DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
11. svibnja 2021.

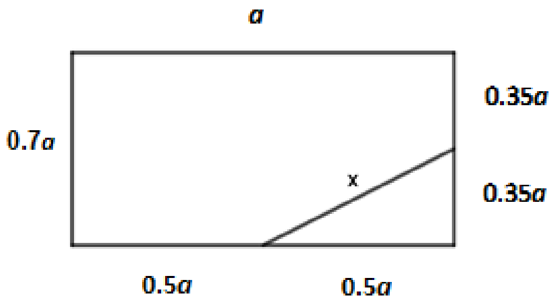
5. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Krojačica Ana ima platno oblika pravokutnika kojemu je duljina jedne stranice 70 % duljine druge stranice. Režući platno po dužini čije su krajnje točke polovišta dviju susjednih stranica tog pravokutnika dobila je dijelove oblika pravokutnog trokuta i peterokuta. Opseg je peterokuta za 68 dm veći od opsega trokuta. Kolika je površina platna?

Rješenje.

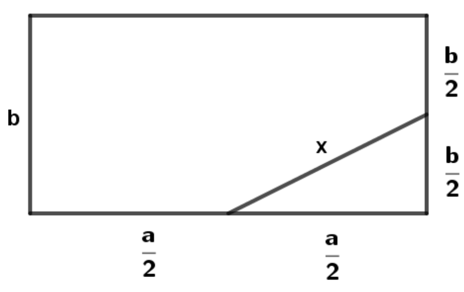
Prvi način:
Neka su a i b duljine dviju susjednih stranica pravokutnika i $a > b$. S x označimo duljinu dužine čije su krajnje točke polovišta susjednih stranica pravokutnika.
Vrijedi $b = 70\ \% \cdot a = 0.7 \cdot a$.



$a + 0.7a + 0.5a + x + 0.35a = 0.5a + 0.35a + x + 68$
$2.55a + x = 0.85a + x + 68$
$2.55a = 0.85a + 68$
$2.55a - 0.85a = 68$
$1.7a = 68$
$a = 68 : 1.7$
$a = 40$ dm

$b = 0.7 \cdot a$
$b = 0.7 \cdot 40$
$b = 28$ dm
Površina platna je $(40 \cdot 28)\ \text{dm}^2 = 1120\ \text{dm}^2$.

Drugi način:
Neka su a i b duljine dviju susjednih stranica pravokutnika i $a > b$. S x označimo duljinu dužine čije su krajnje točke polovišta susjednih stranica pravokutnika.



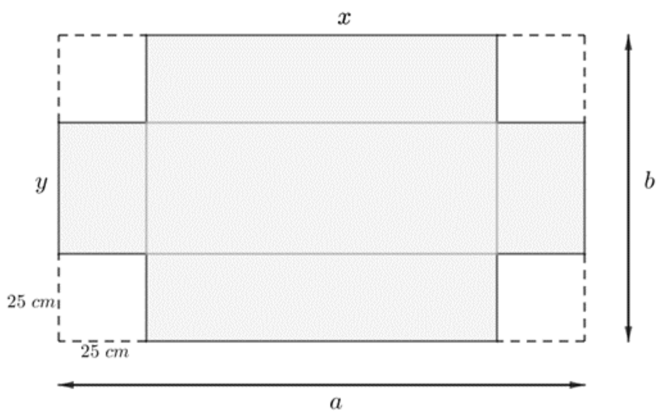
Iz slike je očito da je opseg peterokuta veći od opsega trokuta za $a + b$.
Stoga vrijedi $a + b = 68$ dm.

Kako je $b = 70\ \% \cdot a = 0.7 \cdot a$, slijedi:
$a + 0.7a = 68$
$1.7a = 68$
$a = 68 : 1.7$
$a = 40$ dm

$b = 0.7 \cdot a$
$b = 0.7 \cdot 40$
$b = 28$ dm
Površina platna je $(40 \cdot 28)\ \text{dm}^2 = 1120\ \text{dm}^2$.

2. Duljine stranica kartona pravokutnog oblika, izražene u decimetrima, su prirodni brojevi. Iz svakog od njegovih kutova izrezan je kvadrat sa stranicom duljine 25 cm. Preostali dio kartona iskorišten je za slaganje kutije bez poklopca čiji je obujam 112.5 dm^3. Odredi sve moguće duljine stranica početnog kartona.

Rješenje:



Neka su a i b duljine stranica kartona, a x i y redom duljine tih stranica umanjene za 50 cm.
Neka je $a > b$ kao na skici.
Pri slaganju kutije (kvadra) jedan brid ima duljinu 25 cm, a duljine preostalih bridova su x i y.
Obujam kvadra s bridovima duljina x, y i 25 cm (2.5 dm) računa se po formuli $V = x \cdot y \cdot 2.5$.
Iz te formule slijedi $112.5 = x \cdot y \cdot 2.5$, odnosno $x \cdot y = 45$.
Moguća rješenja odnosno duljine bridova x i y dana su u tablici.

x (dm)	1	3	5	9	15	45
y (dm)	45	15	9	5	3	1

Uz uvjet $x > y$ (koji slijedi iz uvjeta $a > b$) moguća su rješenja parovi (9, 5), (15, 3) i (45, 1).
Duljine stranica a i b početnog kartona su za 5 dm dulje i dane su u sljedećoj tablici:

a (dm)	14	20	50
b (dm)	10	8	1

3. Gea je zamislila broj. Kad bi oblikovala niz koji ima 2021 član tako da je prvi član zamišljeni broj, a svaki je sljedeći član veći za 20.21 od prethodnog, zbroj svih brojeva tog niza bio bi 11.1 puta veći od $2021 \cdot 2021$. Koji je broj zamislila Gea?

Rješenje.

Prvi način:
Neka je x broj koji je zamislila Gea.
Niz od 2021 člana koji nastaje na opisani način je niz brojeva:

$$x,\ x + 1 \cdot 20.21,\ x + 2 \cdot 20.21, \ldots,\ x + 2020 \cdot 20.21.$$

Tada je:

$x + x + 1 \cdot 20.21 + x + 2 \cdot 20.21 + \ldots + x + 2020 \cdot 20.21 = 11.1 \cdot 2021 \cdot 2021$

$2021 \cdot x + 20.21 \cdot (1 + 2 + \ldots + 2020) = 11.1 \cdot 2021 \cdot 2021$

$2021 \cdot x + 20.21 \cdot (2021 \cdot 2020) : 2 = 11.1 \cdot 2021 \cdot 2021$

$2021 \cdot x + 20.21 \cdot 1010 \cdot 2021 = 11.1 \cdot 2021 \cdot 2021 \quad / : 2021$

$x + 20.21 \cdot 1010 = 11.1 \cdot 2021$

$x + 2021 \cdot 10.1 = 11.1 \cdot 2021$

$x = 11.1 \cdot 2021 - 2021 \cdot 10.1$

$x = 2021 \cdot (11.1 - 10.1)$

$x = 2021 \cdot 1$

$x = 2021$

Gea je zamislila broj 2021.

Drugi način:
Neka je x broj koji je zamislila Gea.
Niz od 2021 člana koji nastaje na opisani način je niz brojeva:

$$x,\ x + 1 \cdot 20.21,\ x + 2 \cdot 20.21, \ldots,\ x + 2020 \cdot 20.21.$$

Tada je:

$x + x + 1 \cdot 20.21 + x + 2 \cdot 20.21 + \ldots + x + 2020 \cdot 20.21 = 11.1 \cdot 2021 \cdot 2021$

$2021 \cdot x + 20.21 \cdot (1 + 2 + \ldots + 2020) = 11.1 \cdot 2021 \cdot 2021$

$2021 \cdot x + 20.21 \cdot (2021 \cdot 2020) : 2 = 11.1 \cdot 2021 \cdot 2021$

$2021 \cdot x + 20.21 \cdot 1010 \cdot 2021 = 11.1 \cdot 2021 \cdot 2021 \quad / : 2021$

$x + 20.21 \cdot 1010 = 11.1 \cdot 2021$

$x + 20412.1 = 22433.1$

$x = 22433.1 - 20412.1$

$x = 2021$

Gea je zamislila broj 2021.

