Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

29. ožujka 2021.

1. Tena je zamislila jedan prirodni broj, pomnožila ga sa 17 i zapisala rezultat na ploču. Vito je obrisao zadnju znamenku, dobiveni broj pomnožio s 8 i zapisao rezultat na ploču. Tena je obrisala zadnju znamenku njegovog rezultata i na ploči je ostao zapisan broj 56. Koji je broj zamislila Tena?

2. Ako se od zbroja 10 uzastopnih neparnih prirodnih brojeva oduzme jedan od tih brojeva, dobiva se broj 2021. Koji su to brojevi i koji smo broj oduzeli?

3. Duljine stranica trokuta tri su uzastopna prirodna broja, ne manja od 3. Izračunajte razliku duljina odsječaka koje na srednjoj stranici po duljini odsijeca visina na tu stranicu.

4. U nekom kvizu sudjeluju Plavi, Crveni i Žuti tim. Prosjek bodova članova Plavog tima je 30, Crvenog tima 50, a Žutog 90, dok je prosjek bodova svih natjecatelja 60. Plavi je tim ukupno ostvario 360 bodova manje od Crvenog, a Žuti 6 puta više bodova od Plavog. Koliko je članova u pojedinom timu?

5. Tri prijateljice Marta, Iva i Ana jako vole putovati. Marta je posjetila 20 država, Iva 90% država više nego Marta, a Ana 13 država manje nego Iva. Ana je posjetila 40% država u kojima je bila Marta, a Iva je posjetila petinu država u kojima je bila Ana i polovinu država u kojima je bila Marta. Broj država koje su posjetile sve tri prijateljice 16 je puta manji od ukupnog broja država koje su posjetile. Koliko su ukupno država posjetile?

$*\quad*\quad*$

6. Odredite vrijednost realnog parametra a za koji svaka od jednadžbi

$$2a-1=\frac{3-3a}{x-1} \qquad \text{i} \qquad a^2(2x-4)-1=a(4-5x)-2x$$

ima jedinstveno rješenje i njihova rješenja su jednaka.

7. Četverokut $ABCD$ ima točno dva prava kuta, u vrhu A i u vrhu C. Na dijagonali $\overline{AC}$ točke E i F su nožišta okomica povučenih redom iz vrhova B i D na $\overline{AC}$. Ako je $|AE|=3$, $|BE|=5$ i $|CE|=7$, koliko je $|DF|$?

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

29. ožujka 2021.

1. Odredite sva realna rješenja jednadžbe

$$(x+3)(x+5)=4+\frac{2021}{(x+1)(x+7)}.$$

2. Konačan niz brojeva je *izvrstan* ako je svaki sljedeći član niza, osim prvoga, veći od prethodnoga i ako je umnožak svih članova toga niza potpuni kvadrat. Primjerice, niz 2, 6, 27 je *izvrstan* niz. Odredite prirodne brojeve x i y tako da niz 28, x, y, 65 bude *izvrstan*.

3. Na stranici $\overline{AB}$ trokuta ABC dana je točka E takva da je $|AE|=1$ i $|EB|=2$. Neka je točka D na stranici $\overline{AC}$ takva da je dužina $\overline{DE}$ paralelna s dužinom $\overline{BC}$, a točka F na stranici $\overline{BC}$ takva da je dužina $\overline{EF}$ paralelna s dužinom $\overline{AC}$. Izračunajte omjer površina četverokuta $CDEF$ i trokuta ABC.

4. Ako za kutove trokuta α, β i γ vrijedi da je $\sin\alpha=2\sin\beta\cos\gamma$ i $\beta+\gamma=86°$, odredite α, β i γ.

5. Pravilo pridruživanja funkcije f jest $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}}$. Odredite interval realnih brojeva na kojemu ova funkcija poprima konstantnu vrijednost.

* * *

6. Tjeme parabole je u točki $T(x,y)$, $y<0$. Parabola siječe os x u točkama $A(2,0)$ i $B(8,0)$. Ako su brojčani iznosi opsega i površine trokuta ABT u omjeru $4:3$, odredite jednadžbu parabole i koordinate tjemena parabole.

