DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

11. svibnja 2021.

Zadatak B-1.1.

Odredite sve prirodne brojeve x, y, z za koje vrijedi

$$4x^2 + 45y^2 + 9z^2 - 12xy - 36yz = 25,$$

pri čemu je $x < y < z$.

Rješenje.

Zapišemo li $45y^2 = 9y^2 + 36y^2$ tada izraz na lijevoj strani dane jednadžbe možemo zapisati kao zbroj dva kvadrata binoma:

$$4x^2 - 12xy + 9y^2 + 36y^2 - 36yz + 9z^2 = 25.$$

Tada je

$$(2x - 3y)^2 + (6y - 3z)^2 = 25.$$

Jedini načini da se broj 25 napiše u obliku zbroja kvadrata dvaju cijelih brojeva jesu:

$$25 = (\pm 3)^2 + (\pm 4)^2,$$

$$25 = 0^2 + (\pm 5)^2.$$

Imamo sljedeće mogućnosti:

$$2x - 3y = \pm 3, \qquad 6y - 3z = \pm 4,$$

$$2x - 3y = \pm 4, \qquad 6y - 3z = \pm 3,$$

$$2x - 3y = 0, \qquad 6y - 3z = \pm 5,$$

$$2x - 3y = \pm 5, \qquad 6y - 3z = \pm 0.$$

Diofantske jednadžba $6y - 3z = \pm 4$ i $6y - 3z = \pm 5$ nemaju rješenja jer je lijeva strana djeljiva s 3, a desna nije. Riješimo i preostale slučajeve.

Neka je $2x - 3y = -4$, $6y - 3z = \pm 3$.

Uočimo jedno partikularno rješenje: $x = 1$, $y = 2$. Tada je opće rješenje oblika

$$x = 1 + 3k, \quad y = 2 + 2k.$$

Nadalje, kako je $x < y$, to je $1 + 3k < 2 + 2k$, odnosno $k < 1$. Zbog pozitivnosti rješenja može biti samo $k = 0$ i jedino je rješenje $x = 1$, $y = 2$.

Uvrštavanjem u drugu jednadžbu dobivamo dvije mogućosti za nepoznanicu z: $z = 3$ i $z = 5$.

Neka je $2x - 3y = -5$, $6y - 3z = 0$.

Uočimo jedno partikularno rješenje: $x = 2$, $y = 3$. Tada je opće rješenje oblika

$$x = 2 + 3k, \quad y = 3 + 2k.$$

Nadalje, kako je $x < y$, to je $2 + 3k < 3 + 2k$, odnosno $k < 1$. Zbog pozitivnosti rješenja može biti samo $k = 0$ i jedino je rješenje $x = 2$, $y = 3$.

Uvrštavanjem u drugu jednadžbu dobivamo $z = 6$.

Neka je $2x - 3y = 4$, $6y - 3z = \pm 3$.

Razlika prirodnih brojeva $2x - 3y = 4 > 0$ pa je $2x > 3y$, odnosno $x > \frac{3}{2}y$. Budući da je prema početnom uvjetu $x < y$, ovaj slučaj odbacujemo.

Analogno odbacujemo i slučaj kada je $2x - 3y = 5$, $6y - 3z = 0$.

Dakle, rješenja zadane jednadžbe su: $(1, 2, 3)$, $(1, 2, 5)$ i $(2, 3, 6)$.

Zadatak B-1.2.

Ivo, Alen, Vanja, Marko i Saša su kuhari u hotelu. Alen i Marko zaduženi su za kuhanje doručka i ručka, Ivo i Vanja rade na pripremi ručka i večere, dok je Saša na raspolaganju za sva tri obroka. Na koliko je načina moguće napraviti njihov dnevni raspored kuhanja, ako svaki obrok pripremaju točno dva kuhara, a kuhar ako radi, mora biti raspoređen na točno dva obroka? Može li uz takav dnevni raspored svaki kuhar imati barem jedan slobodan dan u tjednu? Obrazložite.

Rješenje.