4. Trojica prijatelja Ante, Karlo i Tomo crtali su zastave država u koje bi voljeli otputovati. Ante je nacrtao 20, Karlo 25, a Tomo 28 zastava. Broj zastava koje su nacrtali i Karlo i Ante jednak je tri petine broja zastava koje je nacrtao Ante. Broj zastava koje su nacrtali i Tomo i Ante jednak je četvrtini broja zastava koje je nacrtao Ante. Broj zastava koje su nacrtali i Karlo i Tomo jednak je dvije sedmine broja zastava koje je nacrtao Tomo. Broj zastava koje su nacrtala sva trojica sedamnaest je puta manji od ukupnog broja svih zastava koje je nacrtao barem jedan od njih trojice. Koliko su ukupno različitih zastava nacrtali Ante, Karlo i Tomo?

Rješenje.

Prvi način:

$\frac{3}{5}$ od 20 je 12.

Karlo i Ante nacrtali su 12 istih zastava.

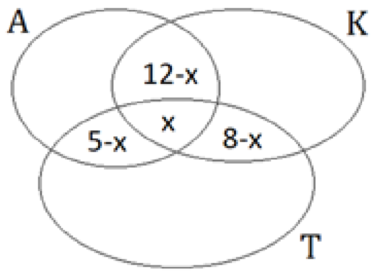
$\frac{1}{4}$ od 20 je 5.

Tomo i Ante nacrtali su 5 istih zastava.

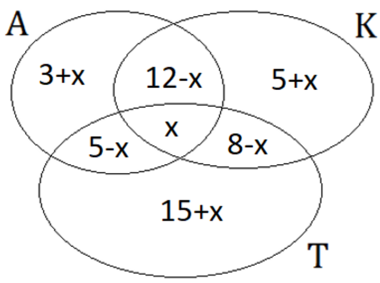
$\frac{2}{7}$ od 28 je 8.

Karlo i Tomo nacrtali su 8 istih zastava.

Neka je x broj zastava koje su nacrtala sva trojica, a z ukupan broj svih zastava koje su nacrtali. Tada je $z = 17 \cdot x$ i vrijedi:



Broj zastava koje je nacrtao samo Ante je $3 + x$.
Broj zastava koje je nacrtao samo Karlo je $5 + x$.
Broj zastava koje je nacrtao samo Tomo je $15 + x$.



$17x = 3 + x + 12 - x + 5 + x + 5 - x + x + 8 - x + 15 + x$
$17x = 48 + x$
$16x = 48$
$x = 3$
Broj različitih zastava koje su nacrtali Ante, Karlo i Tomo je $z = 17 \cdot 3 = 51$.

Drugi način:

$\frac{3}{5}$ od 20 je 12.

Karlo i Ante nacrtali su 12 istih zastava.

$\frac{1}{4}$ od 20 je 5.

Tomo i Ante nacrtali su 5 istih zastava.

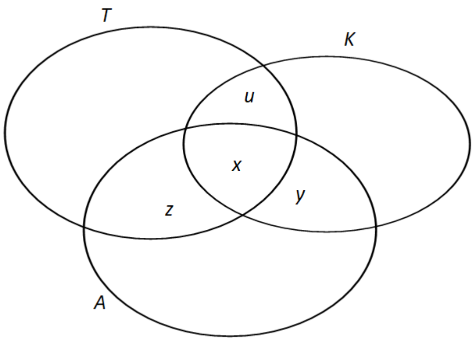
$\frac{2}{7}$ od 28 je 8.

Karlo i Tomo nacrtali su 8 istih zastava.

Neka je x broj zastava koje su nacrtala sva trojica, a d ukupan broj svih zastava koje su nacrtali. Tada je $d = 17 \cdot x$.

Neka je z broj zastava koje su nacrtali i Tomo i Ante, y broj zastava koje su nacrtali i Ante i Karlo, a u broj zastava koje su nacrtali i Karlo i Tomo. Tada vrijedi:

$$x + z = 5$$
$$x + y = 12$$
$$x + u = 8$$



Tada je broj zastava koje je nacrtao samo Ante:

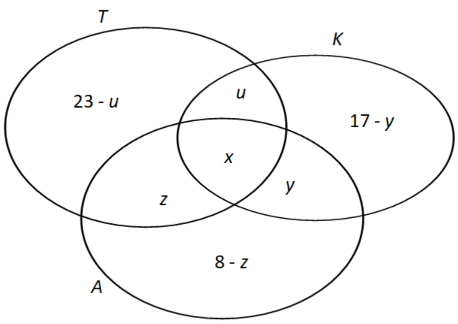
$$20 - (x + y) - z = 20 - 12 - z = 8 - z.$$

Tada je broj zastava koje je nacrtao samo Karlo:

$$25 - (x + u) - y = 25 - 8 - y = 17 - y.$$

Tada je broj zastava koje je nacrtao samo Tomo:

$$28 - (x + z) - u = 28 - 5 - u = 23 - u.$$



Ukupan broj zastava koje su njih trojica nacrtali je

$$d = 23 - u + u + 17 - y + y + 8 - z + z + x = 48 + x.$$

Kako je $d = 17x$ iz uvjeta zadatka, slijedi:

$17x = 48 + x$

$16x = 48$

$x = 3$

Broj različitih zastava koje su nacrtali Ante, Karlo i Tomo je $d = 17 \cdot 3 = 51$.

Treći način:

$\frac{3}{5}$ od 20 je 12.

Karlo i Ante nacrtali su 12 istih zastava.

$\frac{1}{4}$ od 20 je 5.

Tomo i Ante nacrtali su 5 istih zastava.

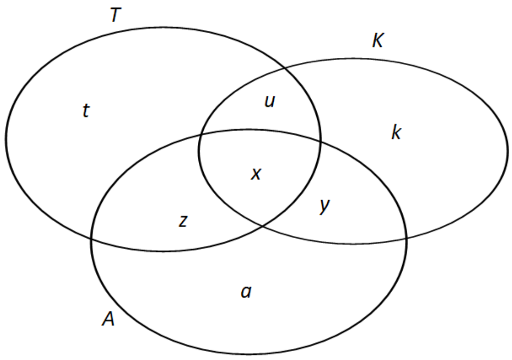
$\frac{2}{7}$ od 28 je 8.

Karlo i Tomo nacrtali su 8 istih zastava.

Neka je x broj zastava koje su nacrtala sva trojica, a d ukupan broj svih zastava koje su nacrtali. Tada je $d = 17 \cdot x$.

Neka je z broj zastava koje su nacrtali i Tomo i Ante, y broj zastava koje su nacrtali i Ante i Karlo, a u broj zastava koje su nacrtali i Karlo i Tomo. Tada vrijedi:

$$x + z = 5$$
$$x + y = 12$$
$$x + u = 8$$



Iz zapisanih jednakosti možemo zaključiti da je $x < 5$.

Neka je $d = x + z + y + u + t + k + a$. Prema uvjetu zadatka vrijedi $17x = d$.

Za $x = 1$:

x	z	y	u	$t = 28 - (z + x + u)$	$k = 25 - (y + x + u)$	$a = 20 - (z + x + y)$	d
1	4	11	7	16	6	4	49

Provjerom se lako vidi da $x = 1$ ne zadovoljava uvjet $17x = 49$.

Za $x = 2$:

x	z	y	u	$t = 28 - (z + x + u)$	$k = 25 - (y + x + u)$	$a = 20 - (z + x + y)$	d
2	3	10	6	17	7	5	50

Provjerom se lako vidi da niti $x = 2$ ne zadovoljava uvjet $17x = 50$.

Za $x = 3$:

x	z	y	u	$t = 28 - (z + x + u)$	$k = 25 - (y + x + u)$	$a = 20 - (z + x + y)$	d
3	2	9	5	18	8	6	51

Provjerom se lako vidi da $x = 3$ zadovoljava uvjet $17x = 51$.

Za $x = 4$:

x	z	y	u	$t = 28 - (z + x + u)$	$k = 25 - (y + x + u)$	$a = 20 - (z + x + y)$	d
4	1	8	4	19	9	7	52

Provjerom se lako vidi da $x = 4$ ne zadovoljava uvjet $17x = 52$.

Broj različitih zastava koje su nacrtali Ante, Karlo i Tomo je $d = 17 \cdot 3 = 51$.

