ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

29. ožujka 2021.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-1.1.

Odredi sve parove prirodnih brojeva (m, n) koji zadovoljavaju jednadžbu

$$m(m-n)^2(m+n) = m^4 + mn^3 - 99n.$$

Prvo rješenje.

Pojednostavljivanjem izraza imamo redom:

$$\begin{aligned}
m(m^2 - 2mn + n^2)(m+n) &= m(m^3 + n^3) - 99n, \\
m(m^2 - 2mn + n^2)(m+n) &= m(m+n)(m^2 - mn + n^2) - 99n, && \text{3 boda} \\
99n &= m(m+n)(mn), \\
99 &= m^2(m+n). && \text{4 boda}
\end{aligned}$$

Rastav broja 99 na proste faktore je $99 = 3 \cdot 3 \cdot 11$. Jedini njegovi djelitelji koji su ujedno i kvadrati su 1 i 9. Zato imamo dva slučaja: ako je $m = 1$, tada je $m + n = 99$, odnosno $n = 98$; a ako je $m = 3$, onda je $m + n = 11$, odnosno $n = 8$. 2 boda

Dakle, rješenja za (m, n) su $(1, 98)$ i $(3, 8)$. 1 bod

Drugo rješenje.

Pojednostavljivanjem izraza imamo redom:

$$\begin{aligned}
m(m-n)(m^2 - n^2) &= m(m^3 + n^3) - 99n, \\
m(m^3 + n^3 - mn^2 - m^2 n) &= m(m^3 + n^3) - 99n, && \text{3 boda} \\
99n &= m(m^2 n + mn^2), \\
99n &= m^2 n(m+n), \\
99 &= m^2(m+n). && \text{4 boda}
\end{aligned}$$

Kao u prvom rješenju nalazimo: $(m, n) = (1, 98)$ i $(m, n) = (3, 8)$. 3 boda

Napomena: Pojednostavljivanje izraza nosi ukupno 7 bodova. Prikazana su dva od više mogućih rješenja, u kojima se koristi neke algebarske identitete za pojednostavljivanje izraza (razlika kvadrata, zbroj kubova, kvadrat binoma). Primjena tih identiteta nosi 3 boda, a nastavak pojednostavljivanja 4 boda.

Rješavanje pojednostavljene jednadžbe nosi ukupno 3 boda, od čega 1 bod pronalazak svih rješenja, a 2 boda objašnjenje zašto su to ujedno i sva rješenja.

Dio rješenja koji pojednostavi izraze s lijeve strane jednakosti (raspis na sumande korištenjem distributivnosti) nosi 1 bod, i dio je prva 3 boda iz službenih rješenja.

Alternativan način rješavanja je svesti početni izraz na $n = \dfrac{99}{m^2} - m$ (što ponovno nosi ukupno 7 bodova), pa se slično kao u prvom rješenju zaključi da su jedini potpuni kvadrati koji dijele 99 jednaki 1 i 9 te konačno pronađu sva rješenja (za preostala 3 boda).

Zadatak A-1.2.

Izabela je sedam dana zaredom rješavala po jedan matematički test. Na svakom je testu ostvarila različit broj bodova – najmanje 91, a najviše 100. Nakon svakog testa prosjek njezinih dotadašnjih rezultata bio je prirodan broj, a na sedmom testu je ostvarila 95 bodova.

Koliko je ukupno bodova Izabela ostvarila na svih sedam testova? Koliko je bodova ostvarila na šestom testu?

Prvo rješenje.

Prosjek bodova koje je Izabela ostvarila svih sedam dana je cijeli broj pa znamo da postoji neki prirodni broj k takav da je Izabelin ukupni rezultat jednak $7k$. 2 boda

Nadalje, svi rezultati su međusobno različiti pa je ukupan rezultat jednak barem

$$91 + 92 + 93 + 94 + 95 + 96 + 97 = 658 = 7 \cdot 94,$$

a najviše

$$94 + 95 + 96 + 97 + 98 + 99 + 100 = 679 = 7 \cdot 97.$$ 1 bod

Dakle, k je jednak jednom od brojeva 94, 95, 96, 97. 2 boda

Nadalje, Izabela je u prvih šest dana ostvarila $7k - 95$ bodova i taj broj je djeljiv sa 6. Jedina mogućnost je $k = 95$. 2 boda

Zato je Izabela na svih sedam testova ukupno ostvarila $7 \cdot 95 = 665$ bodova. 1 bod

Neka je Izabela šesti dan ostvarila x bodova. Tada je u prvih pet dana ostvarila $6 \cdot 95 - x$ bodova. Taj broj mora biti djeljiv brojem 5, a kako je broj 95 djeljiv s 5, zaključujemo da i broj x mora biti djeljiv s 5. 1 bod

Među brojevima 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99 i 100 jedino su 95 i 100 djeljivi s 5. Budući da je Izabela sedmi dan ostvarila 95 bodova, a svi rezultati su međusobno različiti, zaključujemo da je šesti dan ostvarila 100 bodova. 1 bod

Drugo rješenje.

Umjesto zbroja rezultata svih sedam dana kao u prošlom rješenju, možemo promotriti i zbroj rezultata prvih šest dana koji iznosi $6m$, za neki prirodni broj m. 2 boda

Nadalje, svi rezultati su međusobno različiti pa je

$$\begin{aligned} 6 \cdot 93 = 558 < 563 = 91 + 92 + 93 + 94 + 96 + 97 \\ &\leqslant 6 \cdot m \\ &\leqslant 94 + 96 + 97 + 98 + 99 + 100 = 584 < 588 = 6 \cdot 98. \end{aligned}$$ 1 bod

Dakle, vrijedi da je broj m jednak jednom od brojeva 94, 95, 96, 97. 2 boda

Budući da je Izabela u svih sedam dana ostvarila $6m + 95$ bodova i taj broj je djeljiv sa 7, zaključujemo da je jedino moguće $m = 95$. 2 boda

Sada nastavimo kao u prvom rješenju. 3 boda

Zadatak A-1.3.

Za realne brojeve $x_1, x_2, \ldots, x_{30}$ vrijedi

$$\begin{aligned} 20^3 x_1 + 21^3 x_2 + \cdots + 49^3 x_{30} &= 13 \\ 21^3 x_1 + 22^3 x_2 + \cdots + 50^3 x_{30} &= 1 \\ 22^3 x_1 + 23^3 x_2 + \cdots + 51^3 x_{30} &= 19. \end{aligned}$$

Koliko iznosi $21x_1 + 22x_2 + \cdots + 50x_{30}$?

Prvo rješenje.

Poznato je da za realne brojeve a i b vrijedi $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$. 1 bod

Ako je $a - b = 1$, tada vrijedi $a^3 - b^3 = a^2 + ab + b^2$. Zato oduzimanjem prve od druge jednadžbe dobivamo:

$$(21^2 + 21 \cdot 20 + 20^2)x_1 + (22^2 + 22 \cdot 21 + 21^2)x_2 + \cdots + (50^2 + 50 \cdot 49 + 49^2)x_{30} = -12.$$ 2 boda

Slično, oduzimanjem druge od treće jednadžbe dobivamo:

$$(22^2 + 22 \cdot 21 + 21^2)x_1 + (23^2 + 23 \cdot 22 + 22^2)x_2 + \cdots + (51^2 + 51 \cdot 50 + 50^2)x_{30} = 18.$$ 2 boda

Primijetimo da za svaki realni broj a vrijedi:

$$\left((a+1)^2 + (a+1) \cdot a + a^2\right) - \left(a^2 + a \cdot (a-1) + (a-1)^2\right) = 6a.$$ 3 boda

Stoga oduzimanjem dviju prethodno dobivenih jednadžbi dobivamo:

$$6 \cdot (21x_1 + 22x_2 + \cdots + 50x_{30}) = 30,$$ 1 bod

odakle je $21x_1 + 22x_2 + \cdots + 50x_{30} = 5$. 1 bod

Drugo rješenje.

Poznato je da za realne brojeve a i b vrijedi $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$. 1 bod

Ako to iskoristimo za brojeve $a = c - 1$ i $b = c + 1$ (za neki realni broj c), dobivamo

$$\begin{aligned}(c-1)^3 + (c+1)^3 &= 2c \cdot \left((c-1)^2 - (c-1)(c+1) + (c+1)^2\right) \\ &= 2c \cdot (c^2 - 2c + 1 - c^2 + 1 + c^2 + 2c + 1) \\ &= 2c \cdot (c^2 + 3) = 2c^3 + 6c.\end{aligned}$$ 3 boda

Zato zbrajanjem prve i treće jednadžbe dobivamo

$$(2 \cdot 21^3 + 6 \cdot 21)x_1 + (2 \cdot 22^3 + 6 \cdot 22)x_2 + \cdots + (2 \cdot 50^3 + 6 \cdot 50)x_{30} = 32.$$ 3 boda

Pomnožimo drugu jednadžbu s 2 i oduzmimo od prethodno dobivene. Slijedi

$$6 \cdot (21x_1 + 22x_2 + \cdots + 50x_{30}) = 30,$$ 2 boda

što znači da je $21x_1 + 22x_2 + \cdots + 50x_{30} = 5$. 1 bod

Zadatak A-1.4.

