vrh stošca nalazi se u središtu druge osnovke valjka. Ako mjera središnjeg kuta plašta stošca iznosi 120°, odredite u kojem su omjeru oplošja stošca i valjka.

Rješenje.

Oplošje valjka polumjera R i visine H jest $O_V = 2R\pi\left(R + H\right)$.

Oplošje stošca iste osnovke, visine H i izvodnice s jest $O_S = R\pi\left(R + s\right)$.

Tada je $\dfrac{O_S}{O_V} = \dfrac{R+s}{2(R+H)}$. 2 boda

Kako je središnji kut plašta $\alpha = 120°$, imamo:
$\dfrac{360°}{120°} = \dfrac{s}{R}$, pa je $R = \dfrac{1}{3}s$. 2 boda

$H = \sqrt{s^2 - R^2}$, pa je $H = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}s$. 1 bod

Dakle:
$\dfrac{O_S}{O_V} = \dfrac{R+s}{2(R+H)} = \dfrac{2}{1+2\sqrt{2}} = \dfrac{-2+4\sqrt{2}}{7}$. 1 bod

Napomena: Učenik ne mora racionalizirati nazivnik u konačnom rješenju da bi dobio sve bodove.

Zadatak B-3.3.

Za koje je prirodne brojeve n vrijednost izraza $\dfrac{n^2-4n+4}{n+1}$ cijeli broj?

Rješenje.

$\dfrac{n^2-4n+4}{n+1} = \dfrac{(n+1)(n-5)+9}{n+1} = n - 5 + \dfrac{9}{n+1}$ 2 boda

Izraz $n - 5 + \dfrac{9}{n+1}$ je cijeli broj ako je $\dfrac{9}{n+1} \in \mathbb{Z}$.

To je moguće samo ako je $n+1$ djelitelj broja 9, odnosno $n + 1 \in \{\pm1, \pm3, \pm9\}$. 2 boda

Tada je $n \in \{-2, 0, -4, 2, -10, 8\}$. 1 bod

Budući da je $n \in \mathbb{N}$, traženi brojevi su $n \in \{2, 8\}$. 1 bod

Zadatak B-3.4.

Ako je $\dfrac{3}{1-\sin x - \cos x} = 4$, odredite čemu je jednako $\cos 4x$.

Rješenje.

Zadanu jednadžbu $\dfrac{3}{1-\sin x-\cos x} = 4$ nakon svođenja na oblik

$\sin x + \cos x = \dfrac{1}{4}$ kvadriramo. Slijedi 1 bod

$\left(\sin x + \cos x\right)^2 = \dfrac{1}{16}$,

$\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = \dfrac{1}{16}$, odnosno 2 boda

$1 + 2\sin x\cos x = \dfrac{1}{16}$. Odatle je

$2 \sin x \cos x = -\dfrac{15}{16}$, odnosno 1 bod

$\sin 2x = -\dfrac{15}{16}$. Tada je 1 bod

$\cos 4x = 1 - \sin^2 2x = 1 - 2 \cdot \dfrac{225}{256} = -\dfrac{194}{256} = -\dfrac{97}{128}$. 1 bod

Zadatak B-3.5.

Na tri hrpe nalaze se žetoni: na jednoj je hrpi 5 žetona, na drugoj 10 žetona i na trećoj 15 žetona. Dva igrača igraju igru. Jednim je potezom dozvoljeno jednu hrpu žetona podijeliti na dvije manje, ne nužno jednake hrpe. Igrač koji nema potez gubi. Koji će igrač pobijediti, onaj koji prvi igra ili koji igra drugi?

Rješenje.

Nakon svakog poteza je broj hrpa veći za jedan. 2 boda

Na početku su 3 hrpe, a na kraju $5 + 10 + 15 = 30$. 1 bod

To znači da će biti odigrano 27 poteza. 1 bod

Pobjeđuje prvi igrač jer će odigrati zadnji potez. 2 boda

Napomena: Ukoliko učenik do mogućih 27 poteza i pobjede prvog igrača dođe raspisivanjem neke od varijanti raspodjele hrpi, a nema zaključak da se svakim potezom broj hrpi povećava za 1, može dobiti maksimalno 4 boda.

Zadatak B-3.6.

Riješite nejednadžbu $\log_{|x-1|} 2x \geqslant 1$ u skupu realnih brojeva.

Rješenje.