7. Učenici neke škole sudjelovali su na stolnoteniskom turniru. Pravilima je predviđeno da svaka dva natjecatelja odigraju točno jednu partiju. Tijekom turnira učenici A, B i C su odustali od daljnjeg natjecanja. Učenik A je odustao nakon što je odigrao dvije partije, B nakon tri, a C nakon pet odigranih partija. Ostali su natjecatelji odigrali turnir do kraja. Ako je na turniru odigrano 197 partija, koliko je učenika sudjelovalo na turniru?

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

29. ožujka 2021.

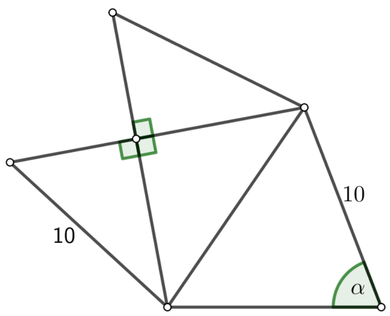
1. Izraz $\cos^2 x + \cos^2\left(\frac{\pi}{6}+x\right) - 2\cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$ ima istu vrijednost za sve realne brojeve x. Izračunajte tu vrijednost.

2. Neka je $A = 1202^2 + 2^{2021}$. Odredite znamenku jedinica broja A^{2021}.

3. Odredite sve realne brojeve x za koje vrijedi $3^{\frac{1}{\log x}} - 2\cdot 3^{\frac{\log 10x^2}{\log x^2}} = 27$.

4. Koliko ima deveteroznamenkastih brojeva djeljivih sa 75 kojima su sve znamenke različite, a znamenka stotica je 7?

5. Na slici je prikazana mreža piramide. Izračunajte obujam te piramide ako je $\cos\alpha = \frac{9}{25}$.



* * *

6. Odredite sve realne brojeve x iz intervala $[0,1]$ za koje je $\operatorname{tg}\left(2\pi\sin^2(2\pi x)\right) = 0$.

7. Neka je $ABCD$ konveksni četverokut takav da je $|AB| = 2\sqrt{3}$, $|BC| = 3$, $|CD| = 1$, $\sphericalangle DAB = 90^\circ$ i $\sphericalangle ABC = 30^\circ$. Odredite $\sphericalangle BCD, \sphericalangle CDA$ i $|AD|$.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

29. ožujka 2021.

1. Za realne brojeve x i y, $x < y$, vrijedi:

$$\begin{aligned} &x^3 + y^3 = 65, \\ &2^{x+y} + 2^{x+y+1} + 2^{x+y+2} = 224. \end{aligned}$$

Neka je y prvi, a x drugi član geometrijskog reda. Koliko iznosi zbroj toga reda?

2. Duljine stranica trokuta čine aritmetički niz s razlikom 2. Ako je sinus najmanjeg kuta u tomu trokutu jednak $\frac{\sqrt{15}}{8}$, izračunajte opseg toga trokuta.

3. Odredite sve brojeve n za koje vrijedi

$$\binom{2022}{n+1} - \binom{2021}{n} \leqslant \frac{1}{2023}\binom{2023}{n+2}.$$

4. Koliko ima lozinki koje se sastoje od 4 znaka iz skupa $\{a, b, c, 1, 2, 3, 4, 5, +, !\}$ takvih da su svi znakovi lozinke različiti ili da lozinka sadrži točno dva, ne nužno različita slova i dvije, ne nužno različite znamenke?

5. Točka M je polovište visine pravilnog tetraedra $ABCD$ povučene iz vrha A na osnovku BCD. Odredite mjeru kuta BMC.

* * *

6. Neka je $f_1(x) = \frac{1}{2-x}$, $f_n(x) = (f_1 \circ f_{n-1})(x)$, $n \geqslant 2$, za sve realne brojeve x za koje su navedene funkcije definirane. Koliko je $f_{2021}(4)$?

7. U kompleksnoj ravnini predočite skup svih kompleksnih brojeva z za koje vrijedi $|z| \leqslant 4$ i $2\sqrt{3} - 2 \leqslant \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) \leqslant 4$. Kolika je površina tog skupa?

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.