DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

11. svibnja 2021.

Zadatak A-1.1.

Odredi sve trojke (x, y, z) realnih brojeva za koje vrijedi

$$\begin{aligned} x^2 - y &= z^2, \\ y^2 - z &= x^2, \\ z^2 - x &= y^2. \end{aligned}$$

Rješenje.

Zbrojimo li sve tri jednakosti, zaključujemo da je $x + y + z = 0$.

Uvrštavanjem $z = -x - y$ u prvu jednakost dobivamo $x^2 - y = x^2 + 2xy + y^2$, odnosno

$$y(y + 2x + 1) = 0,$$

odakle dobivamo dva slučaja: $y = 0$ ili $y + 2x + 1 = 0$.

Ako je $y = 0$, tada je $z = -x$ te iz zadnje jednakosti vidimo da je $x(x-1) = 0$, što znači da je $x = 0$ ili $x = 1$. Ovime smo dobili rješenja $(0, 0, 0)$ i $(1, 0, -1)$.

Ako je $y = -2x - 1$, to znači da je $z = x + 1$. Uvrštavanjem u drugu jednakost dobivamo da $4x^2 + 4x + 1 - x - 1 = x^2$, odnosno $x(x+1) = 0$. Time dobivamo rješenja $(0, -1, 1)$ te $(-1, 1, 0)$.

Konačno, sva rješenja sustava su: $(0, 0, 0)$, $(1, 0, -1)$, $(0, -1, 1)$ i $(-1, 1, 0)$.

Zadatak A-1.2.

Dokaži da ne postoje prirodni brojevi a i b koji zadovoljavaju jednakost

$$3^a - 2^b = 2021.$$

Rješenje.

Desna strana jednakosti daje ostatak 2 pri dijeljenju s 3 (primijetimo da je $2021 = 2019 + 2 = 3 \cdot 673 + 2$). Broj 3^a je djeljiv brojem 3 za svaki prirodni broj a, stoga broj -2^b mora dati ostatak 2 pri dijeljenju s 3.

Primijetimo da broj -2^b daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3 kada je b neparan te ostatak 2 kada je b paran. Dakle, zaključujemo da je b nužno paran. Neka je $b = 2b_1$ za neki prirodni broj b_1.

Sada je $3^a - 4^{b_1} = 2021$. Promotrimo sada ostatak pri dijeljenju s 4. Broj 2021 daje ostatak 1, dok broj 4^{b_1} daje ostatak 0, pa zaključujemo da broj 3^a mora dati ostatak 1. Slično kao kada smo gledali ostatke pri dijeljenju s 3, zaključujemo da je nužno i a paran, odnosno da postoji broj a_1 takav da je $a = 2a_1$.

Sada je $9^{a_1} - 4^{b_1} = 2021$, odnosno $(3^{a_1})^2 - (2^{b_1})^2 = 2021$, tj.

$$(3^{a_1} - 2^{b_1})(3^{a_1} + 2^{b_1}) = 2021.$$

Uzimajući u obzir da faktorizacija broja 2021 na proste faktore broja glasi $2021 = 43 \cdot 47$ te da je u gornjoj jednakosti prvi faktor manji od drugog, imamo samo dvije mogućnosti: faktori u zadnjoj jednadžbi su redom jednaki 1 i 2021, ili 43 i 47

Iz prve mogućnosti slijedi $3^{a_1} - 2^{b_1} = 1$ i $3^{a_1} + 2^{b_1} = 2021$, odakle zbrajanjem dobivamo da je $2 \cdot 3^{a_1} = 2022$, odnosno $3^{a_1} = 1011$, što je nemoguće.

Iz druge mogućnosti slijedi $3^{a_1} - 2^{b_1} = 43$ i $3^{a_1} + 2^{b_1} = 47$, odakle zbrajanjem dobivamo da je $2 \cdot 3^{a_1} = 90$, odnosno $3^{a_1} = 45$, što je ponovno nemoguće.

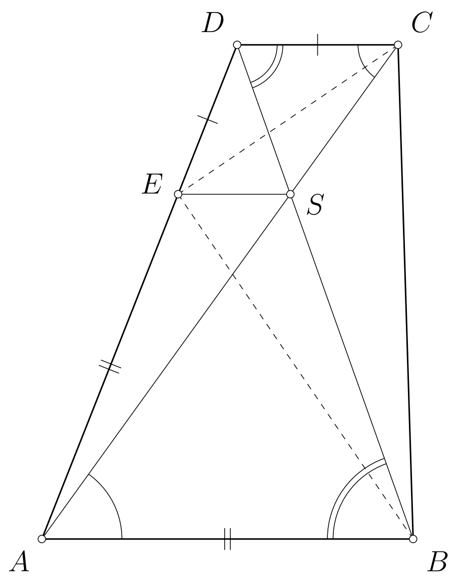
Dakle, ne postoje prirodni brojevi a i b takvi da je $3^a - 2^b = 2021$.

Zadatak A-1.3.

U trapezu $ABCD$ zbroj duljina osnovica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ jednak je duljini kraka $\overline{AD}$. Pravac paralelan osnovicama kroz sjecište dijagonala siječe krak $\overline{AD}$ u točki E. Dokaži da je $\sphericalangle BEC = 90°$.

Rješenje.

Neka je S sjecište dijagonala $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$.



Pravci ES i DC su paralelni pa je prema Talesovom teoremu

$$\frac{|AE|}{|ED|} = \frac{|AS|}{|SC|}.$$

Kako su pravci AB i CD paralelni, zaključujemo da je $\sphericalangle BAS = \sphericalangle SCD$ i $\sphericalangle ABS = \sphericalangle CDS$, iz čega slijedi da su trokuti ABS i CDS slični prema K–K teoremu o sličnosti. Iz toga zaključujemo da je

$$\frac{|AS|}{|SC|} = \frac{|AB|}{|CD|}.$$

Iz prethodne dvije jednakosti imamo

$$\begin{aligned}&\frac{|AE|}{|ED|}=\frac{|AS|}{|SC|}=\frac{|AB|}{|CD|}\\ &\implies \frac{|AD|}{|ED|}=\frac{|AE|}{|ED|}+1=\frac{|AB|}{|CD|}+1=\frac{|AB|+|CD|}{|CD|}=\frac{|AD|}{|CD|},\end{aligned}$$

odakle zaključujemo da je $|ED|=|CD|$. Odavde slijedi da je i $|AE|=|AB|$, tj. trokuti ABE i DEC su jednakokračni. Dakle, vrijedi $\sphericalangle ABE=\sphericalangle AEB$ i $\sphericalangle DEC=\sphericalangle DCE$. Također, vrijedi

$$\sphericalangle EAB=180^\circ-\sphericalangle AEB-\sphericalangle ABE=180^\circ-2\sphericalangle AEB \quad\implies\quad \sphericalangle AEB=90^\circ-\frac{1}{2}\sphericalangle EAB,$$

te slično $\sphericalangle DEC=90^\circ-\dfrac{1}{2}\sphericalangle CDE$.

Kako su osnovice $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ paralelne, imamo $\sphericalangle EAB+\sphericalangle CDE=180^\circ$.

Konačno,

$$\begin{aligned}\sphericalangle BEC&=180^\circ-\sphericalangle AEB-\sphericalangle DEC\\ &=180^\circ-\left(90^\circ-\frac{1}{2}\sphericalangle EAB\right)-\left(90^\circ-\frac{1}{2}\sphericalangle CDE\right)\\ &=\frac{1}{2}(\sphericalangle EAB+\sphericalangle CDE)=90^\circ,\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

Zadatak A-1.4.

Neka su a, b i c realni brojevi koji zadovoljavaju jednakost

$$|a+b|+|a+c|+|b+c|=8.$$

Odredi najveću i najmanju moguću vrijednost izraza

$$a^2+b^2+c^2$$

te odredi kada se ona postiže.

Rješenje.

Prema nejednakosti trokuta vrijedi

$$8=|a+b|+|b+c|+|c+a|=|a+b|+|a+c|+|-(b+c)|\geqslant|a+b+a+c-b-c|=|2a|$$

pa zaključujemo $|a|\leqslant 4$. Analogno dobivamo $|b|\leqslant 4$ i $|c|\leqslant 4$, pa slijedi

$$a^2+b^2+c^2\leqslant 4^2+4^2+4^2=48.$$

Jedan izbor a, b i c za koji se postiže vrijednost 48 je $a=4$, $b=c=-4$, pa je to najveća vrijednost izraza.

