ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

29. ožujka 2021.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-1.1.

Tena je zamislila jedan prirodni broj, pomnožila ga sa 17 i zapisala rezultat na ploču. Vito je obrisao zadnju znamenku, dobiveni broj pomnožio s 8 i zapisao rezultat na ploču. Tena je obrisala zadnju znamenku njegovog rezultata i na ploči je ostao zapisan broj 56. Koji je broj zamislila Tena?

Rješenje.

Ako je na ploči broj 56 znači da je Vito množenjem s 8 dobio broj između 560 i 569. 1 bod

U tomu su intervalu dva broja djeljiva s 8: $560 = 70 \cdot 8$, $568 = 71 \cdot 8$. 2 boda

Množenjem sa 17 Tena je dobila broj između 700 i 719. 1 bod

U tomu je intervalu samo jedan broj djeljiv sa 17: $714 = 42 \cdot 17$. 1 bod

Tena je zamislila broj 42. 1 bod

Napomena: Ako učenik iz razmatranja izostavi jedan od brojeva 560 ili 568, a dalje ima točan postupak slijedeći tu pogrešku, dobiva 5 bodova.

Zadatak B-1.2.

Ako se od zbroja 10 uzastopnih neparnih prirodnih brojeva oduzme jedan od tih brojeva, dobiva se broj 2021. Koji su to brojevi i koji smo broj oduzeli?

Rješenje.

Zbroj 10 uzastopnih neparnih prirodnih brojeva jest

$$\begin{aligned}(2x+1)+(2x+3)+(2x+5)+(2x+7)+(2x+9)+(2x+11)+(2x+13)\\ +(2x+15)+(2x+17)+(2x+19)=2021+(2x+a),\end{aligned}$$

gdje je $a \in \{1,3,5,7,9,11,13,15,17,19\}$. 1 bod

Slijedi da je

$$20x+(1+3+5+7+9+11+13+15+17+19)=2021+2x+a,$$

odnosno

$$20x + 5 \cdot 20 = 2021 + 2x + a,$$
$$18x = 1921 + a,$$

pa je

$$x = \frac{1921 + a}{18}, \quad \text{1 bod}$$

što možemo zapisati u obliku

$$x = 106 + \frac{13 + a}{18}. \quad \text{1 bod}$$

Broj 18 mora biti djelitelj broja $(13+a)$, a budući da je $a \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$ to je moguće samo za $a = 5$, pa je $x = 107$. 1 bod

Traženi su brojevi 215, 217, 219, 221, 223, 225, 227, 229, 231 i 233. 1 bod

Oduzeli smo broj 219. 1 bod

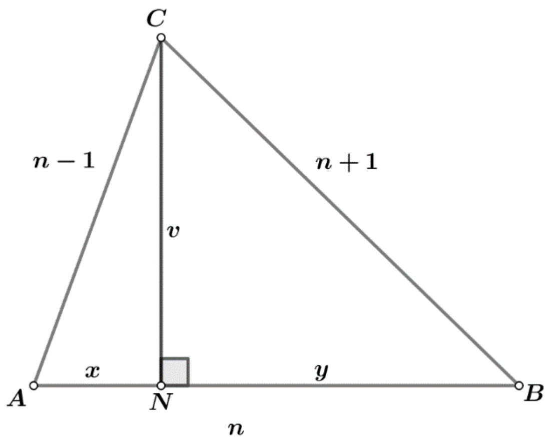
Napomena: Učenik može do točnog rješenja doći procjenom i namještanjem brojeva oko aritmetičke sredine svih 10 ili 9 zadanih brojeva. Aritmetičku sredinu mogu procijeniti na različite načine. Primjerice, mogu zaključiti da je zbroj svih deset brojeva približno 2223 ($2021 : 10 \cdot 11$) pa je aritmetička sredina paran broj oko broja 222, a tada redom „namještaju" brojeve. Za ovakav postupak s točnim rješenjem, bez argumentacije zašto je to jedino rješenje, učenik dobiva 4 boda. Ako nema nikakvog postupka, a ima točno rješenje dobiva 2 boda.

Zadatak B-1.3.

Duljine stranica trokuta tri su uzastopna prirodna broja, ne manja od 3. Izračunajte razliku duljina odsječaka koje na srednjoj stranici po duljini odsijeca visina na tu stranicu.

Rješenje.

Neka su duljine stranica trokuta $|AC| = n - 1$, $|AB| = n$ i $|BC| = n + 1$, kao na slici.



$\overline{CN}$ je visina na stranicu $\overline{AB}$, srednju stranicu po duljini, a x i y duljine odsječaka, na koje točka N dijeli stranicu $\overline{AB}$. Tada iz pravokutnih trokuta ANC i NBC, prema Pitagorinom poučku slijedi

$$(n-1)^2 - x^2 = v^2, \quad \text{1 bod}$$

$$(n+1)^2 - y^2 = v^2. \qquad \text{1 bod}$$

Izjednačimo li dobivene izraze za kvadrat visine, redom slijedi:

$$(n-1)^2 - x^2 = (n+1)^2 - y^2 \qquad \text{1 bod}$$

$$n^2 - 2n + 1 - n^2 - 2n - 1 = x^2 - y^2$$

$$y^2 - x^2 = 4n. \qquad \text{1 bod}$$

Primjenom formule za razliku kvadrata dobivamo

$$(y+x)(y-x) = 4n.$$

Kako je $y + x = n$ slijedi da je

$$(y+x)(y-x) = 4n, \qquad \text{1 bod}$$

odnosno

$$y - x = 4.$$

Tražena razlika odsječaka jest 4. 1 bod

Zadatak B-1.4.

U nekom kvizu sudjeluju Plavi, Crveni i Žuti tim. Prosjek bodova članova Plavog tima je 30, Crvenog tima 50, a Žutog 90, dok je prosjek bodova svih natjecatelja 60. Plavi je tim ukupno ostvario 360 bodova manje od Crvenog, a Žuti 6 puta više bodova od Plavog. Koliko je članova u pojedinom timu?

Rješenje.

Neka je u Plavom timu n članova i neka su ostvarili P bodova, u Crvenom timu m članova i ostvarili su C bodova, a u Žutom timu k članova i ostvarenih $\check{Z}$ bodova.

Prema uvjetima iz zadatka vrijedi

$$\frac{P}{n} = 30 \text{ odnosno } P = 30n,$$

$$\frac{C}{m} = 50 \text{ odnosno } C = 50m,$$

$$\frac{\check{Z}}{k} = 90 \text{ odnosno } \check{Z} = 90k. \qquad \text{1 bod}$$

Također, vrijedi

$$C = P + 360, \check{Z} = 6P. \qquad \text{1 bod}$$

Iz dobivenih jednadžbi redom slijedi:

$$50m = 30n + 360, \text{ odnosno } 5m = 3n + 36,$$

$$90k = 6 \cdot 30n, \text{ odnosno } k = 2n. \qquad \text{1 bod}$$

Prosjek svih natjecatelja je 60 što pišemo

$$\frac{P + C + \check{Z}}{n + m + k} = 60. \qquad \text{1 bod}$$

Tada je $\dfrac{30n+50m+90k}{n+m+k}=60$, pa je $\dfrac{3n+5m+9k}{n+m+k}=6$. Odatle redom dobivamo:

$$3n+5m+9k=6n+6m+6k$$

$$3n+m-3k=0$$

$$3n+\frac{3n+36}{5}-6n=0.$$ 1 bod

Dakle, konačno rješenje jest

$$n=3,\ m=9,\ k=6.$$

U Plavom timu su 3 člana, u Crvenom 9, a u Žutom 6. 1 bod

Zadatak B-1.5.

Tri prijateljice Marta, Iva i Ana jako vole putovati. Marta je posjetila 20 država, Iva 90% država više nego Marta, a Ana 13 država manje nego Iva. Ana je posjetila 40% država u kojima je bila Marta, a Iva je posjetila petinu država u kojima je bila Ana i polovinu država u kojima je bila Marta. Broj država koje su posjetile sve tri prijateljice 16 je puta manji od ukupnog broja država koje su posjetile. Koliko su ukupno država posjetile?

Prvo rješenje.

Označimo s $k(M)$ broj država koje je posjetila Marta, s $k(I)$ broj država koje je posjetila Iva te s $k(A)$ broj država koje je posjetila Ana. Tada je prema uvjetima iz zadatka

$$k(M)=20,\ k(I)=38,\ k(A)=25.$$ 1 bod

$$k(M\cap A)=8,\ k(I\cap A)=5,\ k(M\cap I)=10.$$ 1 bod

Označimo s x broj država koje su posjetile sve prijateljice, tj. $k(M\cap I\cap A)=x$.