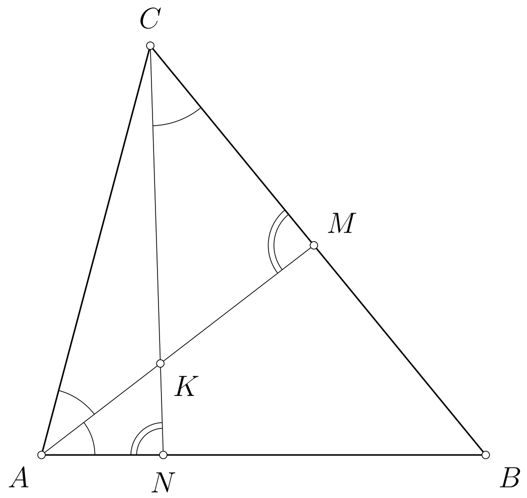
Točka M na stranici $\overline{BC}$ i točka N na stranici $\overline{AB}$ trokuta ABC odabrane su tako da vrijedi $\sphericalangle BAM = \sphericalangle MAC = \sphericalangle NCB$. Dokaži da je

$$|AM|^2 = |AC| \cdot |AN| + |MC|^2.$$

Rješenje.

Neka je $\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$ te $\sphericalangle BCA = \gamma$.

Nadalje, neka je točka K sjecište dužina $\overline{AM}$ i $\overline{CN}$. 1 bod



Primijetimo da je $\sphericalangle ANC = \beta + \dfrac{\alpha}{2}$ (jer je vanjski kut trokuta BCN). 1 bod

Također je i $\sphericalangle AMC = \beta + \dfrac{\alpha}{2}$ (jer je vanjski kut trokuta ABM). 1 bod

Dakle, vrijedi

$$\begin{aligned} \sphericalangle NAK &= \sphericalangle MCK = \sphericalangle MAC = \frac{\alpha}{2}, \\ \sphericalangle ANK &= \sphericalangle CMK = \sphericalangle AMC = \beta + \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

To znači da u trokutima AKN, CKM i ACM vrijedi da su mjere po dva kuta jednake. Posljedično su i mjere preostalih kutova tih trokuta jednake ($\sphericalangle AKN = \sphericalangle CKM = \sphericalangle ACM = \gamma$), pa prema K–K–K poučku o sličnosti zaključujemo da su trokuti AKN, CKM i ACM slični. 2 boda

Iz sličnosti trokuta AKN i ACM dobivamo da je

$$\frac{|AM|}{|AN|} = \frac{|AC|}{|AK|}, \qquad \text{odnosno} \quad |AM| \cdot |AK| = |AC| \cdot |AN|.$$ 2 boda

Iz sličnosti trokuta CKM i ACM slijedi

$$\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{|MC|}{|KM|}, \qquad \text{odnosno} \quad |AM| \cdot |KM| = |MC|^2.$$ 2 boda

Zbrajanjem dva dobivena identiteta i korištenjem činjenice $|AK| + |KM| = |AM|$ dobivamo da je

$$|AM|^2 = |AC| \cdot |AN| + |MC|^2.$$ 1 bod

Napomena: Nakon uvođenja točke K na više načina može se dokazati sličnost tri trokuta iz rješenja (primjerice direktno dokazujući da su mjere kutova $\sphericalangle AKN$ i $\sphericalangle CKM$ jednake γ). Zaključci o sukladnosti nekih drugih kutova od onih koji se koriste u rješenju, a kojima je moguće dokazati sličnost trokuta, nose po 1 bod, a ukupno najviše 2 boda.

Dio rješenja u kojem se koristeći mjere dobivenih kutova zaključi da su samo dva od tri trokuta AKN, CKM i ACM slična vrijedi 1 bod.

Zadatak A-1.5.

Svakom od 12 bridova kocke Martin pridružuje po jedan od brojeva 1 ili -1. Zatim svakoj od šest strana te kocke pridružuje umnožak 4 broja na bridovima te strane. Na kraju Martin zbraja svih 18 brojeva pridruženih bridovima i stranama kocke.

Koliki je najmanji zbroj koji Martin može postići?

Prvo rješenje.

Promotrimo pet brojeva pridruženih jednoj strani i četiri brida koja je omeđuju. Primijetimo da njihov zbroj može biti najmanje -3. 1 bod

Naime, ako su svi brojevi pridruženi bridovima jednaki -1, tada je njihov umnožak 1, pa je zbroj jednak -3. Ako barem jedan od brojeva na bridovima nije jednak -1, tada je zbroj neparan broj veći od -5, dakle najmanje -3. 1 bod

Neka je s zbroj svih brojeva na stranama kocke, a b zbroj svih brojeva na bridovima. Zanima nas najmanja vrijednost za $s + b$.

Promotrimo šest zbrojeva dobivenih zbrajanjem pet brojeva pridruženih jednoj strani i četiri brida koji je omeđuju. 1 bod

U tom zbroju svaki broj pridružen stranama kocke pojavljuje se jednom, a svaki broj pridružen bridovima kocke pojavljuje se dvaput. 2 boda

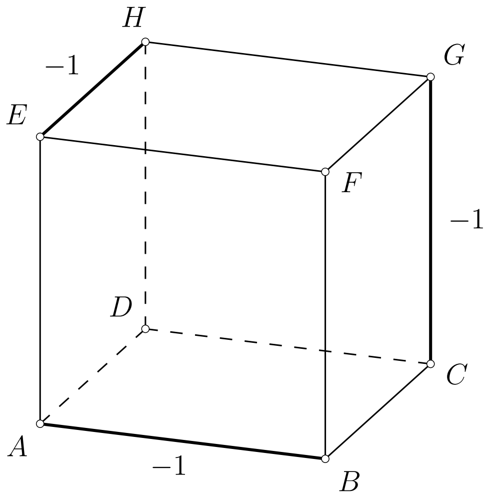
Dakle,

$$s + 2b \geqslant 6 \cdot (-3) = -18.$$ 1 bod

Očito je $s \geqslant -6$, pa zaključujemo da je $2s + 2b \geqslant -24$, odnosno da je $s + b \geqslant -12$. 1 bod

Pokažimo još da je uistinu moguće postići da je $s + b = -12$.

Na kocki $ABCDEFGH$ pridružimo broj -1 bridovima $\overline{AB}$, $\overline{GC}$ i $\overline{EH}$, a svim ostalim bridovima broj 1. Time je svakoj strani kocke pridružen broj -1, pa je ukupni zbroj zaista jednak -12. 3 boda



Drugo rješenje.

Kao i u prvom rješenju, znamo da je moguće postići zbroj -12. 3 boda

Pokažimo da taj zbroj ne može biti manji.

Neka je a broj brojeva pridruženih stranama i bridovima kocke koji su jednaki 1. 1 bod

Ako je $a \geqslant 3$, onda je zbroj svih 18 Martinovih brojeva barem -12. Ako želimo postići manji broj, nužno je $a \leqslant 2$. 1 bod

Ako je $a = 0$, onda su svi brojevi pridruženi bridovima, a i svim stranama kocke jednaki -1. To je nemoguće jer je na svakoj strani umnožak brojeva na bridovima koji je omeđuju jednak 1. 1 bod

Ako je $a = 1$, onda je najviše jednom bridu kocke pridružen broj 1. Međutim, to onda znači da je barem na četiri strane kocke umnožak četiri broja pridružena bridovima koji je omeđuju jednak $(-1)^4 = 1$, što daje kontradikciju. 1 bod

Ako je $a = 2$, najprije vidimo da je barem jednom bridu kocke pridružen broj 1. U suprotnom je svim stranama kocke pridružen broj $(-1)^4 = 1$, što je kontradikcija jer broj 1 smije biti pridružen najviše dvjema stranama. 1 bod

Ako je dvama bridovima kocke pridružen broj 1, onda je i barem dvjema stranama koje ti bridovi ne omeđuju također pridružen broj 1, što je kontradikcija. 1 bod

Preostaje slučaj kada je točno jednom bridu i točno jednoj strani kocke pridružen broj 1. No, tada je svim stranama kocke koje ne omeđuje brid s vrijednosti 1 pridružen broj 1. Kako tih strana ima četiri, opet dobivamo kontradikciju. 1 bod

Dakle, nemoguće je da imamo 0, 1 ili 2 broja jednaka 1, što znači da je traženi zbroj najmanje -12.

Napomena: Konstrukcija kojom postižemo zbroj -12 iz prvog rješenja jedinstvena je do na rotacije i simetrije kocke.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

29. ožujka 2021.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-2.1.

Odredi sve parove realnih brojeva (a, b) koji zadovoljavaju sustav:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 25 \\ 3(a+b) - ab &= 15. \end{aligned}$$

Rješenje.

Iz druge jednadžbe imamo $15 + ab = 3(a+b)$.