5. Na Morskim susretima, natjecanju u igrama uz more i bazen, sudjeluje 8 Dubrovčana, 7 Zadrana, 2 Hvarana i 3 Splićana. Trebaju sastaviti peteročlanu ekipu u kojoj će biti barem jedan natjecatelj iz svakog od ta četiri grada. Na koliko različitih načina mogu sastaviti ekipu?

Rješenje.

Neka D označava natjecatelja iz Dubrovnika, Z natjecatelja iz Zadra, H natjecatelja iz Hvara i S natjecatelja iz Splita.

Prema uvjetima zadatka moguće su sljedeće ekipe: DDZHS, ZZDHS, HHDZS i SSDZH.

Pri slaganju ekipe DDZHS, dva natjecatelja iz Dubrovnika biraju se na $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ načina, jedan natjecatelj iz Zadra na 7 načina, jedan natjecatelj iz Hvara na 2 načina i jedan natjecatelj iz Splita na 3 načina. Ukupan broj ekipa DDZHS je $28 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3 = 1176$.

Pri slaganju ekipe ZZDHS, dva natjecatelja iz Zadra biraju se na $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ način, jedan natjecatelj iz Dubrovnika na 8 načina, jedan natjecatelj iz Hvara na 2 načina, jedan natjecatelj iz Splita na 3 načina. Ukupan broj ekipa ZZDHS je $21 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 3 = 1008$.

Pri slaganju ekipe HHDZS, oba natjecatelja iz Hvara su članovi ekipe pa ih se može odabrati samo na 1 način, jedan natjecatelj iz Dubrovnika na 8 načina, jedan natjecatelj iz Zadra na 7 načina, jedan natjecatelj iz Splita na 3 načina. Ukupan broj ekipa HHDZS je $1 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 3 = 168$.

U četvrtom slučaju, pri slaganju ekipe SSDZH, dva natjecatelja iz Splita biraju se na $\frac{3 \cdot 2}{2} = 3$ načina, jedan natjecatelj iz Dubrovnika na 8 načina, jedan natjecatelj iz Zadra na 7 načina i jedan natjecatelj iz Hvara na 2 načina. Ukupan broj ekipa SSDZH je $3 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 2 = 336$.

Ekipu je moguće odabrati na $1176 + 1\,008 + 168 + 336 = 2688$ načina.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
11. svibnja 2021.

6. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Zbroj 86 uzastopnih cijelih brojeva iznosi 2021. Za koliko je aritmetička sredina svih pozitivnih brojeva među njima veća od aritmetičke sredine svih negativnih brojeva?

Rješenje.

Neka je najmanji od tih 86 brojeva x. Ostali su $x + 1$, $x + 2$, … , $x + 85$.
Vrijedi:
$x + (x + 1) + (x + 2) + \ldots + (x + 85) = 2021$
$x + x + 1 + x + 2 + \ldots + x + 85 = 2021$
$86x + 1 + 2 + \ldots + 85 = 2021$.

Zbroj $1 + 2 + \ldots + 85$ iznosi
$1 + 2 + \ldots + 85 = 86 \cdot 85 : 2 = 3655$.

Dalje je:
$86x + 3655 = 2021$
$86x = -1634$
$x = -19$.
Traženi brojevi su $-19, -18, \ldots , 66$.

Zbroj svih pozitivnih brojeva među njima je
$1 + 2 + \ldots + 66 = 67 \cdot 66 : 2 = 2211$,
a njihova aritmetička sredina je $2211 : 66 = 33.5$.

Zbroj svih negativnih brojeva među njima je
$-(1 + 2 + \ldots + 19) = -20 \cdot 19 : 2 = -190$,
a njihova aritmetička sredina je $-190 : 19 = -10$.

Tražena razlika iznosi $33.5 - (-10) = 43.5$.

2. Ako četveroznamenkastom broju ispustimo jednu znamenku pa dobiveni troznamenkasti broj pribrojimo početnom četveroznamenkastom broju, dobivamo 1254. Odredi početni četveroznamenkasti broj.

Rješenje.

Kada bi znamenka tisućica bila 2 ili više, zbroj bi bio veći od 1254.
Znamenka tisućica mora biti 1.
Četveroznamenkasti broj je oblika $\overline{1abc}$.
Ako ispustimo znamenku *c*, dobije se:
$\overline{1abc}+\overline{1ab}=1254$
$1000 + 100a + 10b + c + 100 + 10a + b = 1254$
$110a + 11b + c + 1100 = 1254$
$110a + 11b + c = 154$
$a = 1$ jer je za $a = 2$ zbroj veći od 154, a za $a = 0$ je izraz $11b + c$ manji od 154.
$11b + c = 44$
$b = 4, c = 0$ Broj je 1140.

Ako ispustimo znamenku *b*, dobije se:
$\overline{1abc}+\overline{1ac}=1254$
$1000 + 100a + 10b + c + 100 + 10a + c = 1254$
$110a + 10b + 2c + 1100 = 1254$
$110a + 10b + 2c = 154$
$a = 1$
$10b + 2c = 44$
$5b + c = 22$
$b = 3, c = 7$ Broj je 1137.
$b = 4, c = 2$ Broj je 1142.

Ako ispustimo znamenku *a*, dobije se:
$\overline{1abc}+\overline{1bc}=1254$
$1000 + 100a + 10b + c + 100 + 10b + c = 1254$
$100a + 20b + 2c + 1100 = 1254$
$100a + 20b + 2c = 154$

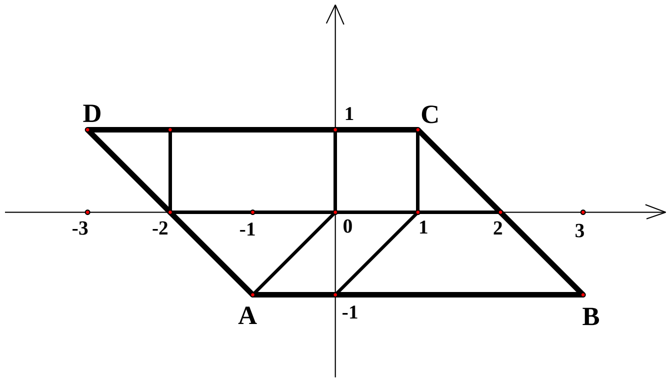
$a = 0$
$20b + 2c = 154$
$10b + c = 77$
$b = 7, c = 7$ Broj je 1077.

$a = 1$
$20b + 2c = 54$
$10b + c = 27$
$b = 2, c = 7$ Broj je 1127.

Ako ispustimo znamenku 1, dobije se:
$\overline{1abc}+\overline{abc}=1254$
$200a + 20b + 2c + 1000 = 1254$
$200a + 20b + 2c = 254$
$100a + 10b + c = 127$
$a = 1$
$10b + c = 27$
$b = 2, c = 7$ Broj je 1127, ali taj broj već imamo.

Sva moguća rješenja su:
1077, 1127, 1137, 1140, 1142.

3. U koordinatnom sustavu nacrtan je paralelogram *ABCD*, podijeljen na sedam dijelova: tri trokuta, pravokutnik, kvadrat, paralelogram i trapez.



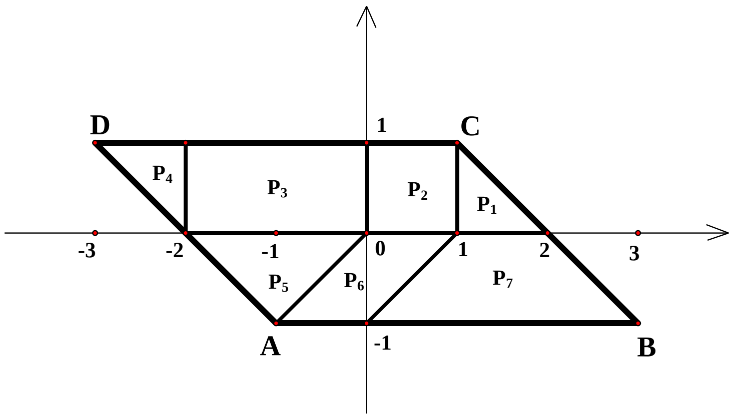
Odredi koje dijelove treba cijele osjenčati da bi bilo osjenčano 62.5 % paralelograma *ABCD*, pri čemu je osjenčan:

a) najmanji mogući broj njegovih dijelova

b) najveći mogući broj njegovih dijelova.

Rješenje.