Tada je $k(M\cup I\cup A)=16x$, pa primjenom formule 1 bod

$$k(M\cup I\cup A)=k(M)+k(I)+k(A)-k(M\cap A)-k(I\cap A)-k(M\cap I)+k(M\cap I\cap A)$$ 1 bod

slijedi

$$16x=20+38+25-8-5-10+x,$$

odnosno $x=4$. 1 bod

Prijateljice su ukupno posjetile 64 države. 1 bod

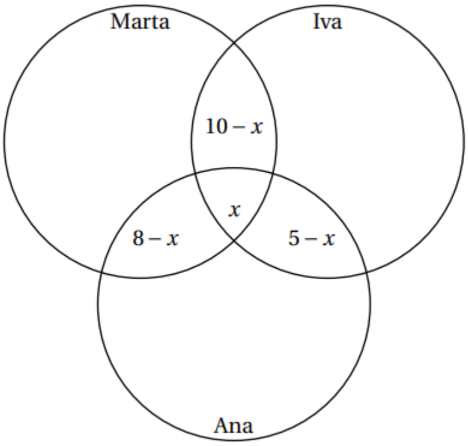
Drugo rješenje.

Marta je posjetila 20 država, Iva 38, a Ana 25.

Marta i Ana su posjetile 8 država. Ana i Iva 5 država, te Marta i Iva 10 država. 1 bod

Označimo s x broj država koje su posjetile sve tri prijateljice. Prikažimo ove podatke o broju država s pomoću Vennovih dijagrama.

Prvo ćemo upisati podatke o broju elemenata presjeka tri skupa, a zatim podatke o broju elemenata presjeka po dva skupa.



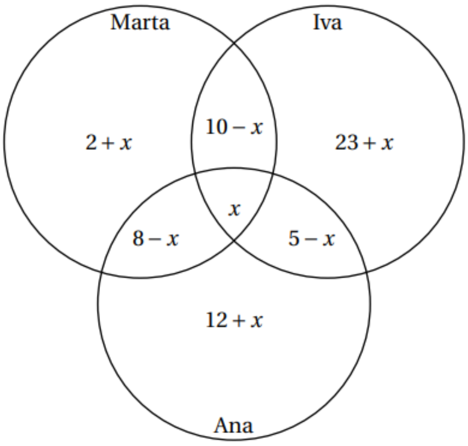
1 bod

Ostala polja u dijagramu popunjavamo na sljedeći način.

Samo Marta je bila u $20-(10-x)-(8-x)-x=2+x$ država.

Samo Iva je bila u $38-(10-x)-(5-x)-x=23+x$ država.

Samo Ana je bila u $25-(8-x)-(5-x)-x=12+x$ država.



2 boda

Tada je

$$16x=2+x+23+x+12+x+10-x+5-x+8-x+x,$$

odnosno $x=4$. 1 bod

Prijateljice su ukupno posjetile 64 države. 1 bod

Zadatak B-1.6.

Odredite vrijednost realnog parametra a za koji svaka od jednadžbi

$$2a-1=\frac{3-3a}{x-1} \qquad \text{i} \qquad a^2(2x-4)-1=a(4-5x)-2x$$

ima jedinstveno rješenje i njihova rješenja su jednaka.

Rješenje.

Riješimo prvo jednadžbu $2a - 1 = \dfrac{3-3a}{x-1}$. Uočimo da mora vrijediti $x \neq 1$. Nakon množenja jednadžbe s $x-1$ i sređivanja dobivenih algebarskih izraza, redom slijedi:

$$2ax - 2a - x + 1 = 3 - 3a,$$

$$x(2a-1) = 2 - a,$$

$$x = \frac{2-a}{2a-1},\ a \neq \frac{1}{2}.$$ 1 bod

Kako je $x \neq 1$, iz $\dfrac{2-a}{2a-1} \neq 1$ slijedi 1 bod

$$2 - a \neq 2a - 1,$$

odnosno $a \neq 1$.

Dakle za $a \in \mathbf{R}$, $a \neq \dfrac{1}{2}$ i $a \neq 1$ jednadžba ima jedinstveno rješenje $x = \dfrac{2-a}{2a-1}$. 1 bod

Riješimo i drugu jednadžbu.

$$a^2(2x-4) - 1 = a(4-5x) - 2x$$

$$2xa^2 - 4a^2 - 1 = 4a - 5ax - 2x$$

$$x(2a^2 + 5a + 2) = 4a^2 + 4a + 1$$ 1 bod

$$x(2a^2 + 4a + a + 2) = (2a+1)^2$$

$$x[2a(a+2) + a + 2] = (2a+1)^2$$

$$x(a+2)(2a+1) = (2a+1)^2$$ 1 bod

Iz ove jednakosti zaključujemo da za $a \in \mathbf{R}$, $a \neq -\dfrac{1}{2}$ i $a \neq -2$ 1 bod

jednadžba ima jedinstveno rješenje

$$x = \frac{2a+1}{a+2}.$$ 1 bod

Izjednačimo rješenja zadanih jednadžbi.

$$\frac{2-a}{2a-1} = \frac{2a+1}{a+2}$$

Slijedi $4 - a^2 = 4a^2 - 1$, pa je $a^2 = 1$, a 1 bod

$$a = \pm 1.$$ 1 bod

Zbog $a \neq 1$ slijedi da jedino za $a = -1$ jednadžbe imaju jednako rješenje. 1 bod

Napomena: Umjesto računanja broja a za koji je ispunjen uvjet $x \neq 1$, učenik može na kraju provjeriti imaju li dane jednadžbe za dobivene realne brojeve $a = \pm 1$ jednako rješenje. U tom slučaju dobiva sve predviđene bodove, ali mora imati napisane uvjete za koje te jednadžbe imaju jedinstveno rješenje, odnosno da je $a \neq \frac{1}{2}$ kod prve jednadžbe i $a \neq -\frac{1}{2}$, $a \neq -2$ kod druge jednadžbe.

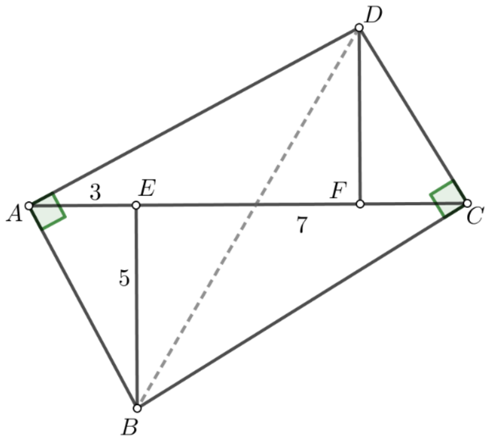
Ako nema zapisane samo te uvjete, oduzeti dva boda. Ako učenik nije zapisao uvjet $x \neq 1$, pa nije odbacio jedno rješenje i nije niti provjerio rješenja, ali ima prethodno navedene uvjete na rješenja jednadžbi pojedinačno, oduzeti 3 boda.

Ako učenik nema niti jedan uvjet, nema provjere, već samo rješenje, može dobiti maksimalno 5 bodova.

Zadatak B-1.7.

Četverokut $ABCD$ ima točno dva prava kuta, u vrhu A i u vrhu C. Na dijagonali $\overline{AC}$ točke E i F su nožišta okomica povučenih redom iz vrhova B i D na $\overline{AC}$. Ako je $|AE| = 3$, $|BE| = 5$ i $|CE| = 7$, koliko je $|DF|$?

Prvo rješenje.