Kvadriranjem tog izraza dobivamo $225 + 30ab + a^2b^2 = 9(a+b)^2 = 9(a^2 + b^2 + 2ab)$. 1 bod

Uvrštavanjem prve jednadžbe slijedi $225 + 30ab + a^2b^2 = 9(25 + 2ab)$. 1 bod

Sređivanjem dobivamo $a^2b^2 + 12ab = 0$, odnosno $ab(ab + 12) = 0$. 2 boda

Razlikujemo dva slučaja. Ako je u prvom slučaju $ab = 0$, jedan od brojeva a i b je jednak nuli. Uvrštavanjem u drugu jednadžbu dobivamo da je drugi broj jednak 5. 1 bod

Ako je u drugom slučaju $ab + 12 = 0$, odnosno $ab = -12$, uvrštavanjem u drugu jednadžbu imamo $3(a+b) - (-12) = 15$, odnosno $a + b = 1$. 1 bod

Uvrštavanjem $b = 1 - a$ u prvu jednadžbu dobivamo $25 = a^2 + (1-a)^2 = 2a^2 - 2a + 1$. Rješavanjem odgovarajuće kvadratne jednadžbe dobivamo $a = 4$ ili $a = -3$. 2 boda

Ako je $a = 4$, onda je $b = 1 - a = -3$, dok za $a = -3$ imamo $b = 1 - a = 4$. 1 bod

Dakle, skup rješenja je $\{(0,5), (5,0), (4,-3), (-3,4)\}$. 1 bod

Napomena: Rješenje u kojem nisu pronađena sva četiri rješenja vrijedi najviše 9 bodova.

Dio rješenja u kojem su pronađena sva četiri rješenja (bez dokaza da su to sva rješenja) vrijedi 1 bod, koji odgovara zadnjem bodu iz bodovne sheme.

Zadatak A-2.2.

Odredi sve trojke prostih brojeva čiji je zbroj kvadrata umanjen za 1 jednak kvadratu nekog prirodnog broja.

Rješenje.

Označimo traženu trojku prostih brojeva s (p, q, r). Tada vrijedi $p^2 + q^2 + r^2 - 1 = n^2$ za neki prirodan broj n.

Znamo da kvadrati prirodnih brojeva pri dijeljenju s 3 daju ostatak 0 ili 1. 1 bod

Pretpostavimo da niti jedan od brojeva p, q i r nije jednak 3. Tada njihovi kvadrati daju ostatak 1 pri dijeljenju s 3, a $n^2 = p^2 + q^2 + r^2 - 1$ daje ostatak $1 + 1 + 1 - 1 = 2$, što nije moguće. 1 bod

Prema tome, barem jedan od brojeva p, q i r mora biti jednak 3. 1 bod

Slično, znamo da kvadrati prirodnih brojeva pri dijeljenju s 4 daju ostatak 0 ili 1. 1 bod

Pretpostavimo da niti jedan od brojeva p, q i r nije jednak 2. Tada njihovi kvadrati daju ostatak 1 pri dijeljenju s 4, a $n^2 = p^2 + q^2 + r^2 - 1$ daje ostatak $1 + 1 + 1 - 1 = 2$, što nije moguće. 1 bod

Prema tome, barem jedan od brojeva p, q i r mora biti jednak 2. 1 bod

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $p = 3$ i $q = 2$, a time i

$$n^2 = 3^2 + 2^2 + r^2 - 1 = 12 + r^2.$$

Sređivanjem i rastavom razlike kvadrata imamo $(n - r)(n + r) = 12$. 1 bod

Uočimo da su $n - r$ i $n + r$ iste parnosti jer im je zbroj paran. 1 bod

Također uočimo da vrijedi $n + r > n - r$ te da je $n + r$ nužno pozitivan broj.

Uzimajući u obzir faktorizacije broja 12, jedina mogućnost je $n - r = 2$, $n + r = 6$. 1 bod

Rješavanjem sustava slijedi $n = 4$, $r = 2$.

Prema tome, tražene trojke su $(3, 2, 2)$, $(2, 3, 2)$ i $(2, 2, 3)$. 1 bod

Napomena: Ispravni dokazi da jedan broj mora biti 3, a jedan 2 vrijede po 3 boda. Dovršavanje dokaza i zaključak da je preostali broj također jednak 2 vrijedi 4 boda. Taj dovršetak dokaza može se izvesti i provjeravajući sve moguće faktorizacije broja 12.

Dio rješenja u kojem je pronađeno rješenje (bez dokaza da nema drugih rješenja) vrijedi 1 bod, koji odgovara zadnjem bodu iz bodovne sheme.

Rješenje u kojem nisu popisane sve permutacije uređenih trojki prostih brojeva koje zadovoljavaju uvjete zadatka i dalje ostvaruje zadnji 1 bod iz bodovne sheme.

Zadatak A-2.3.

Dane su dvije kvadratne funkcije $f_1(x)$ i $f_2(x)$.

Funkcija $f_1(x)$ postiže najmanju vrijednost za $x = -1$, a jedna nultočka joj je $x = 3$. Funkcija $f_2(x)$ postiže najveću vrijednost za $x = 3$, a jedna nultočka joj je $x = -1$.

Odredi sve vrijednosti x za koje umnožak $f_1(x) f_2(x)$ postiže najveću vrijednost.

Rješenje.

Budući da su nultočke kvadratne funkcije simetrične s obzirom na tjeme, druga nultočka funkcije $f_1(x)$ je jednaka $-1-(3-(-1)) = -5$. Analogno, druga nultočka funkcije $f_2(x)$ je jednaka $3+(3-(-1)) = 7$. 1 bod

Prema tome, funkcije $f_1(x)$ i $f_2(x)$ imaju oblik

$$f_1(x) = a_1(x-3)(x+5), \qquad f_2(x) = a_2(x+1)(x-7),$$ 1 bod

za neke realne brojeve a_1 i a_2 različite od nule.

S obzirom na to da funkcija $f_1(x)$ postiže minimum, a $f_2(x)$ maksimum, mora vrijediti $a_1 > 0$ i $a_2 < 0$. 1 bod

Sada imamo:

$$\begin{aligned} f_1(x)f_2(x) &= a_1(x-3)(x+5) \cdot a_2(x+1)(x-7) && \text{1 bod} \\ &= a_1a_2\left((x-3)(x+1)\right)\left((x+5)(x-7)\right) \\ &= a_1a_2(x^2-2x-3)(x^2-2x-35). && \text{1 bod} \end{aligned}$$

Označimo $t = x^2-2x-3$. Sada je umnožak funkcija $f_1(x)$ i $f_2(x)$ jednak $a_1a_2t(t-32)$. 1 bod

Funkcija $g(t) = a_1a_2t(t-32)$ je kvadratna s nultočkama u $t_1 = 0$ i $t_2 = 32$, pa joj se tjeme nalazi u točki $t = 16$. Također, kako je $a_1a_2 < 0$, funkcija $g(t)$ u tjemenu postiže maksimum. 1 bod

Prema tome, tražena najveća vrijednost se postiže za $t = 16$, odnosno kada vrijedi

$$x^2-2x-3 = 16.$$

Dakle, točke u kojima se postiže maksimum umnoška funkcija $f_1(x)$ i $f_2(x)$ su rješenja kvadratne jednadžbe

$$x^2-2x-19 = 0,$$ 2 boda

odnosno $x_1 = 1+2\sqrt{5}$ i $x_2 = 1-2\sqrt{5}$. 1 bod

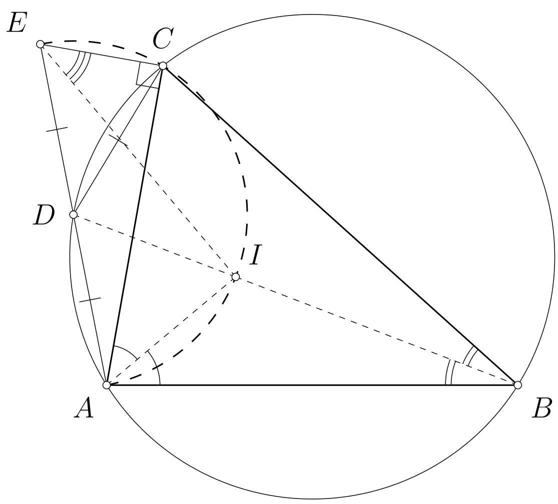
Napomena: Zadatak je moguće riješiti i uvodeći slične supstitucije za t (npr. $t_1 = x^2-2x$, $t_2 = x^2-2x-19$, $t_3 = x^2-2x-35$). Takva rješenja treba bodovati na analogan način kao službeno.

Zadatak A-2.4.

Neka je I središte upisane kružnice trokuta ABC, a D točka na luku $\overset{\frown}{CA}$ tom trokutu opisane kružnice koji ne sadrži točku B. Neka je E točka takva da je D polovište dužine $\overline{AE}$. Ako je $\sphericalangle ECA = 90°$ i $\sphericalangle IEC = 40°$, odredi $\sphericalangle BAC$.

Prvo rješenje.

Označimo veličine kutova $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle BCA$ redom s α, β i γ.