Za najmanju vrijednost, prvo primijenimo nejednakost između kvadratne i aritmetičke sredine na izraze $|a+b|$, $|b+c|$ i $|c+a|$:

$$\sqrt{\frac{|a+b|^2+|b+c|^2+|c+a|^2}{3}} \geqslant \frac{|a+b|+|b+c|+|c+a|}{3} = \frac{8}{3}.$$

Na svaki od pribrojnika u brojniku pod korijenom na lijevoj strani možemo primijeniti nejednakost

$$|x+y|^2 = (x+y)^2 \leqslant 2x^2 + 2y^2$$

(koja je ekvivalentna s $(x-y)^2 \geqslant 0$). Time dobivamo

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{4(a^2+b^2+c^2)}{3}} &= \sqrt{\frac{2\left((a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)\right)}{3}} \\
&\geqslant \sqrt{\frac{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2}{3}} \\
&= \sqrt{\frac{|a+b|^2+|b+c|^2+|c+a|^2}{3}} \geqslant \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

Sređivanjem slijedi nejednakost

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant \frac{16}{3}.$$

Jednakost se postiže kada su svi brojevi a, b i c jednaki $\frac{4}{3}$ ili $-\frac{4}{3}$, pa je najmanja vrijednost izraza uistinu jednaka $\frac{16}{3}$.

Dakle, najmanja vrijednost zadanog izraza je $\frac{16}{3}$, a najveća 48.

Zadatak A-1.5.

U nekom jeziku svaka je riječ niz slova a i b. Svaka riječ ima barem jedno i najviše 13 slova, no nisu svi takvi nizovi riječi. Poznato je da nadovezivanjem jedne riječi na drugu nikad ne dobivamo riječ. Odredi najveći mogući broj riječi u tom jeziku.

Rješenje.

Primijetimo da za svaki $k = 1, 2, \ldots, 13$ vrijedi da je ukupan broj nizova slova a i b duljine k jednak 2^k (za svaku poziciju u riječi biramo jedno od dva slova), pa je stoga ukupan broj nizova duljine između jednog i 13 slova jednak $2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{13} = 2^{14} - 1$.

Pogledajmo jezik u kojem su riječi svi nizovi slova duljine 7 ili više. Očito je uvjet iz zadatka zadovoljen: nadovezivanjem dviju takvih riječi dobivamo niz znakova dulji od 13, pa se sigurno ne nalazi u jeziku. Ukupan broj takvih riječi je $2^7 + 2^8 + \cdots + 2^{13} = 2^{14} - 2^7$.

Dokažimo da je to najveći broj riječi koji se može naći u jeziku. Jezik s najviše riječi u kojem se ne nalazi nijedna riječ duljine manje od 7 je opisan gore. Promotrimo sada bilo koji jezik u kojem se nalazi barem jedna riječ duljine manje od 7 i nazovimo ju X. Za proizvoljan niz Y znakova duljine 7, neka je $X+Y$ niz znakova nastao nadovezivanjem riječi X i niza Y. Duljina tog niza je manja od 13.

Za sve moguće nizove znakova Y duljine 7, promotrimo skupove oblika $\{Y, X+Y\}$. Kako se riječ X nalazi u jeziku, barem jedan od nizova znakova Y i $X+Y$ nije riječ. Kako takvih dvočlanih skupova ima 2^7 (kao i nizova znakova od 7 slova), barem toliko nizova znakova nije riječ. Zaključujemo da taj jezik može imati najviše $(2^{14} - 1) - 2^7$ riječi.

Dakle, ako se u jeziku ne nalazi nijedna riječ duljine manje od 7, može imati najviše $2^{14} - 2^7$ riječi, a ako se u jeziku nalazi barem jedna riječ duljine manje od ili jednake 7, može imati samo manje riječi. Time zaključujemo da je najveći broj riječi u jeziku $2^{14} - 2^7 = 16256$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

11. svibnja 2021.

Zadatak A-2.1.

Odredi sve parove (x, y) realnih brojeva za koje vrijedi

$$x + \frac{1}{y-x} = 1 \qquad \text{i} \qquad y + \frac{1}{x-y} = 2.$$

Rješenje.

Oduzimanjem zadanih jednakosti dobivamo

$$y - x - \frac{2}{y-x} = 1.$$

Neka je $t = y - x$. Iz prethodne jednakosti slijedi

$$\begin{aligned} t - \frac{2}{t} &= 1, \\ t^2 - t - 2 &= 0, \end{aligned}$$

iz čega rješavanjem kvadratne jednadžbe dobivamo da je $t = 2$ ili $t = -1$.

U prvom slučaju iz prve jednadžbe dobivamo $x = 1 - \frac{1}{t} = \frac{1}{2}$, a iz druge jednadžbe slijedi $y = 2 + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$.

U drugom slučaju slično dobivamo $x = 2$ i $y = 1$.

Dakle, sva rješenja sustava su $(2, 1)$ i $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

Zadatak A-2.2.

Neka je (a, b, c) trojka prirodnih brojeva za koje vrijedi $a^2 + b^2 = c^2$.

Dokaži da broj $\left(\frac{c}{a} + \frac{c}{b}\right)^2$ nije prirodan te da je veći od 8.

Rješenje.

Neka je bez smanjenja općenitosti najveći zajednički djelitelj brojeva a, b i c jednak 1. Ukoliko postoji neki djelitelj veći od 1, dijeleći brojeve a, b i c tim djeliteljem izraz

$$x := \left(\frac{c}{a} + \frac{c}{b}\right)^2 = \frac{c^2(a+b)^2}{a^2b^2}$$

ne mijenja svoju vrijednost.

Neka je $d = D(a, b)$. Pretpostavimo da je d veći od 1 i da je p neki njegov prost djelitelj. Tada iz jednakosti $a^2 + b^2 = c^2$ slijedi da p dijeli lijevu stranu, pa mora i desnu. Dakle, p dijeli c^2 pa mora dijeliti i c, čime dobivamo kontradikciju s pretpostavkom da su a, b i c relativno prosti. Dakle, vrijedi $D(a, b) = 1$.

Nadalje, primijetimo da je nemoguće da su oba broja a i b jednaka 1 jer tada jednadžba $c^2 = a^2 + b^2 = 2$ nema rješenja u skupu prirodnih brojeva.

Kako je $ab > 1$, postoji neki prost broj p koji dijeli ab. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da p dijeli a. Pretpostavimo li da je x prirodan broj, zaključujemo da p dijeli broj $c^2(a + b)^2$. Kako su brojevi a i b relativno prosti te p dijeli a, vidimo da p ne dijeli $a + b$ (jer p ne dijeli b), što znači da p ne dijeli niti $(a + b)^2$. Dakle, p mora dijeliti $c^2 = a^2 + b^2$. Budući da p dijeli a, zaključujemo da p dijeli b^2, odnosno da p dijeli b, što je kontradikcija. Dakle, x uistinu nije prirodan broj.

Dokažimo sada da je veći od 8. Primijetimo da je $x = \dfrac{(a^2 + b^2)(a + b)^2}{a^2b^2}$. Iskoristimo li nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine na obje zagrade u brojniku, zaključujemo

$$a^2 + b^2 \geqslant 2\sqrt{a^2b^2} = 2ab \qquad \text{i} \qquad (a + b)^2 \geqslant (2\sqrt{ab})^2 = 4ab.$$

Konačno je

$$x \geqslant \frac{2ab \cdot 4ab}{a^2b^2} = 8,$$

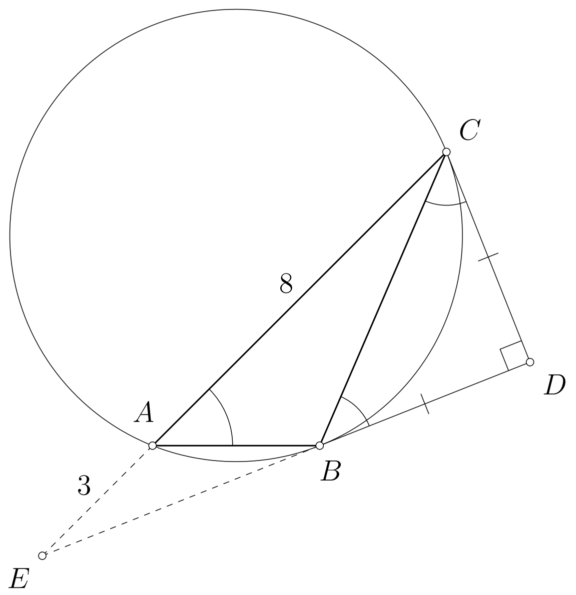
a budući da x nije prirodan broj, zaključujemo da je $x > 8$.