Povucimo dijagonalu $\overline{DB}$. Trokut DAB je pravokutan i vrijedi:

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle BAE + \sphericalangle EAD = 90^\circ$$

Trokut AFD je pravokutan i vrijedi:

$$\sphericalangle DAF + \sphericalangle ADF = 90^\circ,$$

te vrijedi da je $\sphericalangle EAB = \sphericalangle ADF$. (Ista jednakost može se pokazati koristeći svojstvo kutova s okomitim kracima). 2 boda

Pravokutni trokuti AEB i AFD imaju isti šiljasti kut pa su prema poučku KK slični. Stoga su sljedeći omjeri jednaki

$$\frac{|AF|}{|DF|} = \frac{|BE|}{|AE|} = \frac{5}{3}, \text{ pa vrijedi } |AF| = \frac{5}{3}|DF|.$$ 2 boda

Na isti način pokažemo da je $\sphericalangle CDF = \sphericalangle BCE$. 1 bod

Iz $\triangle CFD \sim \triangle BEC$ slijedi

$$\frac{|CF|}{|DF|} = \frac{|BE|}{|CE|} = \frac{5}{7}, \text{ pa vrijedi } |CF| = \frac{5}{7}|DF|.$$ 2 boda

Kako je $|AE| + |EC| = |AF| + |FC| = 10$, slijedi da je 1 bod

$$\frac{5}{3}|DF| + \frac{5}{7}|DF| = 10, \text{ odnosno } |DF| = \frac{21}{5} = 4.2$$ 2 boda

Drugo rješenje.

Slika je ista kao i u prvom rješenju.

Vrijedi $|AC| = 10$, $|CD| = c$, $|AD| = d$. Tada primjenom Pitagorina poučka na trokute ABE, BCE, ABD i BCD redom slijedi:

$$|AB|^2 = 3^2 + 5^2 = 34,$$

$$|BC|^2 = 5^2 + 7^2 = 74,$$ 1 bod

$$|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 = 34 + d^2,$$

$$|BD|^2 = |BC|^2 + |CD|^2 = 74 + c^2.$$ 1 bod

Oduzimanjem zadnjih dviju jednakosti dobivamo

$$d^2 - c^2 = 40.$$ 1 bod

Budući da je zbroj nasuprotnih kutova $180°$ dani je četverokut tetivni. 1 bod

Tada su obodni kutovi $\sphericalangle BDC$ i $\sphericalangle BAE$ nad tetivom $\overline{BC}$ sukladni, pa vrijedi

$$\operatorname{tg}(\sphericalangle BDC) = \operatorname{tg}(\sphericalangle BAE),$$ 1 bod

$$\frac{\sqrt{74}}{c} = \frac{5}{3},$$

$$c = \frac{3\sqrt{74}}{5},$$ 1 bod

$$d^2 = 40 + \left(\frac{3\sqrt{74}}{5}\right)^2 = \frac{1666}{25},$$

$$d = \frac{7\sqrt{34}}{5}.$$ 1 bod

Površinu četverokuta $ABCD$ možemo računati kao zbroj površina trokuta ABC i ADC ili zbroj površina trokuta BCD i BAD, pa vrijedi

$$\frac{|DF| \cdot 10}{2} + \frac{5 \cdot 10}{2} = \frac{c\sqrt{74}}{2} + \frac{d\sqrt{34}}{2},$$ 2 boda

$$|DF| \cdot 10 + 50 = \frac{3 \cdot 74}{5} + \frac{7 \cdot 34}{5},$$

$$|DF| = 4.2.$$ 1 bod

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

29. ožujka 2021.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-2.1.

Odredite sva realna rješenja jednadžbe

$$(x+3)(x+5)=4+\frac{2021}{(x+1)(x+7)}.$$

Rješenje.

Dana jednadžba ekvivalentna je jednadžbi

$$x^2+8x+15=4+\frac{2021}{x^2+8x+7},\ x\neq -1,\ x\neq -7.$$ 1 bod

Uvođenjem supstitucije $x^2+8x+7=t$ dobivamo jednadžbu

$$t+8=4+\frac{2021}{t},$$

odnosno

$$t^2+4t-2021=0,$$ 2 boda

čija su rješenja $t_1=-47$ i $t_2=43$. 1 bod

Jednadžba $x^2+8x+7=-47$, odnosno $x^2+8x+54=0$ nema realnih rješenja, jer je njena diskriminanta manja od nule. 1 bod

Jednadžba $x^2+8x+7=43$, odnosno $x^2+8x-36=0$ ima dva različita realna rješenja $x_{1,2}=-4\pm 2\sqrt{13}$. 1 bod

Zadatak B-2.2.

Konačan niz brojeva je *izvrstan* ako je svaki sljedeći član niza, osim prvoga, veći od prethodnoga i ako je umnožak svih članova toga niza potpuni kvadrat. Primjerice, niz 2, 6, 27 je *izvrstan* niz. Odredite prirodne brojeve x i y tako da niz 28, x, y, 65 bude *izvrstan*.

Rješenje.

Kako je broj $28 \cdot 65 \cdot x \cdot y = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot x \cdot y$ potpun kvadrat slijedi da je barem jedan od brojeva x i y djeljiv s 5, 7 i 13. 1 bod

Uočimo da broj koji je djeljiv s 13 ne može biti djeljiv s 5 ili 7 jer bismo u suprotnom dobili broj veći ili jednak 65. 1 bod

Stoga je jedan od brojeva djeljiv sa $7 \cdot 5 = 35$, odnosno oblika $35k$. Slijedi $k = 1$ jer bismo u suprotnom dobili broj veći od 65.

Dakle, jedan od traženih brojeva je broj 35. 1 bod

Drugi je broj oblika $13l$, a kako je $28 < 13l < 65$, zaključujemo da je $l = 3$ ili $l = 4$. 1 bod

Odbacujemo mogućnost $l = 3$ jer bismo tada dobili broj 39, za koji umnožak $2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot x \cdot y$ ne bi bio potpuni kvadrat. 1 bod

Stoga je $l = 4$, a drugi traženi broj 52.

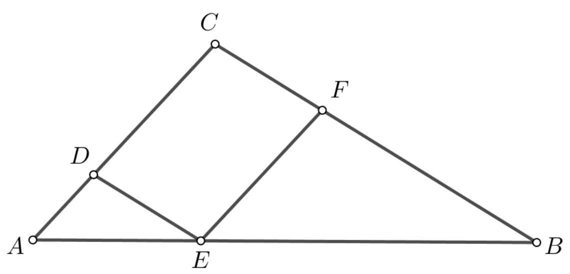
Vrijedi $28 < 35 < 52 < 65$ i $28 \cdot 35 \cdot 52 \cdot 65 = (2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13)^2$, što znači da smo dobili *izvrstan* niz, a traženi brojevi su $x = 35$ i $y = 52$. 1 bod

Napomena: Ukoliko učenik rastavi brojeve na proste faktore i navodi djeljivost s 5, 7 i 13 te s pomoću toga dobije rješenja 35 i 52 bez da argumentira da su to jedina rješenja treba dobiti 4 boda. Za dobivena rješenja bez argumentiranja i provedenog postupka treba dodijeliti 2 boda ako je vidljiva provjera tih rješenja, a 1 bod ako je nema.

Zadatak B-2.3.

Na stranici $\overline{AB}$ trokuta ABC dana je točka E takva da je $|AE| = 1$ i $|EB| = 2$. Neka je točka D na stranici $\overline{AC}$ takva da je dužina $\overline{DE}$ paralelna s dužinom $\overline{BC}$, a točka F na stranici $\overline{BC}$ takva da je dužina $\overline{EF}$ paralelna s dužinom $\overline{AC}$. Izračunajte omjer površina četverokuta $CDEF$ i trokuta ABC.

Prvo rješenje.



Kako je dužina $\overline{DE}$ paralelna s dužinom $\overline{BC}$, trokuti AED i ABC imaju iste kutove pa su slični. Koeficijent sličnosti je $k = \dfrac{|AE|}{|AB|} = \dfrac{1}{3}$. 1 bod

Stoga je omjer njihovih površina $\dfrac{P_{AED}}{P_{ABC}} = k^2 = \dfrac{1}{9}$. 1 bod

Kako je dužina $\overline{EF}$ paralelna s dužinom $\overline{AC}$, trokuti EBF i ABC imaju iste kutove, te su slični. Njihov koeficijent sličnosti je $k' = \dfrac{|BE|}{|AB|} = \dfrac{2}{3}$. 1 bod

Stoga je omjer njihovih površina $\frac{P_{EBF}}{P_{ABC}} = k^2 = \frac{4}{9}$. 1 bod

$$\frac{P_{CDEF}}{P_{ABC}} = \frac{P_{ABC} - P_{AED} - P_{EBF}}{P_{ABC}}$$ 1 bod

$$= \frac{P_{ABC} - \frac{1}{9}P_{ABC} - \frac{4}{9}P_{ABC}}{P_{ABC}} = \frac{\frac{4}{9}P_{ABC}}{P_{ABC}} = \frac{4}{9}.$$ 1 bod

Drugo rješenje.