Uvjeti: $2x > 0, |x-1| > 0, |x-1| \neq 1$ pa mora biti $x > 0, x \neq 1, x \neq 2$ 1 bod

1. slučaj: $|x-1| > 1$, tj. $x > 2$

$$\begin{aligned} \log_{|x-1|} 2x &\geqslant 1 \\ 2x &\geqslant |x-1| \\ 2x &\geqslant x-1 \\ x &\geqslant -1 \end{aligned}$$

Rješenje 1. slučaja: $x \geqslant -1$ i $x > 2$ daje $x > 2$. 2 boda

2. slučaj: $0 < |x-1| < 1$ pa mora biti $0 < x < 2$ i $x \neq 1$.

$$\begin{aligned} \log_{|x-1|} 2x &\geqslant 1 \\ 2x &\leqslant |x-1| \end{aligned}$$

I. Ako je $0 < x < 1$ onda je $2x \leqslant -x + 1$, tj. $3x \leqslant 1$

Iz $x \leqslant \dfrac{1}{3}$ i $0 < x < 1$ slijedi $0 < x \leqslant \dfrac{1}{3}$ 2 boda

II. Ako je $1 < x < 2$ onda je $2x \leqslant x - 1$, tj. $x \leqslant -1$. 1 bod

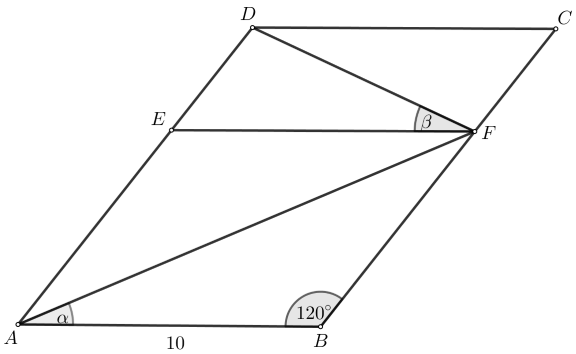
U ovom slučaju presjek je prazan skup. 2 boda

Konačno rješenje: $x \in \left\langle 0, \frac{1}{3} \right] \cup \langle 2, +\infty \rangle$. 2 boda

Zadatak B-3.7.

Dan je paralelogram $ABCD$ površine $75\sqrt{3}$ u kojem vrijedi $|AB| = 10$ i $\sphericalangle ABC = 120°$. Na stranici $\overline{AD}$ dana je točka E, a na stranici $\overline{BC}$ točka F tako da je dužina $\overline{EF}$ paralelna sa stranicom $\overline{AB}$, a površina paralelograma $ABFE$ dvostruko veća od površine paralelograma $CDEF$. Odredite mjere kutova $\sphericalangle FAB$ i $\sphericalangle EFD$.

Prvo rješenje.



Neka je $\alpha = \sphericalangle FAB$, $\beta = \sphericalangle EFD$. Označimo površine paralelograma $ABFE$ i $EFCD$ s P_1 i P_2 redom. Vrijedi $P_1 : P_2 = 2 : 1$, odnosno $|AB||AE| \sin 60° = 2|EF||ED| \sin 60°$.

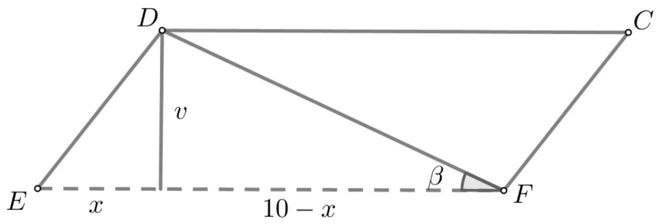
Iz $|AB| = |EF| = 10$ slijedi $|AE| = 2|ED|$. 2 boda

Nadalje, $P_{ABCD} = |AB||AD| \sin 60°$ pa iz $75\sqrt{3} = |AB||AD| \sin 60°$ slijedi $|AD| = 15$.

Sada je $|AD| = |AE| + |ED| = 3|ED|$, odnosno $|ED| = 5$ i $|AE| = 10$. 2 boda

Dakle, paralelogram $ABEF$ je romb pa mu dijagonale raspolavljaju kutove. Slijedi $\alpha = \frac{60°}{2} = 30°$. 2 boda

Promotrimo sada trokut DEF. Znamo da je mjera kuta pri vrhu E jednaka $60°$. Spustimo visinu v iz vrha D.