Označimo s a duljinu stranice $\overline{AB}$, a s v duljinu pripadajuće visine paralelograma *ABCD*.
Iz slike je jasno da je $a = 4$ i $v = 2$, pa je površina cijelog paralelograma *ABCD* jednaka
$P = a \cdot v = 4 \cdot 2 = 8$.
Uz oznake kao na slici, izračunajmo površine svih dijelova paralelograma. Ujedno možemo izraziti i njihove udjele u površini paralelograma *ABCD*.



$P_1 = \frac{1}{2}$	$P_1 = \frac{1}{16}P$	ili	$P_1 = 6.25$ % od P
$P_2 = 1$	$P_2 = \frac{1}{8}P$	ili	$P_2 = 12.5$ % od P
$P_3 = 2$	$P_3 = \frac{1}{4}P$	ili	$P_3 = 25$ % od P
$P_4 = \frac{1}{2}$	$P_4 = \frac{1}{16}P$	ili	$P_4 = 6.25$ % od P
$P_5 = 1$	$P_5 = \frac{1}{8}P$	ili	$P_5 = 12.5$ % od P
$P_6 = 1$	$P_6 = \frac{1}{8}P$	ili	$P_6 = 12.5$ % od P
$P_7 = 2$	$P_7 = \frac{1}{4}P$	ili	$P_7 = 25$ % od P

Traženi postotak od 62.5 % može se izraziti u obliku razlomka:

$62.5\ \% = 0.625 = \frac{625}{1000} = \frac{5}{8}$.

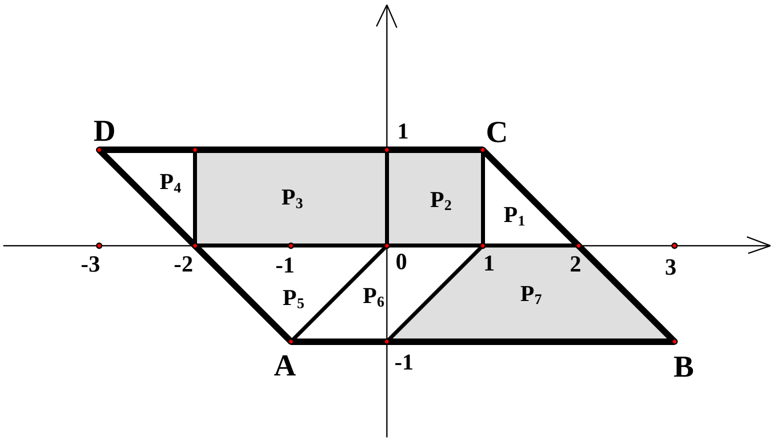
Dakle, treba obojiti $\frac{5}{8}$ paralelograma *ABCD*.

a) Zbog $\frac{5}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ treba obojiti oba lika s površinama P_3 i P_7 te još jedan od likova s površinama P_2 , P_5 ili P_6.

To se, također, može zaključiti iz jednakosti 62.5 % = 25 % + 25 % + 12.5 %.

U ovom slučaju bojanje je moguće izvršiti na tri različita načina: $P_3P_7P_2$, $P_3P_7P_5$, $P_3P_7P_6$.

Na slici je prikazan prvi način bojanja.



b) Zbog $\frac{5}{8} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4}$ treba obojiti oba lika s površinama P_1 i P_4, dva od tri lika s površinama P_2, P_5 ili P_6 te jedan od dva lika s površinama P_3 ili P_7.

Do istog se zaključka može doći i ovako:

100 % – 62.5 % = 37.5 %

37.5 % = 25 % + 12.5 %

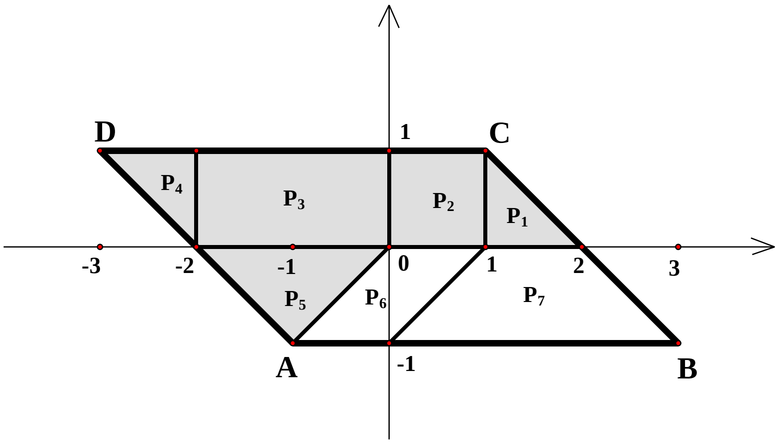
U ovom slučaju bojanje je moguće izvršiti na šest različitih načina:

$P_1P_4P_2P_5P_3$, $P_1P_4P_2P_5P_7$,

$P_1P_4P_2P_6P_3$, $P_1P_4P_2P_6P_7$,

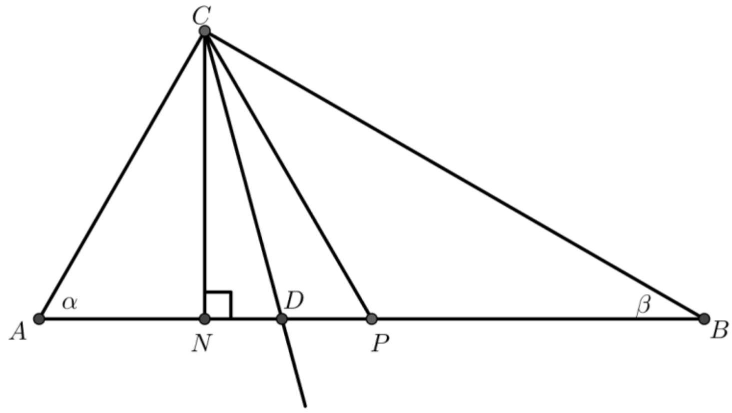
$P_1P_4P_5P_6P_3$, $P_1P_4P_5P_6P_7$.

Na slici je prikazan prvi način bojanja.



4. U pravokutnom trokutu ΔABC točka P je polovište najdulje stranice $\overline{AB}$, a točka N je nožište visine iz vrha C. Dokaži da simetrala kuta $\angle ACB$ dijeli kut $\angle NCP$ na dva jednaka dijela.

Rješenje.



Neka je $|\angle BAC| = \alpha$ i $|\angle CBA| = \beta$. Sjecište simetrale kuta $\angle ACB$ i stranice $\overline{AB}$ označimo s D.
Vrijedi da je $\alpha + \beta = 90°$, odnosno $\beta = 90° - \alpha$.
Trokut ΔANC je pravokutan, pa je
$|\angle ACN| = 90° - |\angle NAC| = 90° - \alpha = \beta$.
Središte trokutu opisane kružnice kod pravokutnog trokuta nalazi se u polovištu hipotenuze.
Zbog toga je $|PB| = |PC|$, pa je ΔPBC jednakokračan trokut.
Tada je
$|\angle PCB| = |\angle CBP| = \beta$.
Dalje vrijedi:
$|\angle ACD| = |\angle ACN| + |\angle NCD| = \beta + |\angle NCD|$
$|\angle DCB| = |\angle DCP| + |\angle PCB| = |\angle DCP| + \beta$.
Simetrala kuta dijeli kut na dva sukladna kuta, pa je
$|\angle ACD| = |\angle DCB|$.
Zbog toga je
$\beta + |\angle NCD| = |\angle DCP| + \beta$,
a onda je
$|\angle NCD| = |\angle DCP|$, što je trebalo dokazati.

5. U skladištu jedne trgovine ostalo je puno čokolada u 12 različitih vrsta. Pojedinačne cijene u kunama po jedne čokolade od svake vrste su redom: 11, 12, 15, 16, 20, 21, 25, 26, 27, 28, 29 i 30. Na koliko različitih načina je moguće složiti paket od tri čokolade čija je ukupna vrijednost u kunama broj djeljiv s 5?

Rješenje.