Neka je $\sphericalangle ACB = \gamma$. Tada je

$$\frac{P_{CDEF}}{P_{ABC}} = \frac{|CD||CF|\sin\gamma}{\frac{|AC||BC|\sin\gamma}{2}} = \frac{2|CD||CF|}{|AC||BC|}.$$ 2 boda

Zbog paralelnosti zadanih dužina trokuti AED, EBF i ABC imaju sukladne kutove pa su međusobno slični. 1 bod

Tada iz sličnosti trokuta EBF i ABC slijedi

$$\frac{|AC|}{|EF|} = \frac{|AB|}{|EB|} = \frac{3}{2}, \text{ odnosno } |AC| = \frac{3}{2}|EF| = \frac{3}{2}|CD|.$$ 1 bod

Iz sličnosti trokuta AED i ABC slijedi

$$\frac{|BC|}{|DE|} = \frac{|AB|}{|AE|} = \frac{3}{1}, \text{ odnosno } |BC| = 3|EF| = 3|CD|.$$ 1 bod

Tada je

$$\frac{P_{CDEF}}{P_{ABC}} = \frac{2|CD||CF|}{|AC||BC|} = \frac{2|CD||CF|}{\frac{3}{2}|CD| \cdot 3|CF|} = \frac{4}{9}.$$ 1 bod

Zadatak B-2.4.

Ako za kutove trokuta α, β i γ vrijedi da je $\sin\alpha = 2\sin\beta\cos\gamma$ i $\beta + \gamma = 86°$, odredite α, β i γ.

Rješenje.

Neka je a duljina stranice nasuprot kuta α, a b duljina stranice nasuprot kuta β u zadanom trokutu. Zapišemo li izraz $\sin\alpha = 2\sin\beta\cos\gamma$ u obliku

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 2\cos\gamma$$ 1 bod

tada primjenom poučka o sinusima i poučka o kosinusu dobivamo

$$\frac{a}{b} = 2 \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$ 2 boda

odnosno

$$\frac{a}{b} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab}.$$

Budući da se radi o trokutu i duljina stranice $b \neq 0$, nakon množenja s ab dobivamo

$$a^2 = a^2 + b^2 - c^2$$ 1 bod

pa je $b^2 - c^2 = 0$, odakle slijedi da je $b = c$. 1 bod

Stoga je dani trokut jednakokračan, a kutovi nasuprot stranicama duljine b i c, su jednaki.

Tada je $\beta = \gamma = \dfrac{86^\circ}{2} = 43^\circ$, $\alpha = 180^\circ - 86^\circ = 94^\circ$. 1 bod

Zadatak B-2.5.

Pravilo pridruživanja funkcije f jest $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}}$. Odredite interval realnih brojeva na kojemu ova funkcija poprima konstantnu vrijednost.

Rješenje.

Zadanu funkciju možemo zapisati u sljedećem obliku:

$$f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{(\sqrt{x-2}-3)^2} = \sqrt{x-2} + |\sqrt{x-2}-3|.$$ 2 boda

Domena zadane funkcije je skup $\{x \in \mathbf{R}, x \geqslant 2\}$. 1 bod

Uvedemo li supstituciju $\sqrt{x-2} = t$, dobivamo izraz

$$t + |t-3| = \begin{cases} 2t-3, t \geqslant 3 \\ 3, t \leqslant 3 \end{cases}$$ 1 bod

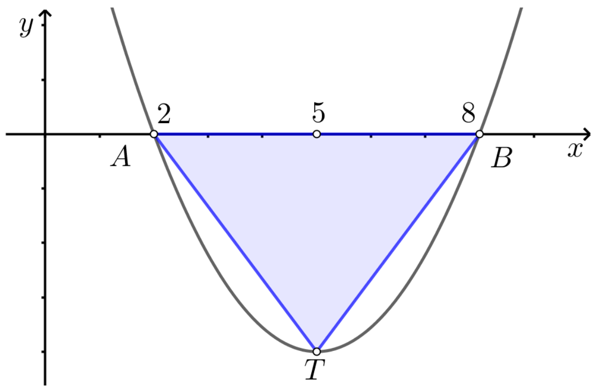
Rješavanjem nejednadžbe $\sqrt{x-2} \leqslant 3$ dobivamo $x \leqslant 11$. 1 bod

Konačno rješenje je $\{x \in \mathbf{R}, 2 \leqslant x \leqslant 11\}$. 1 bod

Zadatak B-2.6.

Tjeme parabole je u točki $T(x, y)$, $y < 0$. Parabola siječe os x u točkama $A(2, 0)$ i $B(8, 0)$. Ako su brojčani iznosi opsega i površine trokuta ABT u omjeru $4 : 3$, odredite jednadžbu parabole i koordinate tjemena parabole.

Prvo rješenje.



Apscisa tjemena parabole je jednaka $x_T = \dfrac{2+8}{2} = 5$. 1 bod

Jednadžba parabole je oblika $y = a(x-2)(x-8)$, odnosno $y = ax^2 - 10ax + 16a$, pri čemu je $a > 0$. 1 bod

Stoga je ordinata tjemena parabole jednaka $y_T = \dfrac{4ac - b^2}{4a} = \dfrac{4a \cdot 16a - 100a^2}{4a} = -9a$ 1 bod

Dakle, tjeme parabole je točka $T(5, -9a)$, $a > 0$.

Iz omjera opsega i površine trokuta ABT dobivamo sljedeći niz jednakosti:

$$\frac{O_{\triangle ABT}}{P_{\triangle ABT}} = \frac{4}{3},$$

$$\frac{|AB| + |AT| + |BT|}{\frac{1}{2}|AB| \cdot |y_T|} = \frac{4}{3},$$ 1 bod

$$\frac{6 + 2\sqrt{9 + 81a^2}}{27a} = \frac{4}{3}.$$ 1 bod

Odatle, nakon množenja s a, slijedi iracionalna jednadžba

$$\sqrt{9 + 81a^2} = 18a - 3,$$ 1 bod

koja nakon kvadriranja prelazi u kvadratnu jednadžbu $243a^2 - 108a = 0$ čija su rješenja $a = 0$ i $a = \dfrac{4}{9}$. 1 bod

Budući da je $a > 0$, a za $a = \dfrac{4}{9}$ jednakost

$$\sqrt{9 + 81 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2} = 18 \cdot \frac{4}{9} - 3$$ 1 bod

je točna, slijedi $a = \dfrac{4}{9}$, pa tjeme parabole ima koordinate $T(5, -4)$. 1 bod

Jednadžba dane parabole jest $y = \dfrac{4}{9}(x-2)(x-8)$. 1 bod

Drugo rješenje.

Prema slici iz prvog rješenja, uz oznaku (x, y) za koordinate tjemena, a koristeći dani omjer opsega i površine, slijedi

$$|BT| = \sqrt{y^2 + 3^2},$$ 1 bod

$$\frac{6 + 2|BT|}{\frac{|y| \cdot 6}{2}} = \frac{4}{3},$$ 1 bod

$$\frac{2(3 + \sqrt{y^2 + 3^2})}{3|y|} = \frac{4}{3}.$$ 1 bod

Dakle, dobivamo iracionalnu jednadžbu

$$2|y| = 3 + \sqrt{y^2 + 3^2}. \qquad (\star)$$

Nakon kvadriranja slijedi

$$(2|y|-3)^2 = y^2 + 9,$$

odnosno

$$3|y|^2 - 12|y| = 0. \qquad \text{1 bod}$$

Budući da je $y \neq 0$ i vrijedi $2 \cdot 4 = 3 + \sqrt{16+9}$, rješenje jednadžbe $(\star)$ jest $|y| = 4$. 1 bod

Odatle, uz dani uvjet da je $y < 0$, slijedi $y = -4$ 1 bod

pa su koordinate tjemena $T(5, -4)$. 1 bod

Tjemeni oblik jednadžbe dane parabole jest $y = a(x-5)^2 - 4$. 1 bod

Budući da točka $(2, 0)$ pripada paraboli, vrijedi $0 = a(2-5)^2 - 4$ pa je $a = \frac{4}{9}$, a jednadžba parabole 1 bod

$$y = \frac{4}{9}(x-5)^2 - 4 \text{ ili } y = \frac{4}{9}x^2 - \frac{40}{9}x + \frac{64}{9}. \qquad \text{1 bod}$$

Napomena: Priznati jednadžbu parabole zapisanu u općem obliku, tjemenom ili faktoriziranom.