Zadatak A-2.3.

Neka je ABC trokut takav da je $|AB| < |BC|$ i $\sphericalangle BAC = 45°$. Tangente na kružnicu opisanu tom trokutu u točkama B i C sijeku se u točki D. Pravci AC i BD se sijeku u točki E te vrijedi $|EA| = 3$ i $|AC| = 8$. Odredi površinu trokuta CDE.

Rješenje.

Kako je kut između tangente i tetive jednak obodnom kutu nad tom tetivom, zaključujemo da su kutovi $\sphericalangle DBC$ i $\sphericalangle DCB$ jednaki kutu $\sphericalangle BAC$, tj. mjera im iznosi 45°, pa je CDB jednakokračan pravokutni trokut.



Zbog potencije točke E u odnosu na kružnicu opisanu trokutu ABC slijedi

$$|EB|^2 = |EA| \cdot |EC| = 33.$$

Označimo $x \coloneqq |CD|$. Iz Pitagorinog teorema primijenjenog na trokut CDE slijedi

$$\begin{aligned} |CE|^2 &= |CD|^2 + |DE|^2, \\ 11^2 &= x^2 + \left(x + \sqrt{33}\right)^2, \\ 0 &= x^2 + x\sqrt{33} - 44, \\ x &= \frac{-\sqrt{33} \pm \sqrt{209}}{2}. \end{aligned}$$

Jedino pozitivno rješenje je $x = \dfrac{\sqrt{209} - \sqrt{33}}{2}$. Zato je površina trokuta CDE jednaka

$$\frac{1}{2}|CD| \cdot |DE| = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{209} - \sqrt{33}}{2} \cdot \frac{\sqrt{209} + \sqrt{33}}{2} = \frac{1}{8}(209 - 33) = 22.$$

Napomena: Zadatak se može riješiti i bez računanja vrijednosti $x = |CD|$. Iz kvadratne jednadžbe $x^2 + x\sqrt{33} - 44 = 0$ imamo

$$44 = x^2 + x\sqrt{33} = x(x + \sqrt{33}) = |CD| \cdot |DE|,$$

pa je površina trokuta CDE jednaka

$$\frac{1}{2}|CD| \cdot |DE| = \frac{44}{2} = 22.$$

Zadatak A-2.4.

Odredi sve trojke prirodnih brojeva (a, b, c) za koje vrijedi

$$2^a \cdot 5^b - 1 = 11 \cdot 3^c.$$

Rješenje.

Pogledajmo ostatke koje izrazi na lijevoj i desnoj strani zadane jednakosti daju pri dijeljenju s 5. Prvi pribrojnik na lijevoj strani je djeljiv s 5 pa lijeva strana daje ostatak 4 pri dijeljenju s 5. S druge stane, broj 11 daje ostatak 1 pri dijeljenju s 5. Konačno, izraz 3^c, ovisno o vrijednosti broja c, daje ostatke $3, 4, 2, 1$, koji se potom ciklički ponavljaju s periodom 4. Zaključujemo da, kako bi i desna strana davala ostatak 4 pri dijeljenju s 5, broj c mora biti oblika $4c_1 + 2$, za neki nenegativan cijeli broj c_1. Posebno, c je paran broj.

Pogledajmo sada ostatke koje isti izrazi daju pri dijeljenju s 8. Budući da je c paran broj, broj $11 \cdot 3^c = 11 \cdot 9^{2c_1+1}$ daje ostatak 3 pri dijeljenju s 8. Zato broj $2^a \cdot 5^b = 1 + 11 \cdot 3^c$ mora davati ostatak 4 pri dijeljenju s 8. To je moguće samo ako je $a = 2$ (ako je $a = 1$, lijeva strana daje ostatak 2, ako je $a \geqslant 3$, lijeva strana je ostatak djeljiva s 8).

Konačno, pogledajmo ostatke koje ti izrazi daju pri dijeljenju s 3. Desna strana je djeljiva s 3, pa broj $2^a \cdot 5^b = 4 \cdot 5^b$ mora davati ostatak 1. Kako 5^b daje periodički ostatke 2 i 1, zaključujemo da je b paran, odnosno $b = 2b_1$, za neki prirodan broj b_1.

Lijevu stranu sada možemo faktorizirati koristeći razliku kvadrata:

$$(2 \cdot 5^{b_1} - 1)(2 \cdot 5^{b_1} + 1) = 11 \cdot 3^c.$$

Na lijevoj strani jednadžbe imamo umnožak dva uzastopna neparna broja, te su zato relativno prosti. Nijedan faktor ne može biti jednak 1, budući da iznose barem $2 \cdot 5^1 - 1 = 9$. Stoga je jedan faktor jednak 11, a drugi 3^c.

U prvom slučaju imamo $2 \cdot 5^{b_1} - 1 = 11$ što nema rješenja.

U drugom slučaju imamo $2 \cdot 5^{b_1} + 1 = 11$, odakle je $b_1 = 1$, odnosno $b = 2$. Tada je i $2 \cdot 5^{b_1} - 1 = 9 = 3^c$, odnosno $c = 2$.

Dakle, jedino rješenje jednadžbe je $(a, b, c) = (2, 2, 2)$.

Zadatak A-2.5.

Teta u vrtiću nadgleda igru n djece koja sjede raspoređena ukrug. Svako dijete ima određeni broj bombona. Igra se sastoji od niza ovakvih *koraka*:

Svakom djetetu koje ima neparan broj bombona teta daje po još jedan bombon te svako dijete podijeli svoje bombone na dvije jednake hrpe. Zatim, u istom trenutku, svako dijete daje polovinu svojih bombona djetetu koje sjedi neposredno desno od njega.

Dokaži da će nakon konačno mnogo koraka sva djeca imati jednak broj bombona.

Rješenje.

Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji raspored bombona za koji sva djeca nikad neće imati jednako mnogo bombona, te da će zato ova igra trajati proizvoljno mnogo koraka.

Nazovimo prvi dio koraka (dodjela jednog bombona djeci s neparno mnogo bombona) *priprema*, a drugi dio koraka (raspodjela polovine bombona desnim susjedima) *distribucija*.

Označimo s $2x_1, 2x_2, \ldots, 2x_n$ količine bombona djece redom u krugu nakon prve izvršene pripreme, a prije nego se izvršila prva distribucija. Neka je $2x_{\max}$ najveća količina bombona među tim vrijednostima.

Lako je vidjeti da nakon jedne izvršene distribucije nijedno dijete nema više od $2x_{\max}$ bombona budući da svako dijete nakon distribucije ima $x_i + x_j$ bombona (za neke indekse $i, j \in \{1, \ldots, n\}$), a oba broja x_i, x_j su manja od ili jednaka $x_{\max}$. Također, ni nakon pripreme koja uslijedi nakon te distribucije nijedno dijete neće imati više od $2x_{\max}$ bombona: ako je nakon distribucije imalo parno mnogo bombona, nakon pripreme neće imati više, a ako je nakon distribucije imalo neparno mnogo bombona, taj broj je strogo manji od $2x_{\max}$ (jer je neparan), pa ni uvećan za 1 neće biti veći od te vrijednosti.

Ponavljajući ovaj argument, vidimo da najveća količina bombona koja se može naći kod nekog djeteta u svakom trenutku sigurno nije veća od $2x_{\max}$.

Sada možemo zaključiti da postoji trenutak nakon kojeg se u pripremama više nikad ne dodijeli ijedan bombon. U suprotnom ukupna količina bombona među djecom bi neograničeno rasla i postojao bi trenutak u kojem bi neko dijete imalo više od $2x_{\max}$ bombona, što nije moguće.

