Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

29. ožujka 2021.

1. Odredi sve parove prirodnih brojeva (m, n) koji zadovoljavaju jednadžbu

$$m(m-n)^2(m+n) = m^4 + mn^3 - 99n.$$

2. Izabela je sedam dana zaredom rješavala po jedan matematički test. Na svakom je testu ostvarila različit broj bodova – najmanje 91, a najviše 100. Nakon svakog testa prosjek njenih dotadašnjih rezultata bio je prirodan broj, a na sedmom testu je ostvarila 95 bodova.

Koliko je ukupno bodova Izabela ostvarila na svih sedam testova? Koliko je bodova ostvarila na šestom testu?

3. Za realne brojeve $x_1, x_2, \ldots, x_{30}$ vrijedi

$$\begin{aligned}
20^3x_1 + 21^3x_2 + \cdots + 49^3x_{30} &= 13,\\
21^3x_1 + 22^3x_2 + \cdots + 50^3x_{30} &= 1,\\
22^3x_1 + 23^3x_2 + \cdots + 51^3x_{30} &= 19.
\end{aligned}$$

Koliko iznosi $21x_1 + 22x_2 + \cdots + 50x_{30}$?

4. Točka M na stranici $\overline{BC}$ i točka N na stranici $\overline{AB}$ trokuta ABC odabrane su tako da vrijedi $\sphericalangle BAM = \sphericalangle MAC = \sphericalangle NCB$. Dokaži da je

$$|AM|^2 = |AC| \cdot |AN| + |MC|^2.$$

5. Svakom od 12 bridova kocke Martin pridružuje po jedan od brojeva 1 ili -1. Zatim svakoj od šest strana te kocke pridružuje umnožak 4 broja na bridovima te strane. Na kraju Martin zbraja svih 18 brojeva pridruženih bridovima i stranama kocke.

Koliki je najmanji zbroj koji Martin može postići?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

29. ožujka 2021.

1. Odredi sve parove realnih brojeva (a, b) koji zadovoljavaju sustav:

$$a^2 + b^2 = 25,$$
$$3(a + b) - ab = 15.$$

2. Odredi sve trojke prostih brojeva čiji je zbroj kvadrata umanjen za 1 jednak kvadratu nekog prirodnog broja.

3. Dane su dvije kvadratne funkcije $f_1(x)$ i $f_2(x)$.
Funkcija $f_1(x)$ postiže najmanju vrijednost za $x = -1$, a jedna nultočka joj je $x = 3$.
Funkcija $f_2(x)$ postiže najveću vrijednost za $x = 3$, a jedna nultočka joj je $x = -1$.

Odredi sve vrijednosti x za koje umnožak $f_1(x)f_2(x)$ postiže najveću vrijednost.

4. Neka je I središte upisane kružnice trokuta ABC, a D točka na luku $\widehat{CA}$ tom trokutu opisane kružnice koji ne sadrži točku B. Neka je E točka takva da je D polovište dužine $\overline{AE}$. Ako je $\sphericalangle ECA = 90°$ i $\sphericalangle IEC = 40°$, odredi $\sphericalangle BAC$.

5. Neka je n prirodni broj. Ako pravilan n-terokut podijelimo na $n-2$ trokuta povlačenjem $n-3$ dijagonala koje nemaju zajedničkih unutarnjih točaka kažemo da smo dobili *triangulaciju.* Triangulacija n-terokuta kojem su neki od vrhova crveni je *dobra* ako svaki od tih $n-2$ trokuta ima barem dva crvena vrha.

Odredi najmanji prirodni broj k, u ovisnosti o n, takav da možemo obojiti k vrhova pravilnog n-terokuta crveno tako da postoji barem jedna dobra triangulacija.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

29. ožujka 2021.

1. Dokaži da ortocentar šiljastokutnog trokuta s kutovima α, β i γ dijeli visinu iz vrha kuta mjere α u omjeru $\cos\alpha : (\cos\beta\cos\gamma)$.

2. Odredi sve parove realnih brojeva (x, y) koji zadovoljavaju jednadžbu

$$\left(4^x+1\right)\left(9^y+1\right)+70=10\left(2^x+1\right)\left(3^y+1\right).$$

3. Središte I upisane kružnice i središte O opisane kružnice trokuta ABC su osnosimetrične točke u odnosu na pravac AB. Točka D je drugo sjecište pravca AO i opisane kružnice trokuta ABC.

Dokaži da vrijedi $|CA|\cdot|CD|=|AB|\cdot|AO|$.

4. Odredi sve prirodne brojeve m za koje je 2^m-63 kub nekog cijelog broja.

5. U nekom arhipelagu je n otoka među kojima prometuju dvosmjerne brodske i avionske linije. Između svaka dva otoka postoji točno jedna direktna linija – ili brodska, ili avionska. Kažemo da je arhipelag *uredno povezan* ako svako kružno turističko putovanje koje počinje i završava na istom otoku koristi paran broj avionskih linija.

Za koje prirodne brojeve n svaki uredno povezan arhipelag s n otoka ima paran broj avionskih linija?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

29. ožujka 2021.

1. Odredi sve prirodne brojeve m za koje je $m! + 8$ potencija nekog prostog broja.

2. Neka je $w = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$. Odredi najveći broj $n \in \mathbb{N}_0$ za koji postoje kompleksni brojevi a, b, c tako da za svaki $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ vrijedi

$$a + bw^k + cw^{2k} = k.$$

Za tako određeni n nađi sve trojke (a, b, c) koje zadovoljavaju gornje jednakosti.

3. Neka su x, y i z realni brojevi takvi da je $xy + yz + zx = 1$. Neka je

$$S = \frac{x^2}{1 + x^2} + \frac{y^2}{1 + y^2} + \frac{z^2}{1 + z^2}.$$

a) Ako su x, y i z pozitivni brojevi, dokaži da je $S < 1$.

b) Dokaži da je $S < 1$ ako i samo ako su brojevi x, y i z istog predznaka.

4. U nogometnom klubu je n igrača koji imaju dresove s međusobno različitim brojevima od 1 do n. Na kraju sezone igrač s brojem 1 završava karijeru. Uprava bira jednog od ostalih igrača kojeg prodaje nekom drugom klubu, dok svih preostalih $n - 2$ igrača dobiva dresove s međusobno različitim brojevima od 1 do n.

Na koliko načina uprava može odabrati igrača za prodaju i preostalima dati brojeve tako da nijedan igrač nema veći broj od onog koji je imao ove sezone?

5. Neka je ABC trokut i O središte njegove opisane kružnice. Pravac p okomit je na simetralu kuta $\sphericalangle BAC$, prolazi polovištem stranice $\overline{BC}$ te polovištem dužine $\overline{AO}$. Odredi veličinu kuta $\sphericalangle BAC$.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.