Budući da je trokut ACE pravokutan, prema obratu Talesovog poučka hipotenuza $\overline{AE}$ je ujedno i promjer tom trokutu opisane kružnice. 1 bod

Kako je D polovište te hipotenuze, slijedi da je D ujedno i središte trokutu ACE opisane kružnice, pa vrijedi $|DA| = |DC|$. 1 bod

Slijedi da je trokut CDA jednakokračan i znamo $\sphericalangle CAD = \sphericalangle DAC = \frac{1}{2}(180° - \sphericalangle CDA)$. 1 bod

S obzirom na to da točke A, B, C i D leže na istoj kružnici, četverokut $ABCD$ je tetivan i vrijedi $\sphericalangle CDA = 180° - \beta$. 1 bod

Iz prethodnih jednakosti imamo $\sphericalangle CAD = \dfrac{1}{2}(180° - (180° - \beta)) = \dfrac{\beta}{2}$. 1 bod

Iz trokuta AEC vidimo da je

$$\sphericalangle AEC = 90° - \sphericalangle CAE = 90° - \sphericalangle CAD = 90° - \frac{\beta}{2}.$$ 1 bod

Kako I leži na simetralama kutova trokuta ABC, imamo

$$\begin{aligned}\sphericalangle AIC &= 180° - \sphericalangle IAC - \sphericalangle ICA = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2} \\ &= 180° - \frac{1}{2}(180° - \beta) = 90° - \frac{\beta}{2}.\end{aligned}$$ 1 bod

Iz dobivenog vidimo da je $\sphericalangle AEC + \sphericalangle AIC = \left(90° + \frac{\beta}{2}\right) + \left(90° - \frac{\beta}{2}\right) = 180°$, što znači da je četverokut $AECI$ tetivan. 1 bod

Prema tome, obodni kutovi $\sphericalangle IAC$ i $\sphericalangle IEC$ su sukladni, odnosno vrijedi $\sphericalangle IAC = 40°$. 1 bod

Konačno, kako je $\sphericalangle IAC = \frac{1}{2}\sphericalangle BAC$, zaključujemo $\sphericalangle BAC = 80°$. 1 bod

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju, možemo zaključiti da je D središte kružnice opisane trokutu ACE te da vrijedi $|DA| = |DC|$. 2 boda

Kako je četverokut $ABCD$ tetivan, te kako je I sjecište simetrala kutova trokuta ABC, možemo zaključiti

$$\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD = \frac{\beta}{2} \qquad \text{1 bod}$$

$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle BCA = \gamma. \qquad \text{1 bod}$$

Sada vidimo da je $\sphericalangle IAD = \sphericalangle IAC + \sphericalangle CAD = \frac{1}{2}\sphericalangle CAB + \sphericalangle CAD = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$. 1 bod

Iz trokuta ADI imamo

$$\begin{aligned}
\sphericalangle AID &= 180^\circ - \sphericalangle ADI - \sphericalangle IAD \\
&= 180^\circ - \sphericalangle ADB - \sphericalangle IAD \\
&= 180^\circ - \gamma - \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}.
\end{aligned} \qquad \text{1 bod}$$

Prema tome, vrijedi $\sphericalangle AID = \sphericalangle IAD$, odnosno trokut IDA je jednakokračan pa slijedi $|DA| = |DI|$.

Kako otprije znamo $|DA| = |DC|$, slijedi da je D središte kružnice opisane trokutu ACI. 1 bod

Dodatno, budući da je $|DA| = |DE|$, točka E se također nalazi na toj kružnici pa je četverokut $AICE$ tetivan. 1 bod

Na kraju možemo kao u prvom rješenju zaključiti $\sphericalangle BAC = 2\sphericalangle IAC = 2\sphericalangle IEC = 80^\circ$. 2 boda

Napomena: Oba rješenja su sljedeće strukture: zaključak da je D središte kružnice opisane pravokutnom trokutu ACE i $|DA| = |DC|$ (2 boda), dokaz tetivnosti četverokuta $AECI$ (6 bodova), te krajnji zaključak o mjeri kuta $\sphericalangle BAC$ (2 boda).

U drugom rješenju moguće je primijeniti i analogno zaključivanje kako bi se dokazalo da je trokut ICD jednakokračan.

Zadatak A-2.5.

Neka je n prirodni broj. Ako pravilan n-terokut podijelimo na $n-2$ trokuta povlačenjem $n-3$ dijagonala koje nemaju zajedničkih unutarnjih točaka kažemo da smo dobili *triangulaciju.* Triangulacija n-terokuta kojem su neki od vrhova crveni je *dobra* ako svaki od tih $n-2$ trokuta ima barem dva crvena vrha.

Odredi najmanji prirodni broj k, u ovisnosti o n, takav da možemo obojiti k vrhova pravilnog n-terokuta crveno tako da postoji barem jedna dobra triangulacija.

Rješenje.

Najmanji takav k je $K \coloneqq \frac{n}{2}$ za parne n, odnosno $K \coloneqq \frac{n+1}{2}$ za neparne n. 1 bod

Pretpostavimo prvo da je crvenom bojom obojeno manje od K vrhova. Tada je neobojenih vrhova strogo više nego crvenih, te sigurno postoje dva susjedna neobojena vrha. 3 boda

S obzirom na to da u svakoj triangulaciji stranica mnogokuta koja spaja ta dva neobojena vrha mora biti dio nekog trokuta, zaključujemo da taj trokut ima barem dva neobojena vrha, odnosno sigurno ima najviše jedan crveni vrh. 2 boda

Preostaje pronaći primjer bojenja i odabira dijagonala u slučaju kada je barem K vrhova obojeno crveno te postoji barem jedna dobra triangulacija.

Jedna mogućnost je da počevši od nekog vrha (koji obojimo) naizmjenično svaki sljedeći susjedni vrh ne obojimo, odnosno obojimo. Tada sigurno ne postoje dva susjedna neobojena vrha. 2 boda

Odaberimo proizvoljan crveni vrh C i povucimo iz njega svih $n-3$ dijagonala. Tada svaki trokut u toj triangulaciji za vrhove ima C i neka dva susjedna vrha mnogokuta. Zbog načina bojenja znamo da je barem jedan od ta dva vrha crvene boje, pa svaki trokut ima barem dva crvena vrha. Dakle, ta triangulacija je dobra, pa je K najmanji broj k koji zadovoljava uvjete zadatka. 2 boda

Napomena: Oblik broja K može se zapisati i kao $K = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

Točno pogođeno rješenje bez dokaza vrijedi 1 bod. Za potpuno rješenje potrebno je dokazati da k ne može biti manji (5 bodova) i dati primjer konstrukcije za najmanji k (4 boda).

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

29. ožujka 2021.

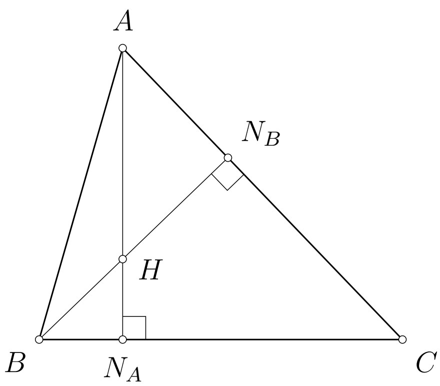
AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-3.1.

Dokaži da ortocentar šiljastokutnog trokuta s kutovima α, β i γ dijeli visinu iz vrha kuta mjere α u omjeru $\cos\alpha : (\cos\beta\cos\gamma)$.

Prvo rješenje.

Označimo vrhove trokuta s A, B i C te označimo standardno $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle CBA = \beta$, $\sphericalangle ACB = \gamma$. Nadalje, neka su N_A i N_B redom nožišta visina iz vrhova A i B te H ortocentar tog trokuta.



Iz pravokutnih trokuta ABN_B, ABN_A i BCN_B slijedi da je

$$\sphericalangle ABN_B = 90^\circ - \alpha, \quad \sphericalangle N_AAB = 90^\circ - \beta, \quad \sphericalangle N_BBC = 90^\circ - \gamma.$$ 2 boda

Primjenom sinusovog poučka na trokut ABH i korištenjem idetntiteta $\sin(90^\circ - \varphi) = \cos\varphi$ dobivamo

$$\frac{|AH|}{|BH|} = \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\sin(90^\circ - \beta)} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}.$$ 3 boda

Nadalje, iz pravokutnog trokuta BN_AH slijedi

$$\frac{|BN_A|}{|BH|} = \sin(90^\circ - \gamma) = \cos\gamma.$$ 2 boda

Zato imamo

$$\frac{|AH|}{|HN_A|} = \frac{\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}|BH|}{|BH|\cos\gamma} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta\cos\gamma}.$$ 3 boda

Drugo rješenje.

Zadržimo iste oznake kao u prvom rješenju.