Promotrimo prvi trenutak nakon kojeg se ni u jednoj pripremi više ne dijele bomboni. To znači da su u svakom sljedećem koraku sve količine bombona kod djece parni brojevi. Neka su $2y_1, \ldots, 2y_n$ količine bombona djece redom u krugu u bilo kojem takvom koraku. Neka je K suma kvadrata količine bombona kod svakog djeteta:

$$K = (2y_1)^2 + (2y_2)^2 + \cdots + (2y_n)^2.$$

Očito je K nenegativan cijeli broj. Također, kako je kod svakog djeteta najviše $2x_{\max}$ bombona, vrijedi $K \leqslant n \cdot (2x_{\max})^2$. Dakle, K je cijeli broj koji može poprimiti konačno mnogo vrijednosti.

Pogledajmo kako se vrijednost K mijenja nakon jednog koraka. Kako se u pripremi više ništa ne dogodi, količine bombona kod djece redom u krugu nakon distribucije su $y_n + y_1, y_1 + y_2, \ldots, y_{n-2} + y_{n-1}, y_{n-1} + y_n$. Razlika suma kvadrata vrijednosti prije i poslije tog koraka je

$$\begin{aligned}
&(2y_1)^2 + (2y_2)^2 + \cdots + (2y_n)^2 - \left[(y_n + y_1)^2 + (y_1 + y_2)^2 + \cdots + (y_{n-1} + y_n)^2\right] \\
&\quad = 2\left(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2\right) - 2\left(y_n y_1 + y_1 y_2 \cdots + y_{n-1} y_n\right) \\
&\quad = (y_n - y_1)^2 + (y_1 - y_2)^2 + \cdots + (y_{n-1} - y_n)^2.
\end{aligned}$$

Dakle, gornja razlika je nenegativan cijeli broj. Ona je jednaka nuli samo u slučaju kada su svi brojevi $y_1, \ldots, y_n$ jednaki, što znači da su sve količine bombona jednake, što je u kontradikciji s pretpostavkom. Dakle, ta razlika je prirodan broj. No, tada zaključujemo da se svakim korakom suma kvadrata količine bombona smanji za neki prirodan broj. Kako suma kvadrata količine bombona može postići samo konačno mnogo vrijednosti, to se može ponavljati samo konačno mnogo puta.

Time smo dobili kontradikciju s pretpostavkom na početku rješenja pa postoji trenutak u kojem će sva djeca imati jednak broj bombona.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

11. svibnja 2021.

Zadatak A-3.1.

Odredi sve prirodne brojeve n među čijim djeliteljima postoje djelitelji a i b takvi da je

$$a + b = n - 1.$$

Prvo rješenje.

Kako su tri najmanja djelitelja koje n može imati 1, 2 i 3, tako su tri najveća moguća djelitelja broja n redom $\frac{n}{1}$, $\frac{n}{2}$ i $\frac{n}{3}$.

Jasno je da niti a, niti b ne mogu biti jednaki n. Također, ne mogu oba biti jednaka $\frac{n}{2}$, jer bi tada $a + b$ bilo veće od $n - 1$.

Prema tome, imamo

$$n - 1 = a + b \leqslant \frac{n}{3} + \frac{n}{2} = \frac{5}{6}n,$$

odakle slijedi $n \leqslant 6$.

Nadalje, budući da je lijeva strana zadane jednadžbe veća od ili jednaka 2, vidimo da je $n \geqslant 3$.

Za $n = 3$ možemo uzeti $a = b = 1$ pa imamo $1 + 1 = 2 = 3 - 1$ pa je $n = 3$ jedno rješenje.

Za $n = 4$ možemo uzeti $a = 1$, $b = 2$ pa vrijedi $1 + 2 = 3 = 4 - 1$.

Za $n = 5$ uočimo da su njegovi jedini djelitelji brojevi 1 i 5. Niti a, niti b ne mogu biti jednaki 5, a za $a = b = 1$ imamo $1 + 1 = 2 \neq 5 - 1$.

Za $n = 6$ možemo uzeti $a = 2$, $b = 3$ i imamo $2 + 3 = 5 = 6 - 1$.

Prema tome, rješenja su $n = 3, 4, 6$.

Drugo rješenje.

Neka je d najveći zajednički djelitelj brojeva a i b. Tada d dijeli i n. S druge strane, zbog zadane jednadžbe slijedi da d dijeli i $a + b$, odnosno $n - 1$. Dakle, d dijeli $n - 1$ i n. Kako su uzastopni prirodni brojevi relativno prosti, nužno je $d = 1$. Prema tome, a i b su relativno prosti.

Broj n sada možemo zapisati kao $n = abk$ za neki $k \in \mathbb{N}$. Posebno vrijedi $a+b = abk-1 \geqslant ab-1$. Odavde imamo

$$ab - a - b + 1 \leqslant 1 + 1, \qquad \text{tj.} \quad (a - 1)(b - 1) \leqslant 2.$$

Kako su $a - 1$ i $b - 1$ nenegativni brojevi, razlikujemo tri mogućnosti: ili je neki od brojeva a i b jednak 1, ili su oba jednaka 2, ili je jedan jednak 2, a drugi jednak 3.

U prvom slučaju bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $a = 1$. Tada iz početne jednakosti imamo $1 + b = bk - 1$, odnosno $b(k - 1) = 2$. Slijedi $b = 1$, $k = 3$, $n = 3$ ili $b = 2$, $k = 2$, $n = 4$. Provjerom vidimo da su to zaista rješenja početne jednakosti.

U drugom slučaju vrijedi $a = b = 2$. Tada slijedi $n - 1 = 2 + 2 = 4$, odnosno $n = 5$. Budući da 2 nije djelitelj broja 5, u ovom slučaju ne dobivamo rješenje.

U trećem slučaju bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $a = 2$ i $b = 3$. Tada slijedi $n - 1 = 2 + 3$, odnosno $n = 6$. Kako su 2 i 3 djelitelji broja 6, ovo je također rješenje.

Prema tome, rješenja su $n = 3, 4, 6$.

Zadatak A-3.2.

Neka je $\alpha = \dfrac{2\pi}{2021}$. Izračunaj

$$\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \ldots \cdot \cos 1010\alpha.$$

Rješenje.

Označimo zadani izraz s P.

Općenito znamo da vrijedi $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$, odakle je $\cos\varphi = \dfrac{\sin 2\varphi}{2\sin\varphi}$. Zato P možemo zapisati u sljedećem obliku:

$$\begin{aligned}
P &= \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \ldots \cdot \cos 1010\alpha \\
&= \frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha} \cdot \frac{\sin 4\alpha}{2\sin 2\alpha} \cdot \ldots \cdot \frac{\sin 2020\alpha}{2\sin 1010\alpha} \\
&= 2^{-1010} \cdot \frac{\sin 2\alpha \cdot \sin 4\alpha \cdot \ldots \cdot \sin 2020\alpha}{\sin\alpha \cdot \sin 2\alpha \cdot \ldots \cdot \sin 1010\alpha}.
\end{aligned}$$

Primijetimo da su u gornjim jednakostima svi izrazi dobro definirani: član $\sin(k\alpha)$ jednak je nuli tek kada je k višekratnik broja 2021.