Zbroj triju brojeva bit će djeljiv s 5 ako je zbroj njihovih ostataka pri dijeljenju s 5 djeljiv s 5. Zato formirajmo skupove na sljedeći način:
A_0 je skup brojeva (cijena u kunama) koji su djeljivi s 5, A_1 je skup brojeva (cijena) koji pri dijeljenju s 5 daju ostatak 1, itd.
$A_0 = \{15, 20, 25, 30\}$
$A_1 = \{11, 16, 21, 26\}$
$A_2 = \{12, 27\}$
$A_3 = \{28\}$
$A_4 = \{29\}$

Promotrimo koje ostatke pri dijeljenju s 5 mogu imati pribrojnici da bi njihov zbroj bio djeljiv s 5.
Dobiva se ovih 7 mogućnosti:
a) 0, 0, 0
b) 0, 1, 4
c) 0, 2, 3
d) 1, 1, 3
e) 1, 2, 2
f) 2, 4, 4
g) 3, 3, 4

Potrebno je prebrojiti različite pakete za svaki od navedenih slučajeva:

a) Cijena svake od triju čokolada u paketu je broj djeljiv s 5. Postoji 20 mogućnosti:

15 + 15 + 15,	20 + 20 + 20,	25 + 25 + 25,	30 + 30 + 30,
15 + 15 + 20,	15 + 15 + 25,	15 + 15 + 30,	
20 + 20 + 15,	20 + 20 + 25,	20 + 20 + 30,	
25 + 25 + 15,	25 + 25 + 20,	25 + 25 + 30,	
30 + 30 + 15,	30 + 30 + 20,	30 + 30 + 25,	
15 + 20 + 25,	15 + 20 + 30,	15 + 25 + 30,	20 + 25 + 30.

b) Cijena jedne čokolade je broj djeljiv s 5, druge čokolade broj koji daje ostatak 1 pri dijeljenju s 5, a treće broj koji daje ostatak 4 pri dijeljenju s 5.
Broj djeljiv s 5 možemo izabrati na 4 načina, jer je to jedan od brojeva iz skupa A_0. Broj koji daje ostatak 1 možemo izabrati također na 4 načina, a broj koji daje ostatak 4 pri dijeljenju s 5 je samo broj 29, što znači da je samo jedan način.
Ukupan broj načina u ovom slučaju je, dakle, $4 \cdot 4 \cdot 1 = 16$.
Do broja 16 moguće je doći ispisivanjem svih kombinacija te njihovim prebrojavanjem:

15 + 11 + 29,	20 + 11 + 29,	25 + 11 + 29,	30 + 11 + 29,
15 + 16 + 29,	20 + 16 + 29,	25 + 16 + 29,	30 + 16 + 29,
15 + 21 + 29,	20 + 21 + 29,	25 + 21 + 29,	30 + 21 + 29,
15 + 26 + 29,	20 + 26 + 29,	25 + 26 + 29,	30 + 26 + 29.

c) Cijena jedne čokolade je broj djeljiv s 5, druge čokolade broj koji daje ostatak 2 pri dijeljenju s 5, a treće broj koji daje ostatak 3 pri dijeljenju s 5.
Broj djeljiv s 5 možemo izabrati na 4 načina, broj koji daje ostatak 2 možemo izabrati na 2 načina, a broj koji daje ostatak 3 pri dijeljenju s 5 je samo broj 28, što znači da je samo jedan način.
Ukupan broj načina u ovom slučaju je, dakle, $4 \cdot 2 \cdot 1 = 8$.

15 + 12 + 28,	20 + 12 + 28,	25 + 12 + 28,	30 + 12 + 28,
15 + 27 + 28,	20 + 27 + 28,	25 + 27 + 28,	30 + 27 + 28.

d) Cijene dviju čokolada su brojevi iz skupa A_1 , a cijena treće čokolade je broj iz skupa A_3. Izabrati dvije čokolade s cijenama iz skupa A_1 može se na 10 načina, dok skup A_3 ima samo jedan element. Prema tome, dobiva se ukupno 10 mogućnosti:

11 + 11 + 28,	11 + 16 + 28,	11 + 21 + 28,	11 + 26 + 28,
16 + 16 + 28,	16 + 21 + 28,	16 + 26 + 28,	
21 + 21 + 28,	21 + 26 + 28,	26 + 26 + 28.	

e) Treba izabrati jedan broj iz skupa A_1 i 2 broja iz skupa A_2. Iz skupa A_1 jedan broj se može odabrati na 4 načina, a 2 broja iz skupa A_2 biraju se na tri načina. Ovdje je, dakle, ukupno 12 mogućnosti:

11 + 12 + 12,	11 + 12 + 27,	11 + 27 + 27,
16 + 12 + 12,	16 + 12 + 27,	16 + 27 + 27,
21 + 12 + 12,	21 + 12 + 27,	21 + 27 + 27,
26 + 12 + 12,	26 + 12 + 27,	26 + 27 + 27.

f) Jedan element skupa A_2 možemo odabrati na 2 načina, a samo je jedan način za odabir dvaju elemenata skupa A_4, pa su ovdje točno dvije mogućnosti:
12 + 29 + 29,   27 + 29 + 29.

g) S obzirom da skupovi A_3 i A_4 imaju po jedan element, jedina je mogućnost:
28 + 28 + 29.

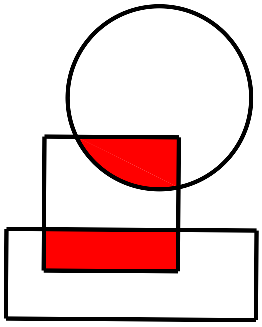
Ukupan broj paketa koji se mogu dobiti na traženi način je:
20 + 16 + 8 + 10 + 12 + 2 + 1 = 69.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
11. svibnja 2021.

7. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Osjenčana je $\frac{1}{8}$ kruga i $\frac{1}{4}$ pravokutnika. Površina kvadrata jednaka je polovini zbroja površina kruga i pravokutnika. Ako se zna da je osjenčano 40 % kvadrata, odredi u kojem se omjeru zbroj površina kruga i kvadrata odnosi prema površini pravokutnika.



Rješenje.

Označimo:
p – površina pravokutnika
k – površina kvadrata
x – površina kruga

Tada je:

$$\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}p=40\%\cdot k$$

$$k=\frac{x+p}{2}$$

Iz prve jednadžbe dobivamo:
$5x+10p=16k$.
Uvrstimo k iz druge jednadžbe:

$$5x+10p=16\cdot\frac{x+p}{2}$$

$$2p=3x$$

$$x=\frac{2}{3}p\ .$$

Dalje slijedi:

$$k=\frac{1}{2}(x+p)$$

$$k=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}p+p\right)$$

$$k=\frac{5}{6}p\ .$$

Vrijedi:

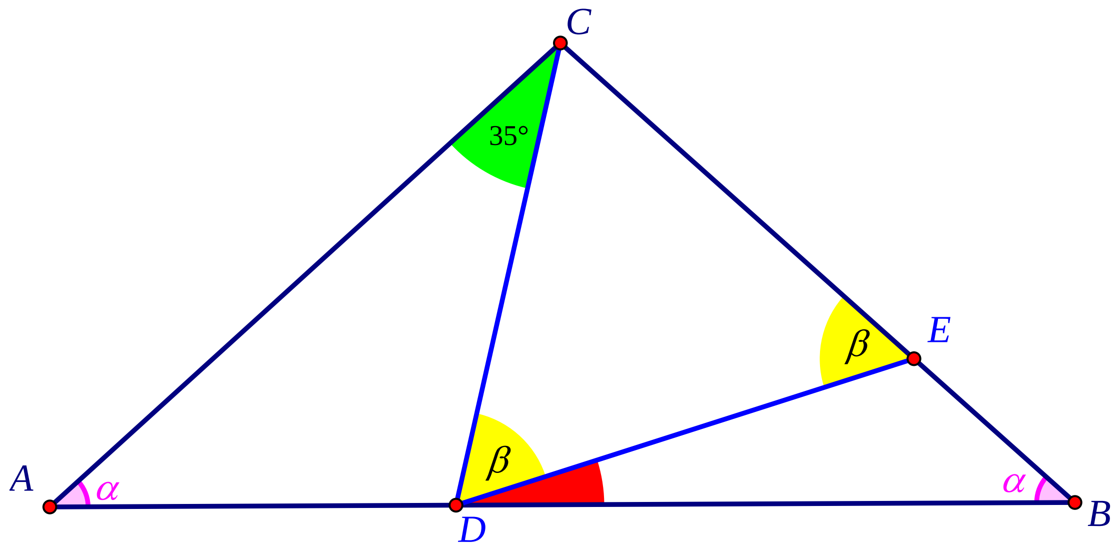
$$\frac{x+k}{p}=\frac{\frac{2}{3}p+\frac{5}{6}p}{p}=\frac{\frac{9}{6}p}{p}=\frac{3}{2}.$$

Zbroj površina kruga i kvadrata je $\frac{3}{2}=1.5$ površine pravokutnika, odnosno $(x + k) : p = 3 : 2$.