Iz pravokutnih trokuta AN_AC i BCN_B slijedi da je

$$\sphericalangle CAN_A = 90^\circ - \gamma, \quad \sphericalangle N_BBC = 90^\circ - \gamma.$$ 2 boda

Iz pravokutnih trokuta AN_AB i BN_BA slijedi

$$\frac{|BN_A|}{|AB|} = \cos\beta, \quad \frac{|AN_B|}{|AB|} = \cos\alpha.$$ 1 bod

Nadalje, iz pravokutnih trokuta AN_BH i BN_AH dobivamo

$$\frac{|AN_B|}{|AH|} = \cos(90^\circ - \gamma) = \sin\gamma,$$ 2 boda

$$\frac{|HN_A|}{|BN_A|} = \operatorname{tg}(90^\circ - \gamma) = \operatorname{ctg}\gamma.$$ 2 boda

Sada slijedi

$$\frac{|AH|}{|HN_A|} = \frac{\frac{|AN_B|}{\sin\gamma}}{|BN_A|\operatorname{ctg}\gamma} = \frac{\frac{|AB|\cos\alpha}{\sin\gamma}}{\frac{|AB|\cos\beta\cos\gamma}{\sin\gamma}} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta\cos\gamma}.$$ 3 boda

Zadatak A-3.2.

Odredi sve parove realnih brojeva (x, y) koji zadovoljavaju jednadžbu

$$\left(4^x + 1\right)\left(9^y + 1\right) + 70 = 10\left(2^x + 1\right)\left(3^y + 1\right).$$

Rješenje.

Uvedimo supstituciju $a = 2^x$, $b = 3^y$. 1 bod

Zadana jednadžba postaje

$$(a^2+1)(b^2+1) + 70 = 10(a+1)(b+1),$$
$$a^2b^2 + a^2 + b^2 + 71 = 10(ab + a + b + 1),$$
$$a^2b^2 + a^2 + b^2 - 10ab - 10a - 10b + 61 = 0,$$ 1 bod
$$(a^2b^2 - 12ab + 36) + (a^2 + b^2 + 25 + 2ab - 10a - 10b) = 0,$$
$$(ab-6)^2 + (a+b-5)^2 = 0.$$ 2 boda

Budući da na lijevoj strani imamo zbroj dva nenegativna realna broja, taj je zbroj jednak nuli ako i samo su oba pribrojnika jednaka nuli. Dakle,

$$ab = 6, \qquad a + b = 5.$$ 2 boda

Brojevi a i b rješenja su kvadratne jednadžbe $t^2 - 5t + 6 = 0$, čija su rješenja 2 i 3. 2 boda

U prvom slučaju imamo $a = 2$ i $b = 3$. Uvrštavanjem u $a = 2^x$, $b = 3^y$ dobivamo rješenje $(x, y) = (1, 1)$. 1 bod

U drugom slučaju imamo $a = 3$ i $b = 2$. Uvrštavanjem u $a = 2^x$, $b = 3^y$ dobivamo rješenje $(x, y) = (\log_2 3, \log_3 2)$. 1 bod

Dakle, sva rješenja zadane jednadžbe su parovi $(1, 1)$ i $(\log_2 3, \log_3 2)$.

Napomena: Dio rješenja u kojem je pogođen neki od uređenih parova nosi 1 bod po točnom uređenom paru. Ti bodovi odgovaraju zadnjim dvama bodovima u gornjoj bodovnoj shemi.

Zadatak A-3.3.

Središte I upisane kružnice i središte O opisane kružnice trokuta ABC su osnosimetrične točke u odnosu na pravac AB. Točka D je drugo sjecište pravca AO i opisane kružnice trokuta ABC.

Dokaži da vrijedi $|CA| \cdot |CD| = |AB| \cdot |AO|$.

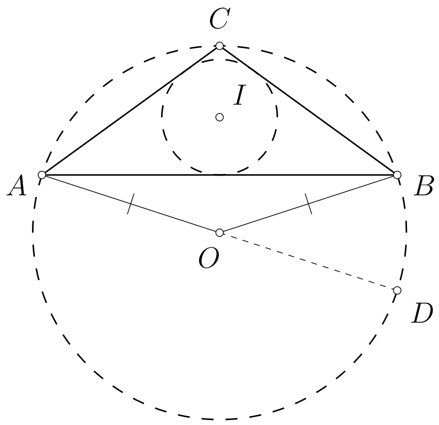
Prvo rješenje.

Neka su α, β i γ redom mjere kutova tog trokuta u vrhovima A, B i C te neka je R duljina radijusa opisane kružnice tog trokuta.

Budući da je O središte opisane kružnice, vrijedi $|AO| = |BO|$. Zaključujemo da je trokut ABO je jednakokračan, odnosno $\sphericalangle OBA = \sphericalangle OAB$. Kako su O i I osnosimetrične točke, posebno znači i da je

$$\frac{\alpha}{2} = \sphericalangle IAB = \sphericalangle OAB = \sphericalangle OAB = \sphericalangle IAB = \frac{\beta}{2},$$

dakle vrijedi $\alpha = \beta$ i $\gamma = 180^\circ - 2\alpha$. 2 boda



Iz trokuta AIB sada dobivamo $\sphericalangle AIB = 180^\circ - (\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}) = 180^\circ - \alpha$, a iz odnosa obodnog i središnjeg kuta slijedi $\sphericalangle AOB = 2(180^\circ - \gamma)$. 1 bod

Budući da ta dva kuta moraju biti sukladna, imamo

$$180^\circ - \alpha = 2(180^\circ - (180^\circ - 2\alpha)) \qquad \Longrightarrow \alpha = 36^\circ = \beta, \ \gamma = 108^\circ.$$ 2 boda

Primjenjujući sinusov poučak na trokut CDA dvaput, te trokut ABC (trokuti sa zajedničkom opisanom kružnicom radijusa R), dobivamo

$$|CD| = 2R \sin\left(\alpha + \frac{\alpha}{2}\right) = 2R \sin 54^\circ,$$ 1 bod

$$|CA| = 2R \sin\beta = 2R \sin 36^\circ,$$ 1 bod

$$|AB| = 2R \sin\gamma = 2R \sin 108^\circ.$$ 1 bod

Budući da je $|AO| = R$, dobivamo

$$\begin{aligned}|CA| \cdot |CD| &= 4R^2 \sin 54^\circ \sin 36^\circ \\ &= 4R^2 \sin 54^\circ \sin(90^\circ - 36^\circ) \\ &= 4R^2 \sin 54^\circ \cos 54^\circ \\ &= 2R^2 \sin 108^\circ = |AB| \cdot |AO|,\end{aligned}$$ 2 boda

čime je tvrdnja zadatka dokazana.

Drugo rješenje.

Uz iste oznake, kao i u prvom rješenju dokažemo $\alpha = \beta = 36^\circ$, $\gamma = 108^\circ$. 5 bodova

Neka je P polovište dužine $\overline{AB}$. Budući da je trokut ABC jednakokračan, vrijedi $\sphericalangle CPA = 90^\circ$. 1 bod

Zbog Talesovog poučka slijedi i $\sphericalangle ACD = 90^\circ$. 1 bod

Budući da je zbog jednakosti obodnih kutova $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC = 36^\circ = \sphericalangle CAP$, slijedi da su trokuti ACD i CPA slični. 1 bod

Odavde dobivamo

$$\frac{|CD|}{|PA|} = \frac{|AD|}{|CA|} \quad \Longrightarrow \quad \frac{|CD|}{\frac{1}{2}|AB|} = \frac{2|AO|}{|CA|} \quad \Longrightarrow \quad |CD| \cdot |CA| = |AO| \cdot |AB|.$$ 2 boda

Zadatak A-3.4.

Odredi sve prirodne brojeve m za koje je $2^m - 63$ kub nekog cijelog broja.

Rješenje.

Tražimo sve $m \in \mathbb{N}$ za koje je $2^m - 63 = n^3$ za neki $n \in \mathbb{Z}$.

Promotrimo ostatke koje lijeva i desna strana ove jednakosti daju pri dijeljenju sa 7. 1 bod

Raspisujući po svim mogućim ostatcima za n pri dijeljenju sa 7, vidimo da kub prirodnog broja n^3 daje ostatke 0, 1 ili 6. 1 bod

Raspisujući sve ostatke koje 2^m daje pri dijeljenju sa 7, vidimo da su to 2, 4 i 1. 1 bod

Kako je 63 djeljivo sa 7, a u jednakosti $2^m - 63 = n^3$ obje strane moraju davati jednak ostatak pri dijeljenju sa 7, zaključujemo da je jedina mogućnost da oba broja 2^m i n^3 daju ostatak 1 pri dijeljenju sa 7. To se postiže samo kada je m djeljiv s 3. 1 bod

Neka je $k \in \mathbb{N}$ takav da je $m = 3k$. Primjenjujući razliku kubova, dobivamo

$$63 = 2^{3k} - n^3 = (2^k - n)(2^{2k} + 2^k \cdot n + n^2).$$ 1 bod

Provjeravamo moguće faktorizacije broja 63 na faktore $a := 2^k - n$ i $b := 2^{2k} + 2^k \cdot n + n^2$. Kako je b prirodan, i a je nužno prirodan broj.