Kraćenjem prvih 505 faktora u brojniku s odgovarajućim faktorima u nazivniku dobivamo

$$\begin{aligned}
P &= 2^{-1010} \cdot \frac{\sin 1012\alpha \cdot \sin 1014\alpha \cdot \ldots \cdot \sin 2020\alpha}{\sin\alpha \cdot \sin 3\alpha \cdot \ldots \cdot \sin 1009\alpha} \\
&= 2^{-1010} \cdot \frac{\sin 2020\alpha \cdot \sin 2018\alpha \cdot \ldots \cdot \sin 1012\alpha}{\sin\alpha \cdot \sin 3\alpha \cdot \ldots \cdot \sin 1009\alpha},
\end{aligned}$$

Budući da za $k = 506, 507, \ldots, 1010$ vrijedi

$$\sin(2k\alpha) = \sin\left(\frac{4k\pi}{2021}\right) = -\sin\left(2\pi - \frac{4k\pi}{2021}\right) = -\sin\left(2\pi\frac{2021 - 2k}{2021}\right) = -\sin\left((2021 - 2k)\alpha\right),$$

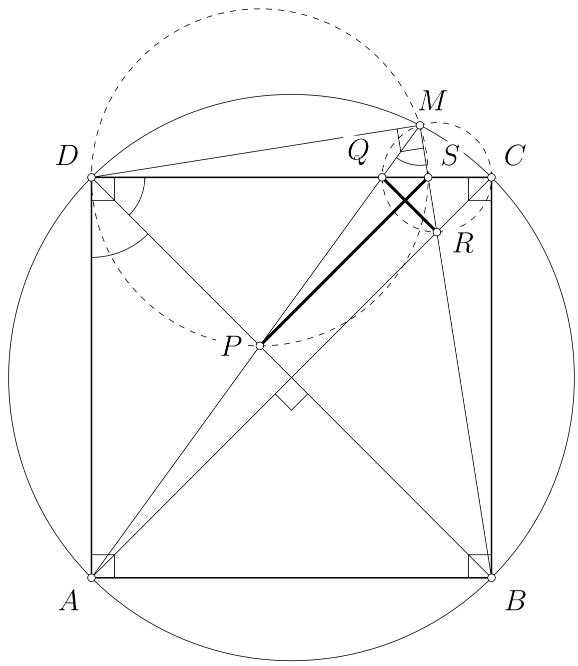
konačno dobivamo

$$\begin{aligned}
P &= 2^{-1010} \cdot \frac{\sin 2020\alpha \cdot \sin 2018\alpha \cdot \ldots \cdot \sin 1012\alpha}{\sin\alpha \cdot \sin 3\alpha \cdot \ldots \cdot \sin 1009\alpha} \\
&= 2^{-1010} \cdot \frac{(-1) \cdot \sin\alpha \cdot (-1) \cdot \sin 3\alpha \cdot \ldots \cdot (-1) \cdot \sin 1009\alpha}{\sin\alpha \cdot \sin 3\alpha \cdot \ldots \cdot \sin 1009\alpha} \\
&= 2^{-1010} \cdot (-1)^{505} \\
&= -2^{1010}.
\end{aligned}$$

Zadatak A-3.3.

Na kraćem luku $\widehat{CD}$ kružnice opisane kvadratu $ABCD$ nalazi se točka M. Neka su P i Q redom sjecišta pravca AM s $\overline{BD}$ i $\overline{CD}$ te neka su R i S redom sjecišta pravca BM s $\overline{AC}$ i $\overline{CD}$. Dokaži da su dužine $\overline{PS}$ i $\overline{QR}$ međusobno okomite.

Rješenje.



Budući da dijagonale kvadrata raspolavljaju kutove pri njegovim vrhovima te je četverokut $ABMD$ tetivan, imamo

$$\sphericalangle PMS = \sphericalangle AMB = \sphericalangle ADB = 45^\circ = \sphericalangle BDC = \sphericalangle PDS.$$

Odavde slijedi da je četverokut $PSMD$ tetivan. Zbog toga i činjenice da točka M leži na kružnici opisanoj kvadratu $ABCD$, slijedi

$$\sphericalangle DPS = 180^\circ - \sphericalangle DMS = 180^\circ - \sphericalangle DMB = \sphericalangle DAB = 90^\circ.$$

Kako se dijagonale kvadrata sijeku pod pravim kutom, oba su pravca PS i AC okomita na dijagonalu $\overline{BD}$ pa su ti pravci paralelni.

Analogno možemo dokazati da je četverokut $QRCM$ tetivan te da vrijedi da je $\sphericalangle QRC = 90^\circ$. Odavde vidimo da je pravac QR okomit na pravac AC koji je paralelan s pravcem PS. Dakle, dužine $\overline{PS}$ i $\overline{QR}$ međusobno su okomite, što je i trebalo dokazati.

Zadatak A-3.4.

Zapisan je niz od n realnih brojeva među kojima je barem jedan pozitivan. Od članova tog niza označeni su

(a) svi pozitivni brojevi te

(b) svi brojevi kojima započinje neki niz uzastopnih članova tog niza pozitivnog zbroja.

Dokaži da je zbroj svih označenih brojeva pozitivan.

Rješenje.

Tvrdnju zadatka dokazat ćemo matematičkom indukcijom po n. Tvrdnja očito vrijedi za $n = 1$.

Pretpostavimo da za neki n vrijedi da svaki niz od najviše n realnih brojeva zadovoljava uvjete zadatka. Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n + 1$.

Neka su $x_1, \ldots, x_{n+1}$ ti brojevi u nizu. Neka je x_i prvi označeni broj, te neka je x_j broj u nizu s najmanjim indeksom većim od ili jednakim i takav da je suma

$$x_i + x_{i+1} + \cdots + x_{j-1} + x_j$$

pozitivna.

Dokažimo da su svi brojevi $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j$ označeni. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji neki broj x_k, $i \leqslant k \leqslant j$, koji nije označen. Očito $k \neq i$ budući da smo x_i odabrali kao prvi označeni broj.

Ako broj x_k nije označen, slijedi da suma svakog niza uzastopnih članova počevši s tim brojem nije pozitivna. Posebno, vrijedi

$$x_k + x_{k+1} + \cdots + x_{j-1} + x_j \leqslant 0,$$

pa je zato suma

$$x_i + x_{i+1} + \cdots + x_{k-1} = (x_i + x_{i+1} + \cdots + x_{j-1} + x_j) - (x_k + x_{k+1} + \cdots + x_{j-1} + x_j)$$

pozitivna. Tu dobivamo kontradikciju s odabirom broja x_j.

Dakle, u nizu brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_j$ brojevi $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j$ su jedini označeni te je njihova suma pozitivna. Ako među svih $n+1$ brojeva u nizu više nema označenih brojeva, dokaz je završen. Ako postoji još označenih brojeva, tada se u nizu $x_{j+1}, x_{j+2}, \ldots, x_{n+1}$ nalazi najviše n realnih brojeva pa po pretpostavci indukcije vrijedi da je suma označenih brojeva u tom nizu pozitivna. Zato je i suma svih označenih brojeva u nizu $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ pozitivna, čime je dokazan korak indukcije, a time i tvrdnja zadatka.

Zadatak A-3.5.

U raznostraničnom trokutu ABC duljine dviju visina jednake su duljinama dviju težišnica. Koliki je omjer duljina preostale visine i preostale težišnice?

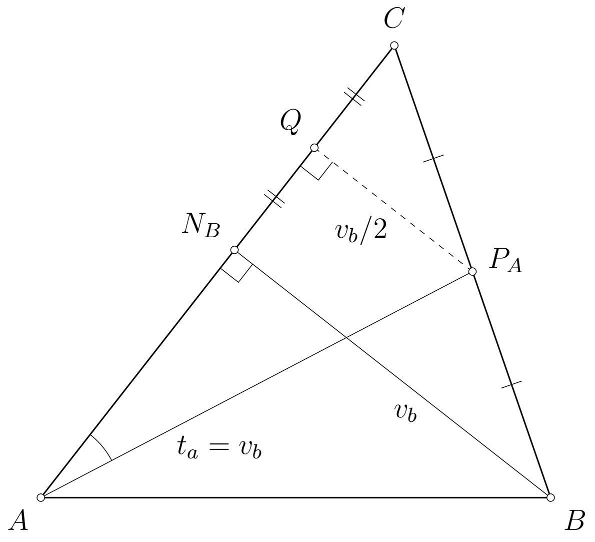
Rješenje.

Neka su a, b i c redom duljine stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$. Označimo s v_a, v_b i v_c duljine visina iz vrhova A, B i C, te s t_a, t_b i t_c duljine težišnica iz vrhova A, B i C, tim redom. Nadalje, označimo s P_A, P_B i P_C polovišta dužina $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$, te neka su N_A, N_B i N_C nožišta visina iz vrhova A, B i C, tim redom.