Zadatak B-2.7.

Učenici neke škole sudjelovali su na stolnoteniskom turniru. Pravilima je predviđeno da svaka dva natjecatelja odigraju točno jednu partiju. Tijekom turnira učenici A, B i C su odustali od daljnjeg natjecanja. Učenik A je odustao nakon što je odigrao dvije partije, B nakon tri, a C nakon pet odigranih partija. Ostali su natjecatelji odigrali turnir do kraja. Ako je na turniru odigrano 197 partija, koliko je učenika sudjelovalo na turniru?

Rješenje.

Neka je na turniru sudjelovalo n učenika. Nakon što su tijekom natjecanja tri učenika odustala, svaki je od $n-3$ učenika do kraja turnira odigrao točno jednu partiju sa svakim od preostalih.

Dakle, među $n-3$ učenika odigrano je $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$ partija. 2 boda

Tomu broju treba pribrojiti broj partija (p) u kojima su sudjelovali učenici A, B i C, prije nego su odustali. Tih je partija moglo biti najviše $2+3+5=10$ i to ukoliko A, B i C nisu igrali međusobno. 2 boda

Budući da su međusobno mogli odigrati maksimalno $\frac{3 \cdot 2}{2} = 3$ partije, broj p može biti 10, 9, 8 ili 7, pa vrijedi $\frac{(n-3)(n-4)}{2} + p = 197, \; p \in \{10, 9, 8, 7\}$. 2 boda

Ako je $p = 10$, iz $\frac{(n-3)(n-4)}{2} + 10 = 197$ dobivamo jednadžbu $(n-3)(n-4) = 374$ koja nema rješenja u skupu prirodnih brojeva jer se broj $374 = 2 \cdot 11 \cdot 17$ ne može zapisati kao umnožak dva uzastopna prirodna broja. 1 bod

Ako je $p = 9$, iz $\dfrac{(n-3)(n-4)}{2} + 9 = 197$ dobivamo jednadžbu $(n-3)(n-4) = 376$ koja nema rješenja u skupu prirodnih brojeva jer se broj $376 = 2^3 \cdot 47$ ne može zapisati kao umnožak dva uzastopna prirodna broja. 1 bod

Ako je $p = 8$, iz $\dfrac{(n-3)(n-4)}{2} + 8 = 197$ dobivamo jednadžbu $(n-3)(n-4) = 378$ koja također nema rješenja u skupu prirodnih brojeva jer se broj $378 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7$ ne može zapisati kao umnožak dva uzastopna prirodna broja. 1 bod

Ako je $p = 7$, iz $\dfrac{(n-3)(n-4)}{2} + 7 = 197$ dobivamo jednadžbu $(n-3)(n-4) = 380$. Kako je $380 = 19 \cdot 20$, zaključujemo da je $n - 4 = 19$, tj. $n = 23$.

Dakle, na natjecanju je sudjelovalo 23 učenika. 1 bod

Napomena: Učenici su, u svakom od opisanih slučajeva, do istih zaključaka mogli doći i rješavanjem kvadratne jednadžbe ili na neki drugi način, pa postupak treba bodovati s predviđenim brojem bodova.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

29. ožujka 2021.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-3.1.

Izraz $\cos^2 x+\cos^2\left(\frac{\pi}{6}+x\right)-2\cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$ ima istu vrijednost za sve realne brojeve x. Izračunajte tu vrijednost.

Prvo rješenje.

Izlučivanjem zajedničkog faktora dobivamo

$$\begin{aligned}&\cos^2 x+\cos^2\left(\frac{\pi}{6}+x\right)-2\cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=\\&=\cos^2 x+\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)-2\cos\frac{\pi}{6}\cos x\right).\end{aligned}$$

1 bod

Primjenom formule kosinusa zbroja slijedi

$$\begin{aligned}&\cos^2 x+\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x-\sin\frac{\pi}{6}\sin x\right)\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x-\sin\frac{\pi}{6}\sin x-2\cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos x\right)=\\&\cos^2 x-\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x-\sin\frac{\pi}{6}\sin x\right)\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x+\sin\frac{\pi}{6}\sin x\right).\end{aligned}$$

2 boda

Izraz sredimo

$$\cos^2 x-\left(\cos^2\frac{\pi}{6}\cos^2 x-\sin^2\frac{\pi}{6}\sin^2 x\right)$$

1 bod

Konačno:

$$\cos^2 x-\frac{3}{4}\cos^2 x+\frac{1}{4}\sin^2 x=\frac{1}{4}\cos^2 x+\frac{1}{4}\sin^2 x=\frac{1}{4}.$$

2 boda

Drugo rješenje.

Izlučivanjem zajedničkog faktora dobivamo

$$\begin{aligned}&\cos^2 x+\cos^2\left(\frac{\pi}{6}+x\right)-2\cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=\\&=\cos^2 x+\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)-2\cos\frac{\pi}{6}\cos x\right)\end{aligned}$$ 1 bod

Primjenom formule umnoška kosinusa slijedi

$$\begin{aligned}&\cos^2 x+\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)-2\cdot\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\right)\right)=\\&\cos^2 x-\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\end{aligned}$$ 2 boda

Primjenom formule umnoška kosinusa dobivamo

$\cos^2 x-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cos 2x$ 1 bod

Sada primjenimo kosinus dvostrukog broja i sredimo izraz

$\cos^2 x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\cos^2 x+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$ 2 boda

Treće rješenje.

Ako primijenimo formule za kosinus zbroja i činjenicu da je $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, a zatim kvadriramo dani binom i pojednostavnimo izraz, redom dobivamo:

$$\cos^2 x+\cos^2\left(\frac{\pi}{6}+x\right)-2\cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=$$

$$\cos^2 x+\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x-\sin\frac{\pi}{6}\sin x\right)^2-2\cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos x\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x-\sin\frac{\pi}{6}\sin x\right)=$$ 2 boda

$$\cos^2 x+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)^2-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos x\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)=$$ 1 bod

$$\cos^2 x+\frac{3}{4}\cos^2 x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\sin x+\frac{1}{4}\sin^2 x-\frac{3}{2}\cos^2 x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\sin x=$$ 1 bod

$$\frac{1}{4}\cos^2 x+\frac{1}{4}\sin^2 x=\frac{1}{4}\left(\cos^2+\sin^2 x\right)=\frac{1}{4}.$$ 2 boda

Zadatak B-3.2.

Neka je $A=1202^2+2^{2021}$. Odredite znamenku jedinica broja A^{2021}.

Rješenje.

Znamenka jedinica kvadrata broja 1202 jest 4. 1 bod

Potencije s bazom 2 imaju znamenku jedinica redom $2, 4, 8, 6$, ovisno o ostatku pri dijeljenju eksponenta brojem 4. 1 bod

Stoga je znamenka jedinica broja 2^{2021} jednaka 2. 1 bod

Tada je znamenka jedinica broja A jednaka $4 + 2 = 6$. 1 bod

Znamenka jedinica bilo koje potencije s bazom 6 uvijek je broj 6. 1 bod

Stoga je i znamenka jedinica broja A^{2021} jednaka 6. 1 bod

Zadatak B-3.3.

Odredite sve realne brojeve x za koje vrijedi $3^{\frac{1}{\log x}} - 2 \cdot 3^{\frac{\log 10x^2}{\log x^2}} = 27$.

Rješenje.

Primijenimo pravila za logaritme

$3^{\frac{1}{\log x}} - 2 \cdot 3^{\frac{\log 10 + \log x^2}{\log x^2}} = 27$

$3^{\frac{1}{\log x}} - 2 \cdot 3^{\frac{1}{\log x^2} + 1} = 27$

$3^{\frac{1}{\log x}} - 6 \cdot 3^{\frac{1}{2 \log x}} - 27 = 0$ 2 boda

Uvedemo supstituciju $3^{\frac{1}{2 \log x}} = t$ 1 bod

Rješenja kvadratne jednadžbe $t^2 - 6t - 27 = 0$ su $t_1 = -3$ i $t_2 = 9$ 1 bod

Za $t_1 = -3$ nema rješenja. 1 bod

Za $t_2 = 9$ dobijemo

$3^{\frac{1}{2 \log x}} = 3^2$

$\frac{1}{2 \log x} = 2, \log x \neq 0$

$\log x = \frac{1}{4}$.

Konačno dobijemo $x = 10^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{10}$. 1 bod

Zadatak B-3.4.