Možemo zaključiti da je n nužno prirodan broj. Kada bi bilo $n \leqslant 0$, tada iz $2^m - 63 = n^3 \leqslant 0$ vidimo da je $m < 6$, za što je jedina mogućnost da je $m = 3$. No, direktnom provjerom vidimo da $2^3 - 63 = -55$ nije potpun kub. 1 bod

Nadalje, kako je $b - a^2 = 3 \cdot 2^k \cdot n$ prirodan broj, vidimo da je nužno $b > a^2$. Iz $ab = 63$ dobivamo $a^3 < 63$, odnosno $a \leqslant 3$. Zato su jedine mogućnosti za (a, b) parovi $(1, 63)$ i $(3, 21)$. 2 boda

Mogućnost $(1, 63)$ odbacujemo jer tada broj $b - a^2 = 62$ nije djeljiv s 3, pa nije oblika $3 \cdot 2^k \cdot n$. 1 bod

Preostalo je provjeriti slučaj $a = 2^k - n = 3$, $b = 2^{2k} + 2^k \cdot n + n^2 = 21$. Također, imamo i $b - a^2 = 3 \cdot 2^k \cdot n = 12$, odnosno $2^k \cdot n = 4$. Odavde imamo dvije mogućnosti: $2^k = 2$, $n = 2$, ili $2^k = 4$, $n = 1$.

Uvrštavanjem u preostale jednadžbe, samo druga mogućnost nam daje rješenje jednadžbe za $k = 2$, odnosno $m = 6$. Dakle, $m = 6$ je jedini prirodan broj koji zadovoljava uvjet zadatka. 1 bod

Napomena: Rješenje se sastoji od dokaza da je m djeljiv s 3 (4 boda), faktorizacije jednadžbe koristeći razliku kubova (1 bod), redukciju slučajeva fakotrizacije broja 63 na samo jedan slučaj $3 \cdot 21$ (4 boda), te konačan pronalazak jedinog takvog broja m (1 bod). Redukciju slučajeva faktorizacija broja 63 moguće je izvršiti na više načina, uključujući i provjeravajući sve moguće faktorizacije. Takva rješenja treba bodovati u skladu sa službenim rješenjem.

Dio rješenja u kojem se utvrdi da $m = 6$ zadovoljava uvjet zadatka (bez dokaza da je to jedini takav prirodan broj) nosi 1 bod, koji odgovara zadnjem bodu iz bodovne sheme.

Dio rješenja u kojem se direktnom provjerom utvrdi da nikoji prirodan broj m manji od 6 nije rješenje (ili ekvivalentno, da je n nužno prirodan) nosi 1 bod, što odgovara šestom bodu iz bodovne sheme.

Dokaz da je m djeljiv s 3 može se izvesti i gledajući ostatke koje obje strane jednadžbe $2^m - 63$ daju pri dijeljenju s 9. Lijeva strana jednadžbe $2^m - 63 = n^3$ daje ostatke 2, 4, 1, 7, 5 i 8, dok desna daje ostatke 0, 1 i 8. Broj 2^m daje ostatke 1 i 8 samo kada je m djeljiv s 3.

Zadatak A-3.5.

U nekom arhipelagu je n otoka među kojima prometuju dvosmjerne brodske i avionske linije. Između svaka dva otoka postoji točno jedna direktna linija – ili brodska, ili avionska. Kažemo da je arhipelag *uredno povezan* ako svako kružno turističko putovanje koje počinje i završava na istom otoku koristi paran broj avionskih linija.

Za koje prirodne brojeve n svaki uredno povezan arhipelag s n otoka ima paran broj avionskih linija?

Prvo rješenje.

Tvrdnja zadatka vrijedi za sve neparne prirodne brojeve n. 1 bod

Dokažimo prvo da tvrdnja ne vrijedi ni za jedan paran n. Dovoljno je naći jedan uredno povezan arhipelag s n otoka koji ima neparan broj avionskih linija. Promotrimo arhipelag u kojemu su sve linije iz točno jednog istaknutog otoka avionske, a sve preostale brodske. 2 boda

Jasno je da broj avionskih linija neparan. Nadalje, za svako kružno putovanje vrijedi da je broj avionskih linija na tom putovanju jednak dvostrukom broju prolaska kroz taj istaknuti otok (budući da svakim dolaskom na otok, koji se odvija avionskom linijom, s otoka moramo i otići ponovno avionskom linijom). Posebno, svako kružno turističko putovanje sadrži paran broj avionskih linija, pa smo našli primjer uredno povezanog arhipelaga s neparnim brojem avionskih linija. 2 boda

Sada dokažimo da za neparne n tvrdnja vrijedi. Promotrimo bilo koji uredno povezan arhipelag s n otoka. Promotrimo otoke kao vrhove pravilnog n-terokuta s vrhovima A_1, A_2, ... A_n. Avionske i brodske linije su tada neke stranice ili dijagonale tog n-terokuta.

Za svaki $1 \leqslant k \leqslant n-1$ definirajmo S_k kao skup dužina

$$\overline{A_1A_{k+1}},\ \overline{A_2A_{k+2}},\ \ldots,\ \overline{A_{n-k}A_n},\ \overline{A_{n-k+1}A_1},\ \ldots,\ \overline{A_nA_k}.$$ 1 bod

Prvo primijetimo da su sve gore popisane dužine različite. Uistinu, ako je gore dvaputa navedena dužina $\overline{A_iA_j}$, uz $i < j$, zbog $j - i = k$ i $i - j = n - k$ vrijedi da je $n = 2k$. Kako je n neparan, to nije moguće.

Svaki vrh n-terokuta ima točno dvije dužine kojima je taj vrh krajnja točka, a pripada skupu S_k. 1 bod

To znači da linije reprezentirane dužinama u skupu S_k čine jedno kružno putovanje (ako su k i n relativno prosti) ili nekoliko kružnih putovanja jednake duljine (ako k i n nisu relativno prosti). Kako duž svakog kružnog putovanja imamo paran broj avionskih linija, zaključujemo da se u skupu S_k nalazi paran broj dužina koje odgovaraju avionskim linijama. 2 boda

Nadalje, promotrimo li sve skupove S_k, vidimo da se svaka dužina nalazi u točno jednom skupu S_k. Kako u svakom S_k se nalazi paran broj avionskih linija, i ukupan broj avionskih linija u arhipelagu je paran, čime je dokaz gotov. 1 bod

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju dokažemo da tvrdnja ne vrijedi ni za koji paran n. 5 bodova

Dokažimo da tvrdnja vrijedi za neparne n. Promotrimo bilo koji uredno povezan arhipelag s n otoka i dokažimo da nužno ima paran broj avionskih linija.

Promotrimo neki otok x. Neka je B skup svih otoka koji su s x povezani brodskom linijom, a A skup svih otoka koji su s x povezani avionskom linijom.

Prvo primijetimo da su svi otoci unutar B međusobno povezani brodskom linijom. Tvrdnja je trivijalna ako se u B nalazi manje od dva otoka. Ako je u B dva ili više otoka, tada promotrimo kružno putovanje koje povezuje bilo koja dva otoka iz B i otok x. Dvije veze od tri su brodske, pa kako bi bilo parno mnogo avionskih linija u tom putovanju, i treća veza mora biti brodska. 1 bod

Slično dokažemo da su i svi otoci unutar A međusobno povezani brodskom linijom: kako kružno putovanje koje povezuje bilo koja dva otoka iz A i otok x ima paran broj avionskih linija, nužno je veza između dva otoka iz A brodska (jer su svi otoci iz A s x povezani avionskom linijom). 1 bod

Konačno, uzmimo proizvoljni otok a iz A i proizvoljni otok b iz B. Tada su na kružnom putovanju koje uključuje tri otoka x, a i b jedna brodska linija, jedna avionska linija te linija između a i b. Iz uvjeta uredne povezanosti, zaključujemo da ona mora biti avionska. 1 bod

Uvedimo oznaku $\tilde{B} \coloneqq B \cup \{x\}$. Neka je m broj otoka u skupu A, te $n - m$ broj otoka u skupu $\tilde{B}$. Upravo smo zaključili da su sve linije između otoka u $\tilde{B}$ brodske, te su sve linije između otoka u A brodske. Dakle, sve avionske linije su samo one koje povezuju svaki otok iz B sa svakim otokom iz $\tilde{A}$. Broj takvih linija je $m(n - m)$. 1 bod

Kako je n neparan, barem jedan od faktora m ili $n-m$ je paran, pa je i njihov umnožak paran. Dakle, broj avionskih linija u arhipelagu je paran. 1 bod

Napomena: Točno pogođeno rješenje bez dokaza vrijedi 1 bod. Za potpuno rješenje potrebno je dokazati da tvrdnja ne vrijedi za parne n (4 boda) i da vrijedi za neparne n (5 bodova).

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

29. ožujka 2021.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-4.1.

Odredi sve prirodne brojeve m za koje je $m! + 8$ potencija nekog prostog broja.

Rješenje.

Za $m = 1$ imamo $m! + 8 = 3^2$, pa je to jedno rješenje. 1 bod

Za $m \geqslant 2$ broj $m! + 8$ je paran broj, pa može biti samo potencija broja 2. 2 boda

Možemo pisati $m! + 8 = 2^k$.