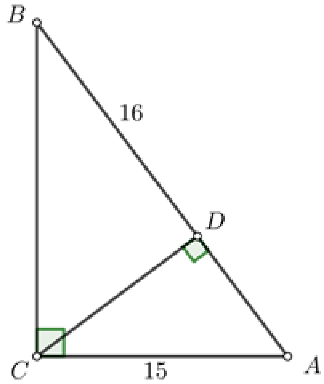
Ručak mogu kuhati svi kuhari pa ćemo najprije odabrati osobu koja će kuhati ručak. Tu imamo nekoliko slučajeva:

1. Ako ručak kuhaju Alen ili Marko, oni moraju kuhati i doručak, pa bi za večeru trebalo angažirati dva nova kuhara koji bi radili samo na jednom obroku. Zbog toga Alen i Marko ne mogu zajedno kuhati ručak. Ista je situacija s Ivom i Vanjom.
2. Ako ručak kuhaju Saša i Alen, tada Alen mora kuhati i doručak. Međutim, ako bi uz Alena doručak pripremao Marko, tada bi Marko trebao pripremati i ručak, a ručak već kuha dvoje kuhara. Ista bi situacija bila u bilo kojoj drugoj kombinaciji u kojoj ručak kuha Saša, prema tome Saša ne može kuhati ručak.
3. Ako ručak kuhaju Alen i Ivo, tada doručak kuhaju Alen i Saša, a u tom slučaju Saša mora kuhati i večeru, a s njime večeru mora kuhati Ivo. Kad doručak ne bi kuhao Saša, onda bi ga u ovom slučaju morao kuhati Marko, no on bi tada trebao kuhati i ručak, a ručak je već zauzet. Prema tome Saša svaki dan mora kuhati doručak i večeru.
4. Svaki raspored je definiran parom koji kuha ručak, a tih parova je četiri te ukupno postoji 4 rasporeda. Kako Saša mora raditi svaki dan, on neće moći imati slobodan dan.

Zadatak B-1.3.

Dužina $\overline{AB}$ je hipotenuza pravokutnog trokuta ABC. Visina iz vrha C, s nožištem u točki D, odsijeca na hipotenuzi odsječak $\overline{DB}$ duljine 16. Odredite površinu trokuta ABC, ako je $|AC| = 15$?

Rješenje.



Trokuti ADC, CDB i ABC su slični (prema poučku KK).

Iz sličnosti trokuta ADC i ABC slijedi:

$$\frac{|AD|}{|AC|}=\frac{|AC|}{|AB|} \Longrightarrow \frac{|AD|}{15}=\frac{15}{|AB|} \Longrightarrow \frac{|AD|}{15}=\frac{15}{|AD|+16}.$$

Označimo li $|AD|=x$, tada je

$$x(x+16)=225,$$

$$x^2+16x=225.$$

Nadopunimo desnu stranu jednakosti do potpunog kvadrata.

$$x^2+16x+64=225+64,$$

$$(x+8)^2=289 \Longrightarrow x+8=17 \Longrightarrow x=9.$$

Tada je $|AB|=25$, $|CB|=20$.

Površina danog trokuta jest $P=\dfrac{20\cdot 15}{2}=150$.

Zadatak B-1.4.

Fran je odlučio obojiti ogradu uz pomoć prijatelja Tina i Luke. Procijenili su da bi za bojenje ograde Tinu samome trebalo 3 sata više nego Franu, a Luki samome 2 sata manje nego Franu. Radeći sva trojica zajedno, svatko svojim tempom, ogradu bi obojili za 4 sata. Koliko bi sati trebalo svakom od njih da samostalno oboji ogradu?

Prvo rješenje.

Označimo broj sati potrebnih da svaki od trojice prijatelja sam oboji ogradu.

Fran: x sati, Tin: $x+3$ sati, Luka: $x-2$ sata. Uočimo da x mora biti veći od 2.

Tada promatrajući koliko svaki od njih oboji po jednom satu dobivamo jednadžbu

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x-2}=\frac{1}{4}.$$

Napišimo jednadžbu u sljedećem obliku

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{x+3}.$$

Svedemo li obje strane jednadžbe na zajednički nazivnik, dobivamo

$$\frac{2x-2}{x(x-2)}=\frac{x-1}{4(x+3)},$$

odnosno

$$\frac{2(x-1)}{x(x-2)}=\frac{x-1}{4(x+3)}.$$

Budući da je $x>2$ nakon dijeljenja s $(x-1)$ slijedi

$$\frac{2}{x(x-2)}=\frac{1}{4(x+3)}.$$

Tada redom slijede jednakosti

$$\begin{gathered}8(x+3)=x(x-2)\\ 8x+24=x