Kako je visina najkraća spojnica vrha trokuta s točkama nasuprotne stranice, vrijedi da je duljina visine manja od ili jednaka duljini težišnice iz istog vrha, pri čemu jednakost vrijedi samo ako je trokut jednakokračan. Zato se duljina visine i težišnice iz istog vrha zbog pretpostavke zadatka ne mogu podudarati. Neka bez smanjenja općenitosti vrijedi $t_a = v_b$. Tada ne može vrijediti $t_b = v_a$ jer bismo u suprotnom imali

$$t_a + t_b = v_b + v_a < t_b + t_a.$$

Neka je zato bez smanjenja općenitosti $t_b = v_c$.



Neka je Q polovište dužine $\overline{N_BC}$. Tada je $\overline{QP_A}$ srednjica pravokutnog trokuta BN_BC pa je okomita na dužinu $\overline{AC}$. Vrijedi

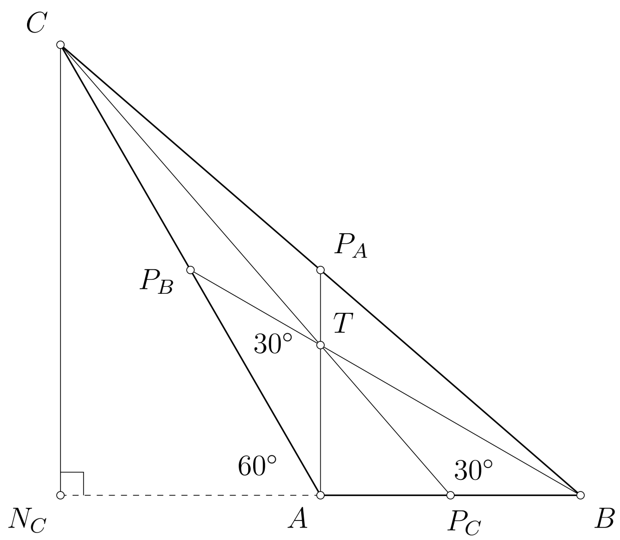
$$|P_AQ| = \frac{1}{2}|BN_B| = \frac{1}{2}v_b = \frac{1}{2}t_a = \frac{1}{2}|P_AA|.$$

Trokut P_AQA je pravokutan trokut u kojemu je jedna kateta dvostruko kraća od hipotenuze, pa je zato $\sphericalangle CAP_A = 30°$. Analogno se pokaže da je $\sphericalangle P_BBA = 30°$.

Neka je T težište trokuta ABC. U trokutima BP_BA i AP_BT vrijedi $\sphericalangle P_BBA = \sphericalangle P_BAT$, te im je kut pri vrhu P_B zajednički, pa su zato slični prema K–K teoremu o sličnosti. Odavde slijedi

$$\frac{|BP_B|}{|AP_B|} = \frac{|P_BA|}{|P_BT|} \implies \frac{t_b}{b/2} = \frac{b/2}{t_b/3} \implies t_b = \frac{\sqrt{3}}{2}b.$$

Budući da je $t_b = v_c$, iz pravokutnog trokuta CN_CA zaključujemo da je $\sphericalangle CAN_C = 60°$. Ovisno o tome nalazi li se N_C na stranici $\overline{AB}$ ili ne, imamo da je $\sphericalangle CAB = 60°$ ili $\sphericalangle CAB = 120°$. Budući da prvi slučaj povlači da je težišnica iz vrha A ujedno i simetrala tog kuta (što je u kontradikciji s pretpostavkom da je trokut raznostraničan), zaključujemo da je nužno $\sphericalangle CAB = 120°$.



U trokutu BAP_B imamo

$$\sphericalangle BP_BA = 180^\circ - \sphericalangle BAP_B - \sphericalangle ABP_B = 180^\circ - 120^\circ - 30^\circ = 30^\circ = \sphericalangle ABP_B,$$

pa je taj trokut jednakokračan i imamo $c = |AB| = |AP_B| = \frac{b}{2}$, tj. $b = 2c$. Iz kosinusovog poučka primijenjenog na ABC sada slijedi

$$a = \sqrt{4c^2 + c^2 - 4c^2 \cos 120^\circ} = c\sqrt{7},$$

a iz kosinusovog poučka primijenjenog na AP_CC dobivamo

$$t_c = \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + 4c^2 - 2c^2 \cos 120^\circ} = \frac{c\sqrt{21}}{2}.$$

Površina trokuta ABC iznosi

$$P = \frac{1}{2}c \cdot v_c = \frac{1}{2}c \cdot t_b = \frac{1}{2}c \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}b = \frac{c^2\sqrt{3}}{2},$$

pa je zato duljina visine iz vrha A jednaka $v_a = \dfrac{2P}{a} = c\sqrt{\dfrac{3}{7}}$. Konačno,

$$\frac{v_a}{t_c} = \frac{\sqrt{\frac{3}{7}}}{\frac{\sqrt{21}}{2}} = \frac{2}{7}.$$

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

11. svibnja 2021.

Zadatak A-4.1.

Neka je (x_n) niz takav da je $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, sa svojstvom da je niz (y_n) zadan relacijom

$$y_n = \binom{n}{0} x_0 + \binom{n}{1} x_1 + \cdots + \binom{n}{n} x_n, \quad \text{za } n \in \mathbb{N}_0$$

geometrijski niz. Odredi x_{2020}.

Rješenje.

Uvrštavanjem u zadanu jednakost dobivamo $y_0 = 1$, te $y_1 = 1 + 2 = 3$. Budući da je (y_n) geometrijski niz, zaključujemo da vrijedi $y_n = 3^n$ za sve $n \in \mathbb{N}_0$.

Matematičkom indukcijom dokazat ćemo da vrijedi $x_n = 2^n$ za sve $n \in \mathbb{N}_0$.

Za $n = 0$ i $n = 1$ vrijedi $x_0 = 1 = 2^0$ i $x_1 = 2 = 2^1$, pa je baza indukcije zadovoljena.

Pretpostavimo da za sve $k \leqslant n$ vrijedi $x_k = 2^k$. Dokažimo da vrijedi i $x_{n+1} = 2^{n+1}$. Prema pretpostavci indukcije vrijedi

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= \binom{n+1}{0} x_0 + \binom{n+1}{1} x_1 + \cdots + \binom{n+1}{n} x_n + \binom{n+1}{n+1} x_{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} 2^0 + \binom{n+1}{1} 2^1 + \cdots + \binom{n+1}{n} 2^n + \binom{n+1}{n+1} x_{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} 2^0 + \binom{n+1}{1} 2^1 + \cdots + \binom{n+1}{n} 2^n + \binom{n+1}{n+1} 2^{n+1} \\
&\qquad - \binom{n+1}{n+1} \left(2^{n+1} - x_{n+1}\right) \\
&= (1+2)^{n+1} - 2^{n+1} + x_{n+1} \\
&= 3^{n+1} - 2^{n+1} + x_{n+1},
\end{aligned}$$

gdje predzadnja jednakost vrijedi prema binomnom teoremu. Kako je $y_{n+1} = 3^{n+1}$, slijedi $x_{n+1} = 2^{n+1}$, čime je korak indukcije dokazan.

Zato za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi $x_n = 2^n$, pa posebno imamo $x_{2020} = 2^{2020}$.

Zadatak A-4.2.

Neka je $n \geqslant 2$ prirodan broj te neka je $(p_1, \ldots, p_n)$ neka permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$. Pokaži da vrijedi

$$\frac{1}{p_1 + p_2} + \frac{1}{p_2 + p_3} + \cdots + \frac{1}{p_k + p_{k+1}} + \cdots + \frac{1}{p_{n-1} + p_n} > \frac{n-1}{n+2}.$$

Rješenje.