Za $m = 2$ i $m = 3$ redom lijeva strana je jednaka 10 i 14, a to nisu potencije prostog broja. 1 bod

Za $m = 4$ lijeva strana daje $32 = 2^5$, pa smo dobili drugo rješenje. 1 bod

Za $m = 5$ lijeva strana daje $128 = 2^7$, pa smo dobili još jedno rješenje. 1 bod

Za $m \geqslant 6$ broj $m!$ je djeljiv sa 16 (jer $m!$ u sebi sadrži faktore 2, 4 i 6). Zato broj $m! + 8$ nije djeljiv sa 16. 2 boda

S druge strane, imamo $2^k = m! + 8 > 8$, što znači da je $k \geqslant 4$, odnosno broj 2^k djeljiv je sa 16. 1 bod

Dakle, za $m \geqslant 6$ jednadžba $m! + 8 = 2^k$ nema rješenja jer je desna strana jednadžbe djeljiva sa 16, a lijeva nije. 1 bod

Dakle, sva rješenja su $m = 1, 4, 5$.

Zadatak A-4.2.

Neka je $w = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$. Odredi najveći broj $n \in \mathbb{N}_0$ za koji postoje kompleksni brojevi a, b, c tako da za svaki $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ vrijedi

$$a + bw^k + cw^{2k} = k.$$

Za tako određeni n nađi sve trojke (a, b, c) koje zadovoljavaju gornje jednakosti.

Rješenje.

Uočimo prvo da je w treći korijen iz 1, tj. da vrijedi $w^3 = 1$. 1 bod

Pretpostavimo sad da je $n \geqslant 3$. Iz $w^3 = 1$ slijedi

$$0 = a + b + c = a + bw^3 + cw^6 = 3,$$

što je očito nemoguće.
Stoga zaključujemo da je $n \leqslant 2$. 2 boda

Dokažimo da je najveći mogući n koji zadovoljava uvjete zadatka $n = 2$. Za $n = 2$ dobivamo sustav tri jednadžbe s tri nepoznanice

$$\begin{aligned} a + b + c &= 0 \\ a + bw + cw^2 &= 1 \\ a + bw^2 + cw &= 2. \end{aligned}$$ 1 bod

Zbrajanjem gornje tri jednadžbe dobijemo

$$3a + b(1 + w + w^2) + c(1 + w^2 + w) = 3.$$ 1 bod

Budući da je $w^3 - 1 = (w - 1)(w^2 + w + 1) = 0$, slijedi $w^2 + w + 1 = 0$, pa iz gornje jednadžbe dobijemo $a = 1$. 2 boda

Uvrštavanjem $a = 1$ u prve dvije jednažbe sustava dobijemo

$$\begin{aligned} b + c &= -1 \\ bw + cw^2 &= 0. \end{aligned}$$ 1 bod

Množenjem prve jednadžbe s $-w$ i dodavanjem drugoj slijedi $c(w^2 - w) = w$, tj. $c = \dfrac{1}{w-1}$. 1 bod

Budući da je $b = -1 - c$ slijedi $b = -\dfrac{w}{w-1}$.
Dakle, za $n = 2$ traženi kompleksni brojevi su

$$(a, b, c) = \left(1, -\frac{w}{w-1}, \frac{1}{w-1}\right),$$ 1 bod

te je $n = 2$ zaista najveći broj za koji vrijede uvjeti zadatka.

Napomena: Brojevi a, b i c mogu se na razne načine izraziti preko w i treba priznati svaki točan način. Neki primjeri za (a, b, c) su $\left(1, \dfrac{w}{1-w}, \dfrac{1}{w-1}\right)$, $\left(1, \dfrac{w-1}{3}, -\dfrac{w+2}{3}\right)$.
Također, trojka (a, b, c) može se zapisati i bez korištenja broja w:

$$(a, b, c) = \left(1, \frac{-3 + i\sqrt{3}}{6}, \frac{-3 - i\sqrt{3}}{6}\right).$$

Zadatak A-4.3.

Neka su x, y i z realni brojevi takvi da je $xy + yz + zx = 1$. Neka je

$$S = \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{y^2}{1+y^2} + \frac{z^2}{1+z^2}.$$

a) Ako su x, y i z pozitivni brojevi, dokaži da je $S < 1$.

b) Dokaži da je $S < 1$ ako i samo ako su brojevi x, y i z istog predznaka.

Prvo rješenje.

Uočimo da korištenjem uvjeta $xy + yz + zx = 1$ nazivnik $x^2 + 1$ možemo faktorizirati kao

$$x^2 + 1 = x^2 + xy + yz + xz = (x+y)(x+z).$$ 2 boda

Analogno je $y^2 + 1 = (y+x)(y+z)$ i $z^2 + 1 = (z+x)(z+y)$.

Slijedi

$$\begin{aligned} S &= \frac{x^2}{(x+y)(x+z)} + \frac{y^2}{(y+x)(y+z)} + \frac{z^2}{(z+x)(z+y)} \\ &= \frac{x^2(y+z) + y^2(x+z) + z^2(x+y)}{(x+y)(y+z)(z+x)} = 1 - \frac{2xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}. \end{aligned}$$ 2 boda

Sad je očito $S < 1$ ako i samo ako je $1 - S = \dfrac{2xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} > 0.$ 1 bod

Ako su $x, y, z > 0$, svi faktori u gornjem izrazu su pozitivni, pa je očito $S < 1$. 1 bod

Ako su x, y, z svi negativni, analogno je $S < 1$ jer su svi faktori negativni. 1 bod

Pretpostavimo sad da nisu svi brojevi x, y, z istog predznaka. Ako je samo jedan broj pozitivan (a druga dva negativna), bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $x > 0$ i $y, z < 0$. U tom slučaju je $2xyz > 0$ i $(x+y)(y+z)(z+x) = (x^2+1)(y+z) < 0$, pa slijedi $1 - S < 0$. 2 boda

Ako su dva broja pozitivna, a jedan negativan, tada rješavamo analogno prošlom slučaju. 1 bod

Dakle, $S < 1$ ako i samo ako su svi x, y, z istog predznaka.

Drugo rješenje.

Svodeći sve razlomke iz S na zajednički nazivnik, zaključujemo da je $S < 1$ ako i samo ako je

$$\frac{x^2(1+y^2)(1+z^2) + y^2(1+z^2)(1+x^2) + z^2(1+x^2)(1+y^2)}{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)} < 1.$$

Množeći nejednakost s nazivnikom lijeve strane, i uvodeći pokrate $A = x^2 + y^2 + z^2$, $B = x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$, dobivamo da nejednakost $S < 1$ vrijedi ako i samo ako je

$$x^2(1+y^2)(1+z^2) + y^2(1+z^2)(1+x^2) + z^2(1+x^2)(1+y^2) < (1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)$$

odnosno, ako i samo ako je

$$\begin{aligned} & A+2B+3x^2y^2z^2 < 1+A+B+x^2y^2z^2 \\ \iff \quad & B+2x^2y^2z^2 < 1. \end{aligned}$$

1 bod

Koristeći $1 = (xy+yz+zx)^2 = B + 2(x^2yz + xy^2z + xyz^2)$, dobivamo da je početna nejednakost ekvivalentna s

$$\begin{aligned} & B+2x^2y^2z^2 < B+2(x^2yz+xy^2z+xyz^2) \\ \iff \quad & 0 < xyz(x+y+z-xyz). \end{aligned}$$

2 boda

Ponovno koristeći uvjet $xy+yz+zx=1$ dobivamo da je

$$x+y+z-xyz = x+y+z(1-xy) = x+y+z(xz+yz) = (x+y)(1+z^2),$$

1 bod

pa je $S < 1$ ako i samo ako je

$$0 < xyz(x+y)(1+z^2).$$

1 bod

Ako su svi brojevi x, y i z pozitivni, nejednakost očito vrijedi. 1 bod

Ako su svi brojevi x, y i z negativni, nejednakost opet vrijedi jer imamo četiri negativna faktora u zadnjoj nejednakosti na desnoj strani. 1 bod

Pretpostavimo da x, y i z nisu svi istog predznaka. Pretpostavimo prvo da je točno jedan od njih pozitivan. Kako je izraz S simetričan po varijablama x, y i z, tada bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je to z. Tada je izraz $xyz(x+y)(z^2+1)$ umnožak tri negativna faktora pa je negativan, stoga ne vrijedi $S < 1$. 2 boda

Slučaj kada je točno jedan od x, y i z negativan rješavamo analogno. 1 bod

Dakle, $S < 1$ ako i samo ako su svi x, y i z istog predznaka.

Napomena: Rješenje je moguće skratiti tako da se pomoću supstitucije $x' = -x$, $y' = y$, $z' = z$ zaključi da se broj slučajeva o predznacima brojeva x, y i z može prepoloviti. Taj zaključak nosi 2 boda, te mijenja sedmi i deseti bod bodovnih shema.

Zadatak A-4.4.

U nogometnom klubu je n igrača koji imaju dresove s međusobno različitim brojevima od 1 do n. Na kraju sezone igrač s brojem 1 završava karijeru. Uprava bira jednog od ostalih igrača kojeg prodaje nekom drugom klubu, dok svih preostalih $n-2$ igrača dobiva dresove s međusobno različitim brojevima od 1 do n.