2. Zadan je tupokutan jednakokračan trokut ΔABC s osnovicom $\overline{AB}$. Na osnovici je dana točka D tako da je $|\angle ACD|=35°$. Na kraku $\overline{BC}$ dana je točka E tako da je $|CE|=|CD|$. Odredi $|\angle BDE|$.

Rješenje.

U tupokutnom jednakokračnom trokutu tupi kut je kut nasuprot osnovici.
Stoga je $|\angle ACB|>35°$.
Skica:



U zadanom jednakokračnom trokutu ΔABC stranica $\overline{AB}$ je osnovica, pa su kutovi uz osnovicu sukladni:

$|\angle BAC|=|\angle CBA|=\alpha$.

Trokut ΔCDE je također jednakokračan jer je $|CE|=|CD|$.

Stoga je $|\angle EDC|=|\angle CED|=\beta$.

Mjera vanjskog kuta trokuta jednaka je zbroju mjera nasuprotnih unutarnjih kutova trokuta.
Zato je:

$\beta=|\angle BDE|+\alpha$ i

$|\angle BDE|+\beta=\alpha+35°$.

Uvrštavanjem β iz prve jednadžbe u drugu jednadžbu slijedi:

$|\angle BDE|+|\angle BDE|+\alpha=\alpha+35°$

$2|\angle BDE|=35°$

$|\angle BDE|=35°:2=17.5°=17°30'$.

3. Umnožak dva različita prirodna broja je 15 puta veći od njihovog zbroja. Koje sve vrijednosti može poprimiti razlika većeg i manjeg broja?

Rješenje.

Označimo tražene brojeve s m i n. Neka je $m > n$.
Prema uvjetu zadatka vrijedi

$$mn = 15(m + n).$$

Sada slijedi

$$mn - 15m - 15n + 225 = 225,$$

odnosno

$$(m - 15)(n - 15) = 225.$$

Kako je $225 = 3^2 \cdot 5^2$, a 225 je djeljiv s $n - 15$ i $n < m$, imamo sljedeće mogućnosti:

$n - 15 = 1$, $m - 15 = 225$
$n - 15 = 3$, $m - 15 = 75$
$n - 15 = 5$, $m - 15 = 45$
$n - 15 = 9$, $m - 15 = 25$.

Tada su mogućnosti za $m - n$ sljedeće:

$$m - n = 224, 72, 40, 16.$$

Primjedba. Jednadžba $mn = 15(m + n)$ se može riješiti po m i tako dobiti

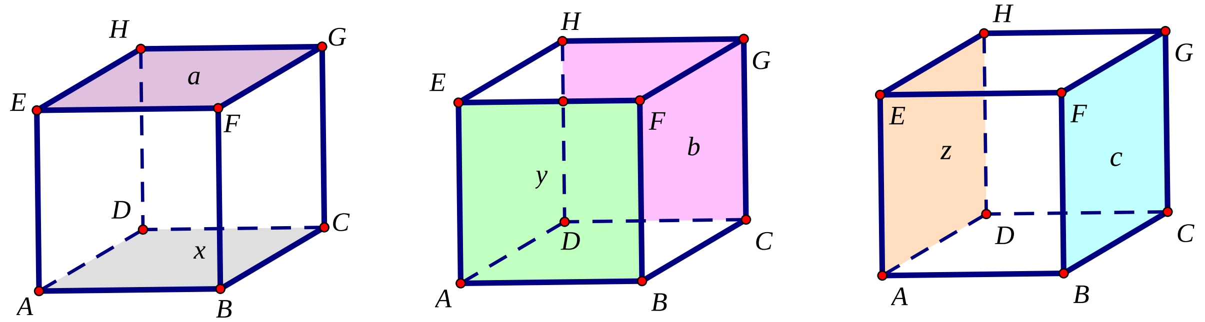
$$m = \frac{15n}{n-15} = \frac{15(n-15)+225}{n-15} = 15 + \frac{225}{n-15}$$

te dalje nastaviti na isti način kao u gornjem rješenju.

4. Na svakoj strani kocke napisan je po jedan prirodan broj. Svakom vrhu kocke pridružen je umnožak triju brojeva koji se nalaze na onim stranama kocke koje određuju taj vrh. Zbroj svih tih osam brojeva iznosi 455. Koliko iznosi zbroj svih brojeva napisanih na stranama kocke?

Rješenje.

Neka su vrhovi kocke standardno označeni s $A, B, \ldots, H$.
Neka je broj upisan na donju stranu x, a na gornju a.
Neka je broj upisan na prednju stranu y, a na stražnju b.
Neka je broj upisan na lijevu stranu z, a na desnu c.



Tada je redom vrhu A pridružen je broj xyz, vrhu B broj xyc, vrhu C broj xbc, vrhu D broj xzb, vrhu E broj yza, vrhu F broj yac, vrhu G broj abc i vrhu H broj zab.

Vrijedi:

$$xyz + xyc + xbc + xzb + yza + yac + abc + zab = 455$$

$$x \cdot (yz + yc + bc + zb) + a \cdot (yz + yc + bc + zb) = 455$$

$$(yz + yc + bc + zb) \cdot (x + a) = 455$$

$$[y \cdot (z + c) + b \cdot (c + z)] \cdot (x + a) = 455$$

$$(z + c) \cdot (y + b) \cdot (x + a) = 455$$

Rastav broja 455 na proste faktore je:

$$455 = 5 \cdot 7 \cdot 13.$$

Očito su zbrojevi brojeva na suprotnim stranama kocke jednaki 5, 7 i 13 (u bilo kojem poretku).

Tada je zbroj svih brojeva napisanih na kocki

$$x + y + z + a + b + c = (z + c) + (y + b) + (z + c) = 5 + 7 + 13 = 25.$$

5. Nađi najmanji prirodan broj n takav da za svaki skup od n točaka s cjelobrojnim koordinatama, od kojih nikoje tri ne leže na istom pravcu, postoji trokut s vrhovima iz tog skupa za kojeg vrijedi da polovišta njegovih stranica također imaju cjelobrojne koordinate.

Rješenje.

Ako su dane točke $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ onda je njihovo polovište dano s

$$P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right). \qquad (1)$$

Podijelimo sve točke s cjelobrojnim koordinatama u četiri skupa:

S_1 – skup točaka čije apscisa i ordinata daje ostatak 1 pri dijeljenju s 2,

S_2 – skup točaka čije su apscisa i ordinata djeljive s 2,

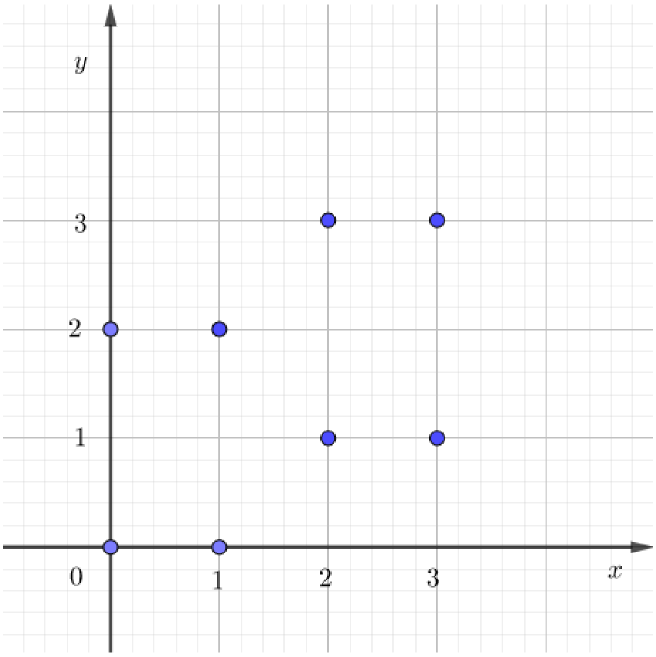
S_3 – skup točaka čija apscisa daje ostatak 1 pri dijeljenju 2, a ordinata je djeljiva s 2,

S_4 – skup točaka čija je apscisa djeljiva s 2, a ordinata daje ostatak 1 pri dijeljenju s 2.