Primjenom nejednakosti između aritmetičke i harmonijske sredine na brojeve $p_1 + p_2, p_2 + p_3, \ldots, p_{n-1} + p_n$, imamo

$$\frac{(p_1 + p_2) + \cdots + (p_{n-1} + p_n)}{n-1} \geqslant \frac{n-1}{\dfrac{1}{p_1 + p_2} + \cdots + \dfrac{1}{p_{n-1} + p_n}}.$$

Sređivanjem slijedi

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{p_i + p_{i+1}} \geqslant \frac{(n-1)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n-1}(p_i + p_{i+1})}.$$

Primijetimo da vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n-1}(p_i + p_{i+1}) = p_1 + 2p_2 + \cdots 2p_{n-1} + p_n = 2\sum_{i=1}^{n} i - p_1 - p_n = n(n+1) - p_1 - p_n.$$

Kako su p_1, p_n različiti brojevi iz skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$, imamo

$$n(n+1) - p_1 - p_n \leqslant n(n+1) - 1 - 2 = n^2 + n - 3.$$

Slijedi

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{p_i + p_{i+1}} \geqslant \frac{(n-1)^2}{n^2 + n - 3}.$$

S druge strane imamo

$$\frac{(n-1)^2}{n^2+n-3} = \frac{n-1}{n+2} \cdot \frac{(n-1)(n+2)}{n^2+n-3} = \frac{n-1}{n+2} \cdot \frac{n^2+n-2}{n^2+n-3} > \frac{n-1}{n+2},$$

čime je tvrdnja zadatka dokazana.

Zadatak A-4.3.

Odredi sve trojke prirodnih brojeva (a, b, c) za koje vrijedi

$$2^a + 2021 = 3^b \cdot 25^c.$$

Rješenje.

Pogledajmo ostatke koje izrazi na lijevoj i desnoj strani zadane jednakosti daju pri dijeljenju s 3. Desna strana je djeljiva s 3, broj 2021 daje ostatak 2 pri dijeljenju s 3, pa broj 2^a mora davati ostatak 1. Gledajući ostatke koje 2^a redom daje pri dijeljenju s 3 za razne vrijednosti a, vidimo da se ostatci 2 i 1 ponavljaju s periodom 2. Zaključujemo da je a nužno paran broj, odnosno $a = 2a_1$ za neki prirodni broj a_1.

Posebno, vrijedi $a \geqslant 2$, pa je 2^a djeljivo s 4. Broj 2021 daje ostatak 1 pri dijeljenju s 4, pa taj ostatak mora davati i izraz na desnoj strani. Broj 25^c daje ostatak 1, dok izraz 3^b periodički daje ostatke 3 i 1 pri dijeljenju s 4. Zaključujemo da je i b paran broj, odnosno $b = 2b_1$ za neki prirodni b_1.

Sada iz zadane jednadžbe slijedi

$$2021 = 3^{2b_1} \cdot 5^{2c} - 2^{2a_1} = (3^{b_1} \cdot 5^c - 2^{a_1})(3^{b_1} \cdot 5^c + 2^{a_1}).$$

Kako su faktori na desnoj strani neparni brojevi čija je razlika jednaka 2^{a_1+1}, zaključujemo da su oni relativno prosti. Uzimajući u obzir da faktorizacija broja 2021 na proste faktore glasi $2021 = 43 \cdot 47$, te da je prvi faktor na desnoj strani jednadžbe strogo manji od drugog, imamo dva slučaja: prvi faktor iznosi 1, a drugi 2021, ili prvi faktor iznosi 43, a drugi 47.

U prvom slučaju je $3^{b_1} \cdot 5^c - 2^{a_1} = 1$ i $3^{b_1} \cdot 5^c + 2^{a_1} = 2021$. Oduzimanjem jednadžbi dobivamo $2^{a_1+1} = 2022$, što nema rješenja.

U drugom slučaju je $3^{b_1} \cdot 5^c - 2^{a_1} = 43$ i $3^{b_1} \cdot 5^c + 2^{a_1} = 47$. Oduzimanjem jednadžbi dobivamo $2^{a_1+1} = 4$, odakle je $a_1 = 1$ te $a = 2$. Uvrštavanjem u bilo koju od preostalih jednadžbi dobivamo $3^{b_1}5^c = 45$, odakle je $b_1 = 2$ (te stoga $b = 4$) i $c = 1$.

Konačno, jedino rješenje zadane jednadžbe je $(a, b, c) = (2, 4, 1)$.

Zadatak A-4.4.

Dana je ploča dimenzija $n \times n$ i po jedna pločica dimenzija 1×1, 1×2, $\ldots$, $1 \times n$.

Na koliko načina je moguće odabrati $\frac{1}{2}n(n+1)$ polja ploče tako da odabrani dio bude moguće prekriti horizontalno postavljenim pločicama, ali također i vertikalno postavljenim pločicama?

Rješenje.

Svaki način odabira polja ploče reprezentirat ćemo jednim bojenjem ploče u crno i bijelo. Polja koja su među $\frac{1}{2}n(n+1)$ odabranih obojit ćemo crno, a ostala polja bojimo bijelo. Tada ćemo izbrojiti koliko je dobro obojenih ploča (ploča čije bojenje zadovoljava uvjete zadatka).

Prvo primijetimo da je ukupan broj crnih polja ploče jednak ukupnom broju polja koje sve pločice prekrivaju (bilo u horizontalnom, bilo u vertikalnom prekrivanju). Nadalje, kako bismo mogli postaviti pločicu oblika $n \times 1$ (vertikalno postavljenu pločicu oblika $1 \times n$), nužno je u svakom retku obojiti barem jedno polje crno. To znači da će se u horizontalnom postavljanju svaka od n pločica nalaziti u zasebnom retku, pa će za svaki $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ postojati redak u kojem je k polja obojeno u crno. Zato za svako bojenje postoji točno jedan način kako ta polja možemo prekriti pločicama postavljajući ih horizontalno. Analogne tvrdnje vrijede i za vertikalno popločavanje.

Promotrimo sada gdje prilikom horizontalnog popločavanja možemo postaviti pločicu 1×1. Stupac u kojem se nalazi pločica oblika $n \times 1$ cijeli je obojen crno, te stoga moramo iskoristiti sve pločice kako bismo u horizontalnom popločavanju prekrili ta polja. Među njima je i (horizontalna) pločica 1×1. Nadalje, u stupcu u kojem se nalazi pločica oblika $(n-1) \times 1$ sva polja osim jednog su crna, a bijelo polje može se nalaziti samo u prvom ili zadnjem retku. Kada se (horizontalno postavljena) pločica 1×1 ne bi nalazila u prvom ili zadnjem retku, u retku u kojem se ona nalazi imali bismo barem dva crna polja (jedno zbog pločice $n \times 1$, te jedno zbog pločice $(n-1) \times 1$), što je nemoguće jer u tom retku samo jedno polje smije biti crno. Zato se ta pločica nalazi u prvom ili zadnjem retku ploče.

Promotrimo sada gdje možemo postaviti pločicu 1×2. Pogledajmo dio ploče oblika $(n-1) \times n$ u kojem je izbačen redak u kojem je točno jedno polje obojeno crno (to je prvi ili zadnji redak). U tom dijelu ploče dva su stupca u potpunosti crna zbog pločica $n \times 1$ i $(n-1) \times 1$ pa je tako i u retku u kojem se nalazi pločica 1×2. Nadalje, u stupcu u kojem se nalazi pločica $(n-2) \times 1$

sva polja osim jednog su crna. To preostalo bijelo polje u ploči $(n-1)\times n$ može se naći u prvom ili zadnjem retku. Kako se u retku u kojem je pločica 1×2 nalaze točno dva crna polja, zaključujemo da se ta pločica mora naći u prvom ili zadnjem retku ostatka ploče $(n-1)\times n$.

Ovo zaključivanje možemo nastaviti i induktivno: pretpostavimo da se svaka pločica $1\times i$, $i=1,\ldots,k$ mora nalaziti u prvom ili zadnjem retku ostatka ploče $(n-i+1)\times n$, te da je $k+1$ stupaca u ostatku ploče $(n-k)\times n$ u potpunosti crno (zbog pločica $n\times 1$, $\ldots$, $(n-k)\times 1$). Tada se zbog pločice oblika $(n-k-1)\times 1$ (u čijem su stupcu sva polja osim u prvom ili zadnjem retku crna) pločica oblika $1\times(k+1)$ mora naći u prvom ili zadnjem retku ostatka ploče $(n-k)\times n$.

Zato, za svaku dobro obojenu ploču, postoji permutacija $(r_1,r_2,\ldots,r_n)$ skupa $\{1,2,\ldots,n\}$ koja je konstruirana na sljedeći način: broj 1 nalazi se na prvom ili zadnjem mjestu, broj 2 nalazi se na prvom slobodnom ili zadnjem slobodnom mjestu, itd. Ta permutacija označava da se u retku i nalazi r_i crnih polja. Primijetimo da je takvih permutacija 2^{n-1} budući da za sve brojeve $1,2,\ldots,n-1$ imamo 2 izbora.