Koliko ima deveteroznamenkastih brojeva djeljivih sa 75 kojima su sve znamenke različite, a znamenka stotica je 7?

Rješenje.

Traženi je broj djeljiv sa 75, pa je djeljiv i s 25. Budući da je djeljiv s 25 i ima sve znamenke različite, zadnje tri znamenke toga broja su ili 725 ili 750. 1 bod

Odredimo i prvih 6 znamenaka.

Traženi broj mora biti djeljiv s 3. Budući da je zbroj svih 10 mogućih znamenaka $0+1+2+\ldots+8+9=45$, smijemo maknuti jednu od znamenki $0,3,6$ ili 9 da bi broj bio djeljiv s 3. 1 bod

Ako maknemo 0, zadnje tri znamenke moraju biti 725, a ostalih 6 biramo na

$6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720$ načina. 1 bod

Ako maknemo 3, 6 ili 9, a zadnje tri znamenke su 750, ostalih 6 biramo na

$6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720$ načina što je ukupno $3\cdot720=2160$ načina. 1 bod

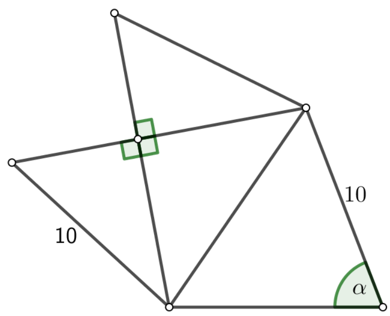
Ako maknemo $3,6$ ili 9, a zadnje tri znamenke su 725, na prvom mjestu ne može biti 0 pa ih biramo na

$5\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=600$ načina, što je ukupno $3\cdot600=1800$ načina. 1 bod

Dakle, ukupno je $720+2160+1800=4680$ traženih deveteroznamenkastih brojeva. 1 bod

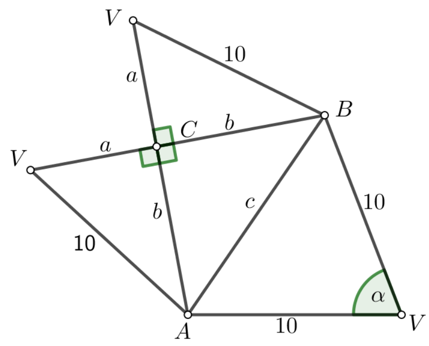
Zadatak B-3.5.

Na slici je prikazana mreža piramide. Izračunajte obujam te piramide ako je $\cos\alpha=\dfrac{9}{25}$.



Rješenje.

Spajanjem odgovarajućih bridova mreže dobivamo piramidu s vrhom V kojoj je jedna strana jednakokračan trokut ABV, dvije strane sukladni pravokutni trokuti, BCV i ACV a treća strana jednakokračan pravokutan trokut ABC. Prema svemu navedenom, označimo preostale dužine u danoj mreži.



2 boda

Neka je osnovka piramide jednakokračan pravokutan trokut ABC. Primjenom poučka o kosinusu slijedi

$$c^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos\alpha = 200 - 200 \cdot \frac{9}{255} = 128,$$

pa je $c = 8\sqrt{2}$. 1 bod

Tada je iz trokuta ABC primjenom Pitagorina poučka $2b^2 = 128$, odnosno $b = 8$, a iz trokuta BCV slijedi $a = 6$. 1 bod

Duljina visine piramide spuštene iz vrha V na osnovku ABC jednaka je $h = |CV| = a = 6$. 1 bod

Obujam piramide zadane mreže jest

$$V = \frac{B \cdot h}{3} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot 6}{3} = 64.$$ 1 bod

Zadatak B-3.6.

Odredite sve realne brojeve x iz intervala $[0,1]$ za koje je $\operatorname{tg}(2\pi \sin^2(2\pi x)) = 0$.

Rješenje.

Jednakost $\operatorname{tg}(2\pi \sin^2 2\pi x) = 0$ vrijedi ako je $2\pi \sin^2 2\pi x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 1 bod

odnosno

$$\sin^2 2\pi x = \frac{k}{2}$$

pri čemu zbog vrijednosti funkcije sinus, može biti $k = 0, k = 1, k = 2$. 2 boda

Ako je $k = 0$, onda je $\sin^2 2\pi x = 0$, odnosno $\sin 2\pi x = 0$ pa dobijemo

$$2\pi x = l\pi, l \in \mathbb{Z}.$$

Slijedi $x_1 = \frac{l}{2}, l \in \mathbb{Z}$. 1 bod

Ako je $k = 1$, onda je $\sin^2 2\pi x = \frac{1}{2}$, odnosno $\sin 2\pi x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, pa dobijemo

$$2\pi x = \frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2}, m \in \mathbb{Z}$$

Slijedi $x_2 = \frac{1}{8} + \frac{m}{4}, m \in \mathbb{Z}$. 2 boda

Ako je $k = 2$, onda je $\sin^2 2\pi x = 1$, odnosno $\sin 2\pi x = \pm 1$, pa dobijemo

$$2\pi x = \frac{\pi}{2} + \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

Slijedi $x_3 = \frac{1}{4} + \frac{n}{4}, n \in \mathbb{Z}$. 2 boda

Odredimo tražene brojeve iz intervala $[0, 1]$.

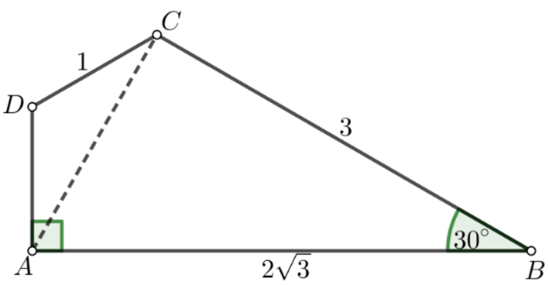
Iz x_1 dobivamo brojeve $0, \frac{1}{2}, 1$, iz x_2 brojeve $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$, a iz x_3 brojeve $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$.

Konačno, $x \in \left\{0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, 1\right\}$. 2 boda

Zadatak B-3.7.

Neka je $ABCD$ konveksni četverokut takav da je $|AB| = 2\sqrt{3}$, $|BC| = 3$, $|CD| = 1$, $\sphericalangle DAB = 90°$ i $\sphericalangle ABC = 30°$. Odredite $\sphericalangle BCD, \sphericalangle CDA$ i $|AD|$.

Rješenje.



Promotrimo trokut ABC. Primjenom poučka o kosinusu slijedi

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cos \sphericalangle ABC = 12 + 9 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3 \cdot \cos 30° = 3.$$

Dakle, $|AC| = \sqrt{3}$. 2 boda

Primjenom poučka o sinusima izračunamo $\sphericalangle CAB$.

$\frac{|BC|}{\sin \sphericalangle CAB} = \frac{|AC|}{\sin \sphericalangle ABC}$ pa je $\sin \sphericalangle CAB = \frac{3 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 1 bod

Slijedi: $\sphericalangle CAB = 60°$ ili $120°$. 1 bod

Slučaj $\sphericalangle CAB = 120°$ nije moguć jer je četverokut $ABCD$ konveksan pa mora biti $\sphericalangle CAB < \sphericalangle DAB = 90°$. Dakle, $\sphericalangle CAB = 60°$. 1 bod

Nadalje, $\sphericalangle DAC = 90° - \sphericalangle CAB = 30°$.

Primijetimo da je $\sphericalangle BCA = 180° - 30° - 60° = 90°$.

Promotrimo trokut ACD. Primjenom poučka o sinusima slijedi

$\dfrac{|AC|}{\sin \sphericalangle CDA} = \dfrac{|CD|}{\sin \sphericalangle DAC}$ pa je $\sin \sphericalangle CDA = \dfrac{\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}}{1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 1 bod

Slijedi: $\sphericalangle CDA = 60°$ ili $\sphericalangle CDA = 120°$. 1 bod

Prvi slučaj nije moguć jer bi tada vrijedilo $\sphericalangle BCD = 360° - 60° - 90° - 30° = 180°$. Dakle, $\sphericalangle CDA = 120°$. 1 bod

Nadalje, $\sphericalangle ACD = 180° - \sphericalangle DAC = 30°$ pa je trokut ACD jednakokračan što znači da je $|AD| = |CD| = 1$. 1 bod

Još je potrebno izračunati mjeru kuta $\sphericalangle BCD$.