$\sin 60° = \frac{v}{|ED|} \Rightarrow v = |ED| \sin 60° = 2.5\sqrt{3}$ i $\cos 60° = \frac{x}{|ED|} \Rightarrow x = |ED| \cos 60° = 2.5$ 2 boda

Sada je $10-x=7.5$ pa je $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{v}{10-x}=\dfrac{2.5\sqrt{3}}{7.5}\Rightarrow\beta=30^\circ$. 2 boda

Drugo rješenje.

Slika i oznake su kao u prvom rješenju.

Označimo površine paralelograma $ABFE$ i $EFCD$ s P_1 i P_2 redom. Vrijedi $P_1:P_2=2:1$, odnosno $|AB||AE|\sin 60^\circ=2|EF||ED|\sin 60^\circ$. Iz $|AB|=|EF|=10$ slijedi $|AE|=2|ED|$. 2 boda

Nadalje, $P_{ABCD}=|AB||AD|\sin 60^\circ$ pa iz $75\sqrt{3}=|AB||AD|\sin 60^\circ$ slijedi $|AD|=15$.

Sada je $|AD|=|AE|+|ED|=3|ED|$, odnosno $|ED|=5$ i $|AE|=10$. 2 boda

Dakle, paralelogram $ABEF$ je romb pa mu dijagonale raspolavljaju kutove. Slijedi $\alpha=\dfrac{60^\circ}{2}=30^\circ$. 2 boda

Promotrimo sada trokut DEF. Is poučka o kosinusu slijedi

$|DE|^2=10^2+5^2-2\cdot 10\cdot 5\cos 60^\circ$ pa je $|DE|=5\sqrt{3}$. 2 boda

Sada po poučku o sinusima vrijedi $\dfrac{|DF|}{\sin 60^\circ}=\dfrac{|DE|}{\sin\beta}$.

Odatle je $\sin\beta=\frac{1}{2}$ pa je $\beta=30^\circ$. 2 boda

Napomena: Učenik može do duljina $|AE|$ i $|ED|$ doći i na drugačiji način, koristeći zadanu površinu. Za svaku točno izračunatu vrijednost tih duljina dobiva 2 boda.

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

17. veljače 2021.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-4.1.

Odredite najmanje prirodne brojeve x i y za koje vrijedi $123_{(x)} = 73_{(y)}$, pri čemu $n_{(b)}$ označava zapis broja u bazi b.

Rješenje.

Za baze x i y treba vrijediti $x \geqslant 4$ i $y \geqslant 8$. 1 bod

Iz $123_{(x)} = 73_{(y)}$ slijedi:

$$x^2 + 2x + 3 = 7y + 3, \quad \text{1 bod}$$

$$x(x+2) = 7y. \quad \text{1 bod}$$

S obzirom da je desna strana posljednje jednakosti djeljiva sa 7, zaključujemo da je $x(x+2)$ djeljivo sa 7, pa je $x = 7$ ili $x + 2 = 7$, odnosno $x = 7$ ili $x = 5$. 1 bod

Ako je $x = 5$, tada je $y = 5$, što nije rješenje zbog uvjeta $y \geqslant 8$. 1 bod

Ako je $x = 7$, tada je $y = 9$, što daje rješenje zadatka. 1 bod

Zadatak B-4.2.

Odredite rješenja jednadžbe

$$\log_4(\cos^2 x) - \log_2\left(\frac{\sin x}{4}\right) = 2$$

u intervalu $[0, 2\pi]$.

Rješenje.

Zbog logaritama uvjeti na rješenje su: $\cos x \neq 0$ i $\sin x > 0$. 1 bod

Vrijedi:

$$\frac{1}{2}\log_2(\cos^2 x) - (\log_2 \sin x - \log_2 4) = 2,$$

$$\log_2(\sqrt{\cos^2 x}) - \log_2 \sin x = 0, \quad \text{2 boda}$$

$$\log_2 \frac{|\cos x|}{\sin x} = 0,$$

$$|\cos x| = \sin x. \quad \text{1 bod}$$

Rješenja dane jednadžbe su $x = \frac{\pi}{4}$ i $x = \frac{3\pi}{4}$. 2 boda

Napomena: Ako je učenik izostavio apsolutnu vrijednost, ali je točno riješio jednadžbu $\cos x = \sin x$ uzimajući u obzir uvjete, oduzeti najviše 1 bod.

Ako je učenik dobio rješenja u trećem i četvrtom kvadrantu, može dobiti maksimalno 5 bodova.

Ako učenik nije na početku napisao uvjete, ali ih je na kraju provjerio i odbacio nevažeća rješenja, dodijeliti sve bodove.

Zadatak B-4.3.

