

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

11. svibnja 2021.

1. Odredite sve prirodne brojeve  $x, y, z$  za koje vrijedi

$$4x^2 + 45y^2 + 9z^2 - 12xy - 36yz = 25,$$

pri čemu je  $x < y < z$ .

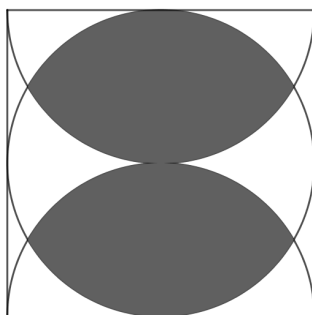
2. Ivo, Alen, Vanja, Marko i Saša su kuhari u hotelu. Alen i Marko zaduženi su za kuhanje doručka i ručka, Ivo i Vanja rade na pripremi ručka i večere, dok je Saša na raspolaganju za sva tri obroka. Na koliko je načina moguće napraviti njihov dnevni raspored kuhanja, ako svaki obrok pripremaju točno dva kuhara, a kuhar ako radi, mora biti raspoređen na točno dva obroka? Može li uz takav dnevni raspored svaki kuhar imati barem jedan slobodan dan u tjednu? Obrazložite.
3. Dužina  $\overline{AB}$  je hipotenuza pravokutnog trokuta  $ABC$ . Visina iz vrha  $C$ , s nožištem u točki  $D$ , odsijeca na hipotenuzi odsječak  $\overline{DB}$  duljine 16. Odredite površinu trokuta  $ABC$ , ako je  $|AC| = 15$ ?
4. Fran je odlučio obojiti ogradu uz pomoć prijatelja Tina i Luke. Procijenili su da bi za bojenje ograde Tinu samome trebalo 3 sata više nego Franu, a Luki samome 2 sata manje nego Franu. Radeći sva trojica zajedno, svatko svojim tempom, ogradu bi obojili za 4 sata. Koliko bi sati trebalo svakom od njih da samostalno oboji ogradu?
5. Dokažite da među bilo kojih 2021 prirodnih brojeva od kojih nijedan nije djeljiv s 2021 postoji nekoliko brojeva čiji je zbroj djeljiv s 2021.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

11. svibnja 2021.

1. U kvadrat je upisana kružnica i dvije polukružnice kao što je prikazano na slici. Kolika je površina kvadrata ako je površina osjenčanog dijela jednaka  $48\pi - 36\sqrt{3}$  ?



2. Pravokutan trokut kojemu je hipotenuza trostruko dulja od jedne katete rotira oko hipotenuze. Odredite omjer obujma tako nastalog tijela i obujma tom tijelu opisane kugle.
3. Odredite sva cjelobrojna rješenja sustava jednadžbi

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 - z^2 &= 18, \\ 3x^2 - 2y^2 - 4z^2 &= 134.\end{aligned}$$

4. Dvojica su gusara na pustom otoku pronašla sanduk u kojemu su bili zlatni lančići, narukvice i prsteni. Započeli su raspravu o tome kako će međusobno podijeliti lančiće, narukvice i prstene. Zaključili su da će na raspravu potrošiti ukupno 5865 minuta ako o svakoj mogućoj raspodjeli raspravljaju po 5 minuta. Odredite koliko je u sanduku bilo lančića, koliko narukvica i koliko prstena ako se zna da je najviše bilo prstena, a najmanje narukvica. Svi su lančići međusobno jednaki, a isto vrijedi za narukvice i prstene.
5. Odredite minimalnu vrijednost funkcije  $f : \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{12x^2 + 8x + 4}{(2x + 1)^2}$ . Za koji  $x$  funkcija  $f$  postiže minimum?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

11. svibnja 2021.

1. Odredite umnožak svih rješenja jednadžbe

$$\sqrt{2021} x^{\log_{2021} x} = x^2.$$

2. Tenisač Duje je na početku zemljane turneje imao 50% pobjeda. Nakon prvog odigranog turnira na zemlji na kojem je imao tri pobjede i jedan poraz, udio pobjeda mu je bio veći od 52%. Nakon drugog odigranog turnira na zemlji na kojem je imao četiri pobjede i jedan poraz, udio pobjeda mu je bio manji od 56%. Koliko je mečeva Duje odigrao do zemljane turneje ako znamo da je do kraja sezone odigrao dvostruko više mečeva nego prije zemljane turneje i da je pobijedio u 60% mečeva?

3. Odredite cjelobrojna rješenja nejednadžbe  $\frac{x^2 - 16x + 39}{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi x}{4} - 1} \geq 0$ .

4. U trokutu  $ABC$  točka  $D$  je na stranici  $\overline{AB}$ , a točka  $E$  na stranici  $\overline{BC}$  tako da vrijedi  $|AD| : |DB| = |CE| : |EB| = 3 : 4$ . Dužine  $\overline{AE}$  i  $\overline{CD}$  sijeku se u točki  $P$ .

Vektor  $\overrightarrow{AP}$  izrazite kao linearnu kombinaciju vektora  $\overrightarrow{AB}$  i  $\overrightarrow{AC}$ .

5. U kuglu polumjera  $R$  upisana je pravilna uspravna četverostrana piramida s vrhom  $V$  i osnovkom  $ABCD$ . Neka je  $\cos \sphericalangle AVB = \frac{3}{4}$ . Kolika je visina piramide izražena s pomoću  $R$ ?

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

11. svibnja 2021.

1. Prvi red kazališta ima 15 sjedala, a svaki sljedeći red ima dva sjedala više. Ukupan broj sjedala u kazalištu je kvadrat nekog prirodnog broja. Koliko ima redova u tom kazalištu?
2. Riješite sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned}\log_3 |\pi x| + 2 \log_{|\pi x|} 3 &= 3, \\ \sin^2(x + y) + 1 &= 2 \sin(x + y).\end{aligned}$$

3. Točke  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  su redom na stranicama  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$ ,  $\overline{AB}$  trokuta  $ABC$  takve da vrijedi:

$$\frac{|BA_1|}{|BC|} = \frac{|CB_1|}{|CA|} = \frac{|AC_1|}{|AB|} = k.$$

Odredite  $k$  tako da površina trokuta  $A_1B_1C_1$  bude najmanja moguća.

4. Odredite sve polinome  $p$  s realnim koeficijentima za koje je jednakost

$$x \cdot p(x - 1) = (x - 2021) \cdot p(x)$$

ispunjena za sve realne brojeve  $x$ .

5. Andro i Borna naizmjenice bacaju simetričnu kocku čije su stranice označene brojevima 1, 2, 3, 4, 5 i 6. Pobjednik je onaj koji prvi dobije šesticu. Ako Andro počinje igru, kolika je vjerojatnost da Borna pobijedi?