$\sphericalangle BCD = \sphericalangle BCA + \sphericalangle ACD = 90° + 30° = 120°$. 1 bod

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

29. ožujka 2021.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-4.1.

Za realne brojeve x i y, $x < y$, vrijedi:

$$\begin{aligned} &x^3 + y^3 = 65, \\ &2^{x+y} + 2^{x+y+1} + 2^{x+y+2} = 224. \end{aligned}$$

Neka je y prvi, a x drugi član geometrijskog reda. Koliko iznosi zbroj toga reda?

Rješenje.

Iz druge zadane jednakosti dobivamo: $2^{x+y} \cdot (1+2+4) = 224$, odnosno $x + y = 5$. 1 bod

Iz prve zadane jednakosti imamo: $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 65$, odnosno $x^2 - xy + y^2 = 13$. 1 bod

Slijedi da x i y zadovoljavaju sustav jednadžbi $x + y = 5$, $x^2 - xy + y^2 = 13$. Uvrštavanjem $y = 5 - x$ u drugu jednadžbu dobivamo kvadratnu jednadžbu $x^2 - 5x + 4 = 0$ te, uzimajući u obzir $x < y$, dobivamo rješenje sustava $x = 1$, $y = 4$. 2 boda

Za geometrijski red kojemu su prva dva člana jednaka 4 i 1 vrijedi $q = \dfrac{1}{4} < 1$, pa njegova suma postoji i jednaka je $S = \dfrac{4}{1 - \frac{1}{4}} = \dfrac{16}{3}$. 2 boda

Napomena: Učenik je rješenje $x = 1$, $y = 4$ mogao dobiti i na drugačiji način. Pri tome, dobivanje jednakosti $x + y = 5$ nosi 1 bod, a postavljanje i rješavanje sustava iz kojeg se dobije rješenje $x = 1$, $y = 4$ nosi 3 boda.

Zadatak B-4.2.

Duljine stranica trokuta čine aritmetički niz s razlikom 2. Ako je sinus najmanjeg kuta u tomu trokutu jednak $\dfrac{\sqrt{15}}{8}$, izračunajte opseg toga trokuta.

Rješenje.

Neka su stranice trokuta duljina n, $n+2$ i $n+4$.

Označimo s α najmanji kut trokuta, nasuprot najkraćoj stranici duljine n.

Tada prema poučku o kosinusu slijedi

$n^2 = (n+2)^2 + (n+4)^2 - 2(n+2)(n+4)\cos\alpha$. 1 bod

Budući da je $\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{8}$, slijedi $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\frac{15}{64}} = \pm\sqrt{\frac{49}{64}} = \pm\frac{7}{8}$.

Kako je α najmanji kut trokuta, sigurno je $\alpha < 90°$, pa je $\cos\alpha = \frac{7}{8}$. 1 bod

Riješimo jednadžbu:

$$
\begin{aligned}
& n^2 = (n+2)^2 + (n+4)^2 - 2(n+2)(n+4)\cdot\frac{7}{8}, \\
& n^2 = n^2 + 4n + 4 + n^2 + 8n + 16 - (n^2 + 6n + 8)\cdot\frac{7}{4}, \\
& 0 = 4n^2 + 48n + 80 - 7n^2 - 42n - 56, \\
& 3n^2 - 6n - 24 = 0, \\
& n^2 - 2n - 8 = 0, \\
& n_1 = 4, \quad n_2 = -2.
\end{aligned}
$$

2 boda

Duljine stranica trokuta su 4, 6 i 8. 1 bod

Opseg trokuta je jednak 18. 1 bod

Napomena: Ako se duljine stranica trokuta označe s $(n-2)$, n, $(n+2)$, tada je pripadna kvadratna jednadžba koja slijedi iz kosinusovog poučka jednaka $3n^2 - 18n = 0$ i njezina su rješenja $n_1 = 0$, $n_2 = 6$.

Zadatak B-4.3.

Odredite sve brojeve n za koje vrijedi

$$\binom{2022}{n+1} - \binom{2021}{n} \leqslant \frac{1}{2023}\binom{2023}{n+2}.$$

Rješenje.

Broj n je cijeli broj za koji vrijedi $0 \leqslant n \leqslant 2021$. 1 bod

Zapišimo binomne koeficijente s pomoću faktorijela i primijenimo njihova svojstva. Tada je redom:

$$\frac{2022!}{(n+1)!(2021-n)!} - \frac{2021!}{n!(2021-n)!} \leqslant \frac{1}{2023} \cdot \frac{2023!}{(n+2)!(2021-n)!}, \quad \text{1 bod}$$

$$\frac{2022 \cdot 2021!}{(n+1) \cdot n!} - \frac{2021!}{n!} \leqslant \frac{1}{2023} \cdot \frac{2023 \cdot 2022 \cdot 2021!}{(n+2)(n+1) \cdot n!}, \quad \text{1 bod}$$

$$\frac{2022}{n+1} - 1 \leqslant \frac{2022}{(n+2)(n+1)},$$

$$2022(n+2) - (n+1)(n+2) \leqslant 2022,$$

$$2022n + 4044 - n^2 - 3n - 2 - 2022 \leqslant 0,$$

$$-n^2 + 2019n + 2020 \leqslant 0, \quad \text{1 bod}$$

$$-n^2 + 2020n - n + 2020 \leqslant 0,$$

$$(2020 - n)(n+1) \leqslant 0.$$

Rješenje ove nejednadžbe su svi prirodni brojevi $n \geqslant 2020$, a 1 bod

budući da je $0 \leqslant n \leqslant 2021$, konačno rješenje su brojevi $n \in \{2020, 2021\}$. 1 bod

Zadatak B-4.4.

Koliko ima lozinki koje se sastoje od 4 znaka iz skupa $\{a, b, c, 1, 2, 3, 4, 5, +, !\}$ takvih da su svi znakovi lozinke različiti ili da lozinka sadrži točno dva, ne nužno različita slova i dvije, ne nužno različite znamenke?

Rješenje.

Prebrojimo prvo lozinke koje se sastoje od četiri znaka iz danog skupa, a kod kojih su svi znakovi različiti. Prvi znak lozinke možemo odabrati na 10 načina (bilo koji od ponuđenih znakova), drugi znak na 9 načina (mora biti različit od prvog odabranog znaka), treći znak na 8 i četvrti na 7 načina. Slijedi da takvih lozinki ima $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$. 1 bod

Prebrojimo sada lozinke koje sadrže točno dva slova i dvije znamenke. Od četiri znaka u lozinci, odnosno četiri pozicije za znakove, pozicije na kojima će biti dva slova možemo odabrati na $\binom{4}{2} = 6$ načina, a slova na tim pozicijama na $3 \cdot 3$ načina. Na preostale dvije pozicije u lozinci će biti znamenke i njih možemo odabrati na $5 \cdot 5$ načina. Slijedi da lozinki koje sadrže točno dva slova i dvije znamenke ima $6 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 1350$. 2 boda

Lozinki za koje vrijedi da su svi znakovi u lozinci različiti i da sadrže točno dva slova i dvije znamenke ima $\binom{4}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 = 720$. 2 boda

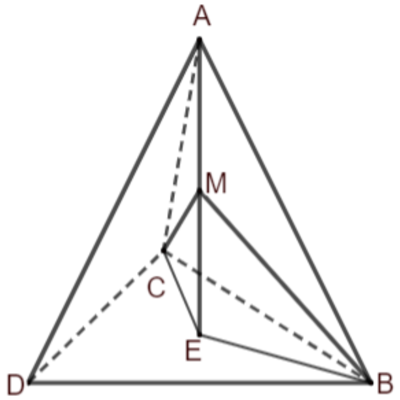
Traženi broj lozinki je jednak $5040 + 1350 - 720 = 5670$. 1 bod

Zadatak B-4.5.

Točka M je polovište visine pravilnog tetraedra $ABCD$ povučene iz vrha A na osnovku BCD. Odredite mjeru kuta BMC.

Prvo rješenje.

Označimo s E nožište visine iz vrha A na osnovku BCD.



1 bod

Neka su bridovi pravilnog tetraedra $ABCD$ duljine a.