Koliko ima racionalnih članova u razvoju binoma $\left(\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}\right)^{2021}$?

Rješenje.

Vrijedi:

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}\right)^{2021}=\sum_{k=0}^{2021}\binom{2021}{k}(\sqrt{2})^{2021-k}\cdot(\sqrt[4]{2})^{k}$$ 1 bod

odnosno opći član razvoja binoma je jednak

$$\binom{2021}{k}(\sqrt{2})^{2021-k}\cdot(\sqrt[4]{2})^{k}=\binom{2021}{k}\cdot 2^{\frac{4042-k}{4}}.$$ 1 bod

Navedeni opći član će biti racionalan za $\frac{4042-k}{4}\in\mathbb{N}$, odnosno ako je $4042-k$ djeljivo s 4, $k\in\{0,1,\ldots,2021\}$. 1 bod

S obzirom da 4042 daje ostatak 2 pri dijeljenju s 4, slijedi da i k treba davati ostatak 2 pri djeljenju s 4, pa je $k\in\{2,6,10,\ldots,2018\}$. 2 boda

Kako je $2=4\cdot 0+2$, $6=4\cdot 1+2$, ..., $2018=4\cdot 504+2$, traženih racionalnih članova ima 505. 1 bod

Zadatak B-4.4.

Točke A, B i C vrhovi su trokuta. Na stranici $\overline{AB}$ označeno je 6 točaka, na stranici $\overline{BC}$ označeno je 7 točaka i na stranici $\overline{CA}$ označeno je 8 točaka. Vrhovi trokuta nisu među označenim točkama. Koliko različitih četverokuta možemo odrediti čiji su vrhovi označene točke?

Rješenje.

Da bismo dobili četverokut kojemu su vrhovi označene točke, imamo dvije mogućnosti: 1 bod

a) Dva vrha četverokuta odabiremo na jednoj stranici trokuta, a dva na jednoj od preostale dvije stranice.

   Takvih četverokuta ima $\binom{6}{2}\binom{7}{2}+\binom{7}{2}\binom{8}{2}+\binom{6}{2}\binom{8}{2}=1323$. 2 boda

b) Dva vrha četverokuta odabiremo na jednoj stranici trokuta, a po jedan vrh na preostale dvije stranice trokuta.

   Takvih četverokuta ima $\binom{6}{2}\cdot 7\cdot 8+\binom{7}{2}\cdot 6\cdot 8+\binom{8}{2}\cdot 6\cdot 7=3024$. 2 boda

Ukupno je traženih četverokuta $1323 + 3024 = 4347$. 1 bod

Napomena: Učenik dobiva:

- 1 bod za podjelu na dva slučaja
- 1 bod ako zna izračunat broja načina odabira dva vrha na jednoj stranici
- 1 bod za točno postavljene umnoške pod a)
- 1 bod za točno postavljene umnoške pod b)
- 1 bod za točno postavljen zbroj svih umnožaka pod a) i b)
- 1 bod za točan konačan rezultat

Zadatak B-4.5.

Ako prirodni broj n pri dijeljenju s 5 daje ostatak 2, koliki ostatak pri dijeljenju s 5 daje n^7?

Prvo rješenje.

S obzirom da n pri dijeljenju s 5 daje ostatak 2, vrijedi:

n završava znamenkom 2 ili 7; 1 bod

n^2 završava znamenkom 4 ili 9; 1 bod

n^3 završava znamenkom 8 ili 3; 1 bod

n^4 završava znamenkom 6 ili 1; 1 bod

$n^7 = n^3 \cdot n^4$ završava znamenkom 8 ili 3. 1 bod

Iz prethodnog retka slijedi da n^7 pri dijeljenju s 5 daje ostatak 3. 1 bod

Drugo rješenje.

Vrijedi $n = 5k + 2$, $k \in \mathbb{N}$, pa je $n^7 = (5k+2)^7 = \sum_{i=0}^{7} \binom{7}{i} (5k)^{7-i} \cdot 2^i$. 2 boda

Za $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ odgovarajući članovi u raspisu binoma sadrže faktor 5 pa su djeljivi s 5. 1 bod