Iste argumente možemo primijeniti i na stupce: postoji permutacija $(s_1,s_2,\ldots,s_n)$ skupa $\{1,2,\ldots,n\}$ koja je konstruirana na jednak način kao permutacija $(r_1,r_2,\ldots,r_n)$, a koja označava da se u stupcu i nalazi s_i crnih polja.

Ukupan broj parova takvih permutacija je $2^{n-1}\cdot 2^{n-1}=2^{2n-2}$ te je svakoj dobro obojenoj ploči pridružen jedan takav par permutacija. Dokazat ćemo i obrat: svaki par permutacija $(r_1,r_2,\ldots,r_n)$ i $(s_1,s_2,\ldots,s_n)$ (konstruiranih kao gore) reprezentira jedinstvenu dobro obojenu $n\times n$ ploču.

Promotrimo indeks i_1 za koji je $s_{i_1}=n$. U i_1-tom stupcu mora biti n crnih polja pa sva polja tog stupca obojimo crno. Promotrimo indeks j_1 za koji je $r_{j_1}=1$. Znamo da je j_1-ti redak prvi ili zadnji te da sva polja osim jednog moraju biti crna, pa obojimo sva neobojena polja u tom retku bijelo.

Promotrimo sada indeks i_2 za koji je $s_{i_2}=n-1$. Iz konstrukcije permutacije $(s_1,\ldots,s_n)$ broj $n-1$ nalazi se neposredno pored mjesta s indeksom i_1. U tom stupcu sva polja osim jednog moraju biti bijela. Jedno polje je već obojeno bijelo (u retku r_{j_1}) pa obojimo sva ostala u crno. Zatim sva neobojena polja u retku j_2 (indeks sa svojstvom $s_{j_2}=2$) obojimo u bijelo. U tom retku bit će moguće postaviti pločicu 1×2 jer su i_1 i i_2 uzastopni prirodni brojevi. Također, u stupcu i_2 moguće je postaviti pločicu $(n-1)\times 1$, zbog načina konstrukcije permutacije $(r_1,r_2,\ldots,r_n)$.

Ovo bojenje možemo nastaviti i induktivno: stupac i_k u kojem se mora nalaziti k crnih polja znat ćemo jednoznačno obojiti jer će tada već $n-k$ polja biti bijelo. Također, kako je iz konstrukcije taj stupac neposredno pored svih ostalih stupaca koji su već obojeni u crno, pločicu $1\times k$ moći ćemo postaviti u stupac j_k (za koji je $r_{j_k}=k$) te će također biti moguće postaviti i pločicu oblika $(n-k)\times 1$.

Kako svaki par permutacija $(r_1,r_2,\ldots,r_n)$ i $(s_1,s_2,\ldots,s_n)$ konstruiranih kao gore reprezentira dobro obojenu $n\times n$ ploču koja je k tome i jedinstvena, zaključujemo da je takvih ploča jednako broju parova permutacija. Dakle, broj traženih odabira polja ploča je 2^{2n-2}.

Zadatak A-4.5.

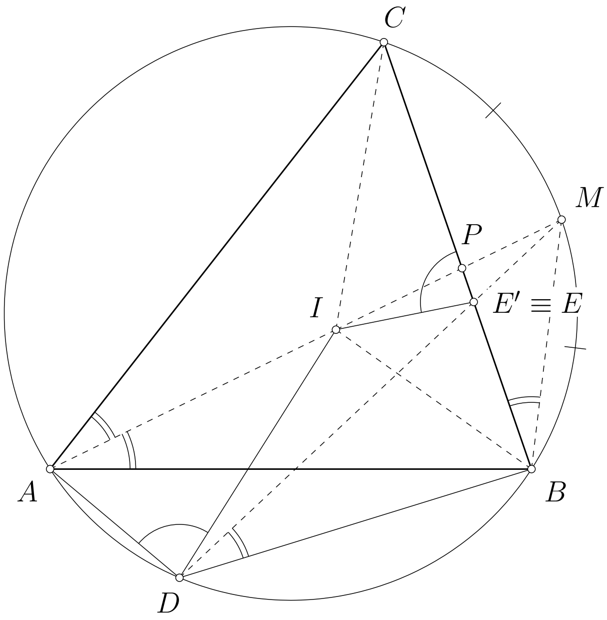
Dan je trokut ABC čije je središte upisane kružnice točka I. Odabrane su dvije točke, točka D na luku $\widehat{AB}$ opisane kružnice trokuta ABC koji ne sadrži točku C, te točka E na dužini $\overline{BC}$, tako da vrijedi $\sphericalangle ADI = \sphericalangle IEC$. Dokaži da postoji točka, neovisna o odabiru točaka D i E, kojom pravac DE prolazi.

Rješenje.

Neka je M polovište luka $\widehat{BC}$ kružnice opisane trokutu ABC koji ne sadrži točku A te neka je E' sjecište pravca MD i stranice $\overline{BC}$. Dokazat ćemo da pravac DE za svaki izbor točaka D i E prolazi točkom M tako što ćemo dokazati da se točke E i E' podudaraju.

Označimo s α, β i γ redom mjere kutova $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle CBA$ i $\sphericalangle CBA$.

Poznato je da M leži na simetrali kuta iz vrha A. Neka je P sjecište te simetrale kuta i stranice $\overline{BC}$.



Iz jednakosti obodnih kutova nad istom tetivom imamo $\sphericalangle MBE' = \sphericalangle MBC = \sphericalangle MAC = \frac{\alpha}{2}$. Slično vrijedi $\sphericalangle MDB = \sphericalangle MAB = \frac{\alpha}{2}$, a budući da je trokutima $ME'B$ i MBD kut pri vrhu M zajednički, oni su slični prema K–K teoremu o sličnosti. Zato vrijedi

$$\frac{|ME'|}{|MB|} = \frac{|MB|}{|MD|}.$$

Budući da I leži na simetrali kuta iz B, slijedi $\sphericalangle MBI = \sphericalangle MBC + \sphericalangle CBI = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Iz jednakosti obodnih kutova nad istom tetivom imamo $\sphericalangle IMB = \sphericalangle AMB = \sphericalangle ACB = \gamma$. Sada dobivamo

$$\sphericalangle MIB = 180^\circ - \sphericalangle IMB - \sphericalangle MBI = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Dakle, vrijedi $\sphericalangle MIB = \sphericalangle MBI$, pa je trokut MIB jednakokračan i vrijedi $|MB| = |MI|$. Zato vrijedi i

$$\frac{|ME'|}{|MI|} = \frac{|MI|}{|MD|}.$$

Nadalje, u trokutima $ME'I$ i MID kut pri vrhu M je zajednički, pa prema S–K–S teoremu o sličnosti slijedi da su ti trokuti slični. Odavde slijedi

$$\sphericalangle MIE' = \sphericalangle MDI.$$

Kut $\sphericalangle MPB$ vanjski je kut trokuta ABP pa je $\sphericalangle MPB = \sphericalangle PBA + \sphericalangle BAP = \frac{\alpha}{2} + \beta$. Kut $\sphericalangle MDA$ obodni je kut nad tetivom $\overline{MA}$ pa vrijedi $\sphericalangle MDA = \sphericalangle MBA = \sphericalangle MBC + \sphericalangle CBA = \frac{\alpha}{2} + \beta$. Dakle, $\sphericalangle MDA = \sphericalangle MPB = \frac{\alpha}{2} + \beta$. Kut $\sphericalangle MPB$ također je vanjski kut trokuta PIE' pa imamo

$$\sphericalangle IEC = \sphericalangle ADI = \sphericalangle MDA - \sphericalangle MDI = \sphericalangle MPB - \sphericalangle MIE' = \sphericalangle IE'P = \sphericalangle IE'C.$$

Kada bi E i E' bile različite točke na stranici, jedan od kutova $\sphericalangle IEC$ i $\sphericalangle IE'C$ bio bi vanjski kut trokuta IEE' pa bi zato bio strogo veći od drugog kuta, čime dobivamo kontradikciju s gornjom jednakosti. Dakle, točke E' i E se podudaraju, čime je dokaz završen.