Tada je $|BE|=|EC|=\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Iz pravokutnog trokuta AEB imamo: $|AE|^2=a^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow |AE|=\frac{a\sqrt{6}}{3}$, te je

$|EM|=\frac{1}{2}|AE|=\frac{a\sqrt{6}}{6}$. 2 boda

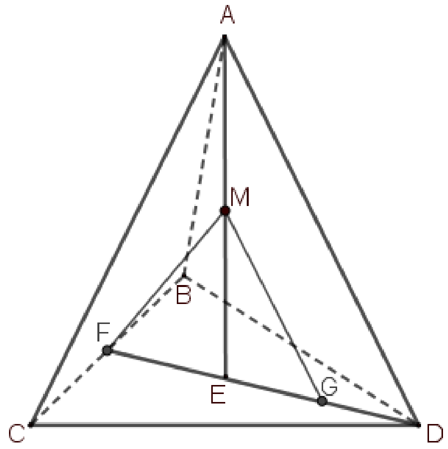
Iz pravokutnog trokuta MEB imamo: $|MB|^2=\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2 \Rightarrow |MB|=$

$\frac{a\sqrt{2}}{2}$, te je $|MC|=|MB|=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. 2 boda

U jednakokračnom trokutu MBC treća stranica je duljine a pa prema obratu Pitagorina poučka slijedi da je kut $\sphericalangle BMC$ pravi kut. 1 bod

Drugo rješenje.

Neka je E nožište visine iz vrha A i F polovište brida $\overline{BC}$.



1 bod

Tetraedar je pravilan, pa je točka E težište trokuta BCD.

Točka E dijeli dužinu $\overline{DF}$ u omjeru $2:1$. 1 bod

Neka je G polovište dužine $\overline{DE}$. Trokuti MEF i MEG su sukladni (S-K-S, jednake dvije stranice i kut među njima) pa su stranice $\overline{FM}$ i $\overline{GM}$ jednake duljine. 1 bod

Dužina $\overline{MG}$ je srednjica trokuta ADE, 1 bod

pa je $|MG| = \frac{1}{2}|AD|$, odnosno $|MF| = \frac{1}{2}|BC|$. 1 bod

S obzirom da je težišnica $\overline{MF}$ trokuta MBC jednaka polovini stranice $\overline{BC}$, kut BMC je pravi kut. 1 bod

Zadatak B-4.6.

Neka je $f_1(x) = \dfrac{1}{2-x}$, $f_n(x) = (f_1 \circ f_{n-1})(x)$, $n \geqslant 2$, za sve realne brojeve x za koje su navedene funkcije definirane. Koliko je $f_{2021}(4)$?

Rješenje.

Ispišimo prvih nekoliko vrijednosti danog niza funkcija za $x = 4$.

$$
\begin{aligned}
f_1(4) &= \frac{1}{2-4} = -\frac{1}{2}, \\
f_2(4) &= (f_1 \circ f_1)(4) = \frac{1}{2+\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}, \\
f_3(4) &= (f_1 \circ f_2)(4) = \frac{1}{2-\frac{2}{5}} = \frac{5}{8}, \\
f_4(4) &= (f_1 \circ f_3)(4) = \frac{1}{2-\frac{5}{8}} = \frac{8}{11} = \frac{3\cdot 4-4}{3\cdot 4-1}, \\
&\dots
\end{aligned}
$$

2 boda

Uočimo da je svaki član ovog niza oblika $f_n(4) = \dfrac{3n-4}{3n-1}$. (*) 2 boda

Dokažimo matematičkom indukcijom da je tvrdnja (*) istinita za sve prirodne brojeve n.

Za $n = 1$ tvrdnja vrijedi, kao što smo već prethodno provjerili. 1 bod

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki prirodni broj n, odnosno da je $f_n(4) = \dfrac{3n-4}{3n-1}$, za neki $n \in \mathbb{N}$. 1 bod

Dokažimo da tvrdnja tada vrijedi i za sljedeći prirodan broj, $n+1$. Pišemo redom:

$f_{n+1}(4) = \dfrac{1}{2 - f_n(4)}$, po pretpostavci je $f_n(4) = \dfrac{3n-4}{3n-1}$, pa je

$$f_{n+1}(4) = \frac{1}{2 - \frac{3n-4}{3n-1}} = \frac{3n-1}{3n+2} = \frac{3(n+1)-4}{3(n+1)-1}.$$ 2 boda

Dakle, iz činjenice da tvrdnja (*) vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$, pokazali smo da vrijedi i za $n+1$, pa tvrdnja (*) vrijedi za sve prirodne brojeve n. 1 bod

Tada vrijedi i za $n = 2021$, pa je $f_{2021}(4) = \dfrac{3 \cdot 2021 - 4}{3 \cdot 2021 - 1} = \dfrac{6059}{6062}$. 1 bod

Napomena: Učenik koji nije opću tvrdnju (*) dokazao indukcijom može maksimalno dobiti 5 bodova.

Učenik je mogao indukcijom dokazivati tvrdnju $f_n(x) = \dfrac{n-(n-1)(x)}{(n+1)-nx}$, što treba bodovati analogno predloženom bodovanju.

Zadatak B-4.7.

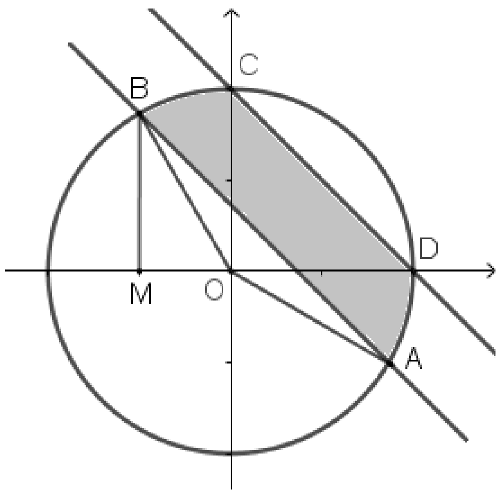
U kompleksnoj ravnini predočite skup svih kompleksnih brojeva z za koje vrijedi $|z| \leqslant 4$ i $2\sqrt{3} - 2 \leqslant \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) \leqslant 4$. Kolika je površina tog skupa?

Rješenje.

Neka je $z = x + yi$. Tada iz $|z| \leqslant 4$ slijedi $x^2 + y^2 \leqslant 16$. Točke (x, y) za koje vrijedi navedena nejednakost čine krug sa središtem u ishodištu polumjera 4.

Iz $2\sqrt{3} - 2 \leqslant Re(z) + Im(z) \leqslant 4$ slijedi $2\sqrt{3} - 2 \leqslant x + y \leqslant 4$, što opisuje točke (x, y) koje se nalaze između pravaca $y = 2\sqrt{3} - 2 - x$ i $y = 4 - x$, ili na njima.

Slijedi da je dani skup kompleksnih brojeva predočen osjenčanim likom na slici.



3 boda

Točke C i D su sjecišta kružnice $x^2 + y^2 = 16$ i pravca $x + y = 4$, pa su one jednake $C(0, 4)$ i $D(4, 0)$.

Točke A i B dobijemo kao sjecišta kružnice i drugog pravca, odnosno kao rješenja sustava $x^2 + y^2 = 16$, $x + y = 2\sqrt{3} - 2$. Slijedi: $A(2\sqrt{3}, -2)$ i $B(-2, 2\sqrt{3})$. 2 boda

Neka je M okomica spuštena iz B na os x. U pravokutnom trokutu MOB je $|OM| = 2$ i $|BO| = 4$, pa je $\cos \sphericalangle MOB = \frac{1}{2}$, odnosno $\sphericalangle MOB = 60°$. Slijedi da je $\sphericalangle COB = 30°$, odnosno $\sphericalangle AOB = 150° = \frac{5\pi}{6}$. 1 bod

Površinu osjenčanog lika na slici možemo dobiti tako da od površine kružnog isječka AOB oduzmemo površinu trokuta BOA i površinu kružnog odsječka CD. Slijedi da je tražena površina jednaka

$$P = \frac{16\pi \cdot \frac{5\pi}{6}}{2\pi} - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin \frac{5\pi}{6} - \left(\frac{1}{4} \cdot 16\pi - \frac{1}{2} \cdot 16\right)$$ 3 boda

$$= \frac{8\pi}{3} + 4.$$ 1 bod

Napomena: Ako učenik prije skiciranja nije naveo da se radi o kružnici i pravcima, ali je vidljivo iz skice da ih je prepoznao, dobiva sva 3 boda na tom dijelu.

Ako učenik na skici nije osjenčao traženi lik, na tom dijelu zadatka može dobiti maksimalno 2 (od moguća 3) boda.