Zadnji član u razvoju binoma (za $i = 7$) je jednak $2^7 = 128$. 1 bod

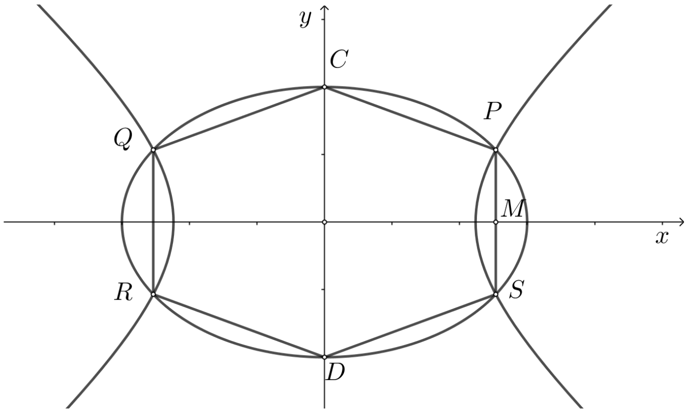
Kako je $128 = 125 + 3$, slijedi da se n^7 može zapisati kao $5m + 125 + 3 = 5(m + 25) + 3$, pa je ostatak od n^7 pri dijeljenju s 5 jednak 3. 2 boda

Zadatak B-4.6.

Zadane su elipsa s jednadžbom $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ i hiperbola kojoj su žarišta u tjemenima elipse na velikoj osi, a tjemena u žarištima elipse. Kolika je površina šesterokuta kojemu su vrhovi tjemena elipse na maloj osi i sjecišta zadanih krivulja?

Rješenje.

Označimo s C i D tjemena elipse na maloj osi, a s P, Q, R i S točke presjeka elipse i hiperbole.



1 bod

Za elipsu $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ je $e=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$, pa su žarišta elipse u točkama $F_1(\sqrt{5},0)$ i $F_2(-\sqrt{5},0)$. 1 bod

Neka je jednadžba hiperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Kako su joj tjemena u točkama F_1 i F_2 slijedi $a=\sqrt{5}$, a s obzirom da su joj žarišta u točkama $(-3,0)$ i $(3,0)$ slijedi $b^2=3^2-(\sqrt{5})^2=4$. Jednadžba hiperbole je $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$. 2 boda

Za točke presjeka (x,y) elipse i hiperbole vrijedi $x=\pm\frac{3}{7}\sqrt{35}$, $y=\pm\frac{2}{7}\sqrt{14}$. 2 boda

Ako s O označimo ishodište koordinatnog sustava, a s M sjecište dužine $\overline{PS}$ s osi x, vrijedi da je površina šesterokuta $PCQRDS$ jednaka četverostrukoj površini trapeza $OMPC$. 1 bod

Površina trapeza $OMPC$ je jednaka $P_1=\frac{|\overline{PM}|+|\overline{CO}|}{2}\cdot|\overline{OM}|=\frac{(\frac{2}{7}\sqrt{14}+2)}{2}\cdot\frac{3}{7}\sqrt{35}$.

2 boda

Sada je tražena površina šesterokuta jednaka $4P_1=\frac{12}{7}(\sqrt{10}+\sqrt{35})$. 1 bod

Napomena: Učenik je do površine šesterokuta $PCQRDS$ mogao doći i na druge načine.

Zadatak B-4.7.

Odredite modul i argument kompleksnog broja $z^4 : w^{12}$, gdje je

$$z=-2\sin\frac{5\pi}{8}-2i\cos\frac{13\pi}{8},$$
$$w=\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{16}-i\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{16}.$$

Rješenje.

Vrijedi:

$$\begin{aligned} z &= -2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{8}\right)-2i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{13\pi}{8}\right) \\ &= -2\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)-2i\sin\left(-\frac{9\pi}{8}\right) && \text{2 boda} \\ &= -2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+2i\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right) \\ &= 2\left(\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right)\right), && \text{2 boda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{16}-i\sin\frac{5\pi}{16}\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{27\pi}{16}+i\sin\frac{27\pi}{16}\right). && \text{2 boda} \end{aligned}$$

Sada je:

$$\begin{aligned} z^4 : w^{12} &= \frac{2^4}{(\sqrt{2})^{12}}\left(\cos\left(4\cdot\frac{9\pi}{8}-12\cdot\frac{27\pi}{16}\right)+i\sin\left(4\cdot\frac{9\pi}{8}-12\cdot\frac{27\pi}{16}\right)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\cos\left(-\frac{63\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{63\pi}{4}\right)\right) && \text{2 boda} \\ &= \frac{1}{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right). && \text{1 bod} \end{aligned}$$

Modul kompleksnog broja $z^4 : w^{12}$ je jednak $\frac{1}{4}$, a njegov argument je jednak $\frac{\pi}{4}$. 1 bod