Na koliko načina uprava može odabrati igrača za prodaju i preostalima dati brojeve tako da nijedan igrač nema veći broj od onog koji je imao ove sezone?

Prvo rješenje.

Rješenje je $3^{n-1} - 2^{n-1}$. 1 bod

Za svaki $k = 2, 3, \ldots, n$ pogledat ćemo slučaj u kojem je na kraju sezone prodan igrač s brojem k na dresu. Izračunat ćemo broj mogućih raspodjela dresova ostalim igračima u tom slučaju, a zatim sumirati rezultate po svim k.

Fiksirajmo (prodanog) igrača s brojem k. Igrač s brojem 2 može u novoj sezoni dobiti broj 1 ili 2. Igrač s brojem 3 može u novoj sezoni dobiti broj 1, 2 ili 3, ali ne može dobiti isti broj kao igrač s brojem 2, pa opet ima samo dvije mogućnosti. Igraču s brojem i ($i = 2, \ldots, k-1$) možemo u novoj sezoni izabrati jedan od prvih i brojeva, ali ne može biti isti broj kao neki od njegovih $i-2$ prethodnika, pa opet ima $i-(i-2) = 2$ načina za odabir.
Takvih igrača je ukupno $k-2$, pa je zato broj odabira dresova za novu sezonu za igrače koji su ove sezone imali brojeve $2, 3, \ldots, k-1$ jednak 2^{k-2}. 3 boda

Igraču s brojem $k+1$ možemo u novoj sezoni izabrati jedan od prvih $k+1$ brojeva, ali ne može biti isti broj kao neki od prvih $k-2$ igrača, što znači da imamo točno tri mogućnosti. Igraču s brojem j ($j = k+1, \ldots, n$) možemo u novoj sezoni izabrati jedan od prvih j brojeva, ali ne može biti isti broj kao neki od njegovih $j-3$ prethodnika, pa opet ima $j-(j-3) = 3$ načina za odabir.
Takvih igrača je ukupno $n-k$, pa je zato broj odabira dresova za novu sezonu za igrače koji su ove sezone imali brojeve $k+1, k+2, \ldots, n$ jednak 3^{n-k}. 3 boda

Zato je ukupan broj načina raspodjele dresova preostalim igračima u slučaju da je prodan igrač s brojem k jednak $2^{k-1} \cdot 3^{n-k}$.

Kada sumiramo sve mogućnosti (ovisno o prodanom igraču s brojem k), ukupan broj načina na koji možemo igračima podijeliti brojeve za novu sezonu je

$$2^0 \cdot 3^{n-2} + 2^1 \cdot 3^{n-3} + \cdots + 2^{n-2} \cdot 3^0.$$ 1 bod

Koristeći identitet za razliku jednakih potencija dvaju brojeva, gornju sumu možemo zapisati i kao

$$2^0 \cdot 3^{n-2} + 2^1 \cdot 3^{n-3} + \cdots + 2^{n-2} \cdot 3^0 = \frac{3^{n-1} - 2^{n-1}}{3-2} = 3^{n-1} - 2^{n-1},$$ 2 boda

čime dobivamo konačan rezultat.

Drugo rješenje.

Ponovno dokazujemo da je rješenje $3^{n-1} - 2^{n-1}$. 1 bod

Izrecimo uvjete zadatka na drugačiji, no ekvivalentan način. Umjesto da nekog igrača prodajemo, pretpostavimo da jednom igraču dajemo dres s brojem 0 za novu sezonu. To znači da će za novu sezonu svi igrači (osim igrača s brojem 1) dobiti novi dres s brojem koji nije veći od broja koji su imali ove sezone s time da jedan igrač mora dobiti broj 0.

Označimo s A ukupan broj načina na koji igračima možemo podijeliti brojeve za novu sezonu uključujući broj 0 u odabiru, bez da namećemo uvjet da neki igrač mora dobiti dres s brojem 0. Označimo s B ukupan broj načina na koji igračima možemo podijeliti brojeve za novu sezonu tako da nijedan igrač ne dobije dres s brojem 0. Budući da znamo da jedan igrač mora dobiti broj 0 traženi broj načina na koji možemo podijeliti brojeve za novu sezonu je

$$A - B.$$ 3 boda

Odredimo prvo A. Igrač s brojem 2 može u novoj sezoni dobiti broj 0, 1 ili 2. Igraču s brojem i ($i = 2, \ldots, n$) možemo u novoj sezoni izabrati jedan od $i + 1$ brojeva $(0, 1, \ldots, i)$, ali ne može biti isti broj kao neki od njegovih $i - 2$ prethodnika, pa opet ima $i + 1 - (i - 2) = 3$ načina za odabir. Igrača je ukupno $n - 1$, pa je $A = 3^{n-1}$. 3 boda

Odredimo sada B. Igrač s brojem 2 može u novoj sezoni dobiti broj 1 ili 2. Igraču s brojem i ($i = 2, \ldots, n$) možemo u novoj sezoni izabrati jedan od i brojeva $(1, \ldots, i)$, ali ne može biti isti broj kao neki od njegovih $i-2$ prethodnika, pa opet ima $i-(i-2) = 2$ načina za odabir. Igrača je ukupno $n - 1$, pa je $B = 2^{n-1}$. 3 boda

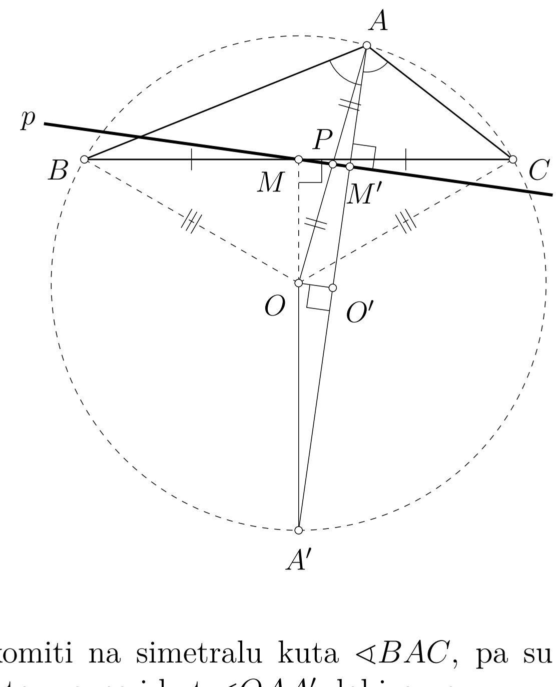
Dakle, ukupan broj načina na koji možemo igračima podijeliti brojeve za novu sezonu je $3^{n-1} - 2^{n-1}$.

Zadatak A-4.5.

Neka je ABC trokut i O središte njegove opisane kružnice. Pravac p okomit je na simetralu kuta $\sphericalangle BAC$, prolazi polovištem stranice $\overline{BC}$ te polovištem dužine $\overline{AO}$. Odredi veličinu kuta $\sphericalangle BAC$.

Rješenje.

Neka je A' drugo sjecište simetrale kuta $\sphericalangle BAC$ i opisane kružnice trokuta ABC, P polovište od $\overline{AO}$ i M polovište od $\overline{BC}$. Označimo s M' i O' nožišta okomica iz M i O na AA' redom.



Pravci p i OO' su okomiti na simetralu kuta $\sphericalangle BAC$, pa su paralelni. Primjenom Talesovog teorema na te pravce i kut $\sphericalangle OAA'$ dobivamo

$$\frac{|AM'|}{|AO'|} = \frac{|AP|}{|AO|} = \frac{1}{2}.$$ 1 bod

Odavde je i $|M'O'| = \frac{1}{2}|AO|'$. 1 bod

Kako je trokut $AA'O$ jednakokračan, a O' je ortogonalna projekcija točke O na AA', vrijedi $|AO'| = |A'O'|$. 1 bod

Poznato je da A' kao sjecište simetrale kuta $\sphericalangle BAC$ i kružnice opisane trokutu BAC leži na simetrali dužine $\overline{BC}$, pa su zato točke A', O i M kolinearne. 1 bod

Primjenom Talesovog teorema na pravce p i OO' te kut $\sphericalangle OA'A$ dobivamo

$$\frac{|O'M'|}{|A'O'|} = \frac{|OM|}{|A'O|}.$$ 1 bod

Iz svega dobivenog zaključujemo $|OM| = \frac{1}{2}|A'O| = \frac{R}{2}$, gdje je R radijus kružnice opisanom trokutu ABC. 2 boda

Trokut OMC je pravokutan i vrijedi $|OM| = \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}|OC|$, pa je taj trokut polovica jednakostraničnog trokuta, odnosno $\sphericalangle MCO = 30^\circ$. 1 bod

Trokut BOC je jednakokračan, pa je $\sphericalangle BOC = 180^\circ - 2\sphericalangle MCO = 120^\circ$. 1 bod

Konačno iz teorema o obodnom i središnjem kutu slijedi

$$\sphericalangle BAC = \frac{1}{2}(360^\circ - \sphericalangle BOC) = 120^\circ.$$ 1 bod