Između 9 točaka, prema Dirichletovom principu, sigurno postoje 3 koje pripadaju jednom od četiri gore navedena skupa. Te tri točke su vrhovi trokuta (jer nikoje tri točke ne leže na istom pravcu) i za te tri točke vrijedi da polovište svake tri dužine koje te točke određuju (a to su stranice trokuta), kao obje koordinate ima prirodne brojeve, zbog činjenice da je zbroj apscisa, kao i zbroj ordinata, dvije takve točke paran broj i zbog (1).

Ako imamo skup od 8 točaka, pri čemu su po dvije iz svakog od skupova S_1, S_2, S_3 i S_4, primjerice skup koji se sastoji od točaka (0, 0), (0, 2), (1, 0), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 1) i (3, 3), onda će među bilo koje 3 izabrane točke biti bar dvije točke iz različitih skupova S_1, S_2, S_3 i S_4, a kako zbroj apscisa ili zbroj ordinata dvije točke iz različita dva gore navedena skupa nije paran, prema (1), apscisa ili ordinata nekog polovišta nije cijeli broj.

(Slika prikazuje navedeni izbor osam točaka od kojih nikoje tri nisu na istom pravcu.)



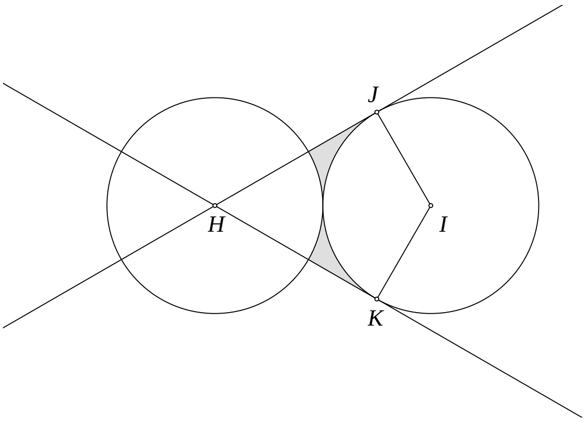
Dakle, najmanji prirodni broj n s traženim svojstvom je $n = 9$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
11. svibnja 2021.

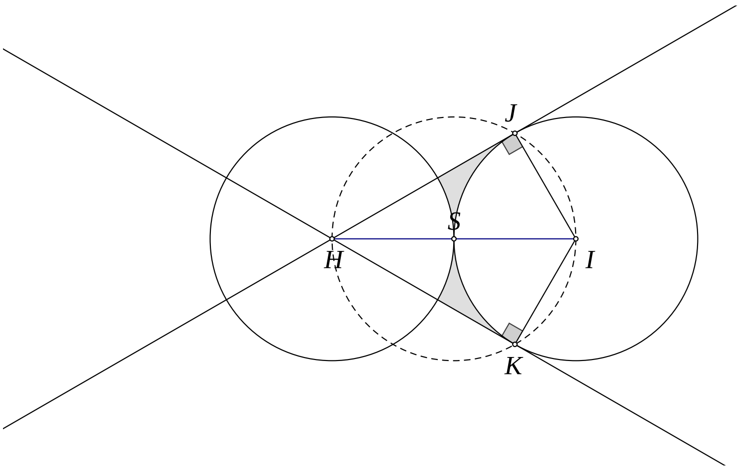
8. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Dvije kružnice jednakih radijusa dodiruju se izvana. Iz središta jedne kružnice povučene su tangente na drugu kružnicu. Odredi omjer površine četverokuta čiji su vrhovi središta kružnica i dirališta tangenti te površine dijela ravnine između tangenti i krugova određenih zadanim kružnicama (osjenčanog na slici).



Rješenje.



Označimo središta tih kružnica s H i I, a dirališta tangenata K i J, kao na slici.

Površina četverokuta $HKIJ$ jednaka je površini jednakostraničnog trokuta duljine stranice $2r$, tj.

$$P_{HKIJ} = \frac{(2r)^2\sqrt{3}}{4} = r^2\sqrt{3}.$$

Površina dijela ravnine između tangenti i krugova određenih zadanim kružnicama jednaka je razlici površine četverokuta $HKIJ$ i zbroja površina dvaju kružnih isječaka.

Kako je ΔHIJ pravokutan sa šiljastim kutovima veličine 30° i 60°, onda je središnji kut jednog od tih isječaka veličine 60°, a drugog 120° i radijusi tih isječaka su r.

$$P_{I_1} + P_{I_2} = 60 \cdot \frac{r^2\pi}{360} + 120 \cdot \frac{r^2\pi}{360} = \frac{1}{2} r^2\pi.$$

Sada je površina traženog dijela ravnine

$$P_d = P_{HKIJ} - \left(P_{I_1} + P_{I_2}\right) = r^2\sqrt{3} - \frac{1}{2} r^2\pi = r^2\left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi\right).$$

Omjer površina je

$$\frac{r^2\sqrt{3}}{r^2\left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi\right)} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - \pi}.$$

2. Ako za brojeve a i b vrijedi $a + 10b = 1$, kolika je najveća moguća vrijednost umnoška $a \cdot b$? Odredi vrijednosti brojeva a i b za koje se ta vrijednost postiže.

Rješenje.

$$\begin{aligned}
ab &= (1 - 10b)b = b - 10b^2 \\
&= -10b^2 + b = -10\left(b^2 - \frac{1}{10}b\right) \\
&= -10\left(b^2 - \frac{1}{10}b + \frac{1}{400} - \frac{1}{400}\right) \\
&= -10\left(b^2 - \frac{1}{10}b + \frac{1}{400}\right) + \frac{1}{40} \\
&= \frac{1}{40} - 10\left(b - \frac{1}{20}\right)^2.
\end{aligned}$$

Kvadrat svakog broja je nenegativan broj, pa je i njegov deseterokratnik nenegativan.

Stoga slijedi

$$\frac{1}{40} - 10\left(b - \frac{1}{20}\right)^2 \leq \frac{1}{40}.$$

Ako je $ab = \frac{1}{40}$, onda je

$$10\left(b - \frac{1}{20}\right)^2 = 0$$

$$b - \frac{1}{20} = 0$$

$$b = \frac{1}{20}.$$

Konačno, imamo

$$a = 1 - 10b = 1 - 10 \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{2}.$$

Zato je najveća moguća vrijednost umnoška $a \cdot b$ jednaka $\frac{1}{40}$.

3. Neka su duljine svih stranica pravokutnog trokuta prirodni brojevi. Dokaži da je duljina barem jedne stranice broj djeljiv s 5.

Rješenje.

Kvadrat broja djeljivog s 5 je djeljiv s 5, a dodatno vrijedi:

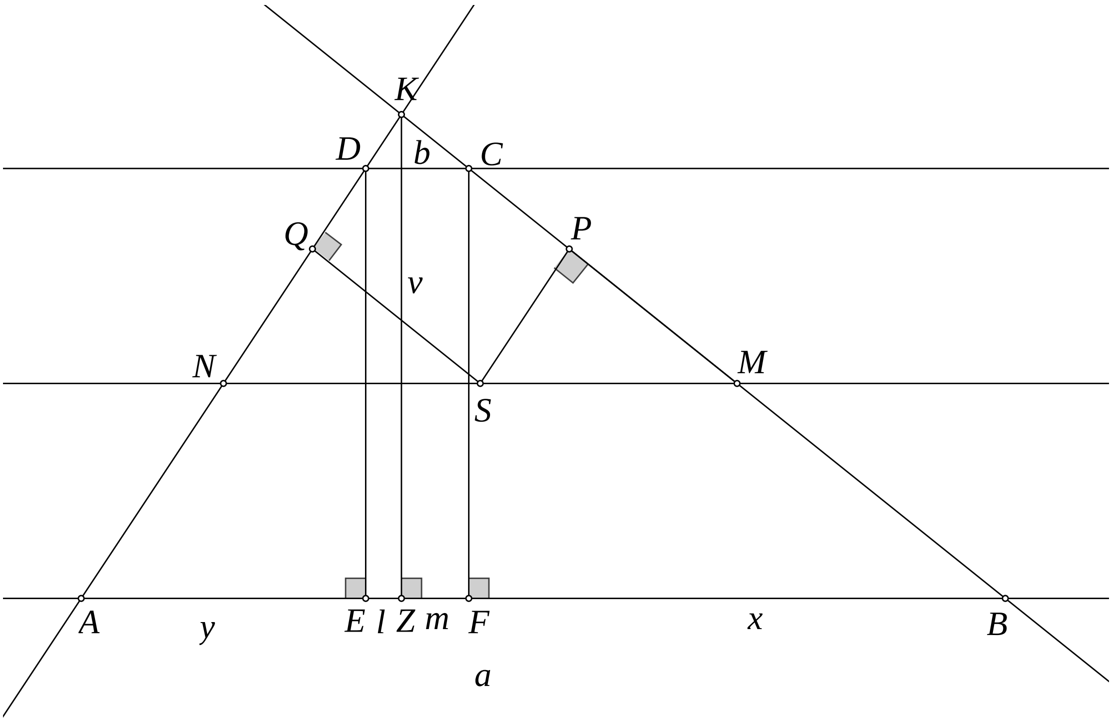
$$\begin{aligned}(5k \pm 1)^2 &= 25k^2 \pm 10k + 1 = 5(5k^2 \pm 2k) + 1\\(5k \pm 2)^2 &= 25k^2 \pm 20k + 4 = 5(5k^2 \pm 4k) + 4.\end{aligned} \qquad (*)$$

Dakle, kvadrat prirodnog broja daje ostatak 0, 1 i 4 pri dijeljenju s 5.

Pretpostavimo li da duljine kateta a i b nisu djeljive s 5, iz Pitagorinog poučka i (*), zaključujemo da tada c^2 (pri čemu je c duljina hipotenuze) može dati ostatak 2, 3 ili 0 pri dijeljenju s 5. No, kako znamo da ne može dati ostatke 2 i 3 pri dijeljenju s 5, slijedi da je c^2 djeljivo s 5, odnosno da je c djeljivo s 5.

4. Neka je ΔABK trokut sa šiljastim kutovima u vrhovima A i B. Na stranici $\overline{KA}$ odabrane su točke D i N, a na stranici $\overline{KB}$ točke C i M tako da su pravci DC, NM i AB usporedni. Pravci AB i DC su od pravca NM udaljeni 4 cm. Polovište dužine $\overline{NM}$ je od pravca AK udaljeno 4 cm, a od pravca BK udaljeno 3 cm. Ako površina četverokuta $ABCD$ iznosi 80 cm^2, odredi površinu trokuta ΔABK.

Rješenje.



Neka je $|SP| = 3\,\text{cm}$, a $|SQ| = 4\,\text{cm}$. Četverokut $ABCD$ je trapez kojem su $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ osnovice jer je $AB \parallel CD$.

Površina trapeza iznosi $P = sv$, gdje je $s = \dfrac{a+b}{2}$, a i b su duljine osnovica trapeza.

Tada je $80 = s \cdot 8$, iz čega je $s = \dfrac{a+b}{2} = 10$, pa je $a + b = 20$.

Pravokutni trokuti ΔSMP i ΔSQN imaju hipotenuzu duljine $\frac{s}{2}=5\,\text{cm}$.

Pomoću Pitagorinog poučka izračunamo $|MP|=4\,\text{cm}$ i $|NQ|=3\,\text{cm}$.

Neka su E i F nožišta visina trapeza iz vrhova D i C redom, a Z nožište visine v trokuta ΔABK iz vrha K.

Označimo duljine dužina $\overline{EZ}$ i $\overline{ZF}$ s l i m redom, a duljine dužina $\overline{AE}$ i $\overline{FB}$ s y i x redom.

Po KK poučku o sličnosti pravokutni trokuti ΔSMP i ΔBCF su slični jer je $|\angle PMS|=|\angle CBF|$ (kutovi uz presječnicu paralela).

Iz te sličnosti slijedi $|SP| : |MP| = |CF| : |BF|$ odnosno $3 : 4 = 8 : x$, $x=\frac{32}{3}$.

Na isti način iz sličnosti ΔNQS i ΔAED slijedi $|SQ| : |QN| = |DE| : |AE|$, $4 : 3 = 8 : y$, $y = 6$.

Kako je četverokut $CDEF$ pravokutnik, jer su susjedne stranice okomite, slijedi da je $|EF| = |CD| = b$, pa je
$x + y = a - b$.

Rješavanjem sustava $a-b=\frac{32}{3}+6$, $a + b = 20$, dobije se

$a=\frac{55}{3}$, $b=\frac{5}{3}$.

Trokuti ΔAZK i ΔAED su slični po KK poučku o sličnosti, pa vrijedi omjer
$v : 8 = (6 + l) : 6$, iz čega slijedi $v=8+\frac{4}{3}l$.

Trokuti ΔZBK i ΔFBC su slični po KK poučku o sličnosti, pa vrijedi omjer
$v:8=\left(m+\frac{32}{3}\right):\frac{32}{3}$, iz čega slijedi $v=\frac{3}{4}m+8$.

Budući je $m + l = a - x - y$, vrijedi $m+l=\frac{55}{3}-6-\frac{32}{3}=\frac{5}{3}$.

Rješavanjem sustava $\frac{3}{4}m+8=8+\frac{4}{3}l$, $m+l=\frac{5}{3}$, dobije se

$l=\frac{3}{5}$, $v=\frac{44}{5}$.

Površina trokuta ΔABK iznosi

$$P=\frac{a\cdot v}{2}=\frac{\frac{55}{3}\cdot\frac{44}{5}}{2}=\frac{242}{3}\ \text{cm}^2.$$

5. Dvanaest prijatelja odlučilo je n večeri zaredom izaći na zajedničku večeru. U svakom od tih n izlazaka oni se raspoređuju tako da sjede oko m stolova, za svakim stolom isti broj prijatelja. Postoji li takav raspored sjedenja da svatko od njih ima priliku barem jednom sjediti za istim stolom sa svakim od 11 preostalih prijatelja, ako je:

a) $n = 5$ i $m = 4$?
b) $n = 4$ i $m = 3$?
c) $n = 3$ i $m = 2$?

Rješenje.

Među 12 prijatelja ima $\frac{12 \cdot 11}{2} = 66$ parova prijatelja. Može li svaki od 66 parova barem jednom sjediti za istim stolom?

a) Za svakim od 4 stola sjede 3 prijatelja te se za jednim stolom mogu ostvariti „3 zajednička sjedenja“. Budući da je stolova 4, a različitih večera 5, nije moguće ostvariti više od $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ „zajedničkih sjedenja“ pa tako ni 66.

b) Za svakim od 3 stola sjede 4 prijatelja te se za jednim stolom mogu ostvariti „6 zajedničkih sjedenja“, a na ukupno 3 stola „18 zajedničkih sjedenja“. Na sljedećoj večeri nije moguće ostvariti toliko novih „zajedničkih sjedenja“ – promotrimo 4 osobe koje su na prethodnoj večeri sjedile za istim stolom. Barem dvije od njih moraju i na sljedećoj večeri sjediti za istim stolom, jer je stolova ukupno 3. Kako imamo ukupno 3 stola, imamo i tri para takvih osoba koji će i na sljedećoj večeri morati biti za istim stolom. To znači da na sljedećoj večeri može biti najviše $18 - 3 = 15$ „zajedničkih sjedenja“, tj. za 4 večere to je najviše $18 + 15 + 15 + 15 = 63$ „zajedničkih sjedenja“ pa ne mogu ostvariti 66 „zajedničkih sjedenja“.

c) U ovom slučaju je moguć takav raspored. Označimo prijatelje brojevima od 1 do 12.

1. večera

1. stol: 1, 2, 3, 4, 5, 6; 2. stol: 7, 8, 9, 10, 11, 12.

2. večera

1. stol: 1, 2, 3, 7, 8, 9; 2. stol: 4, 5, 6, 10, 11, 12.

3. večera

1. stol: 1, 2, 3, 10, 11, 12; 2. stol: 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Očito je takav raspored dobar. Naime, prijatelje smo podijelili u 4 grupe(1-3, 4-6, 7-9, 10-12), svaka od grupa je međusobno ostvarila „zajedničko sjedenje“ na svakoj večeri, a svaka od te grupe je bila s onom drugom jednom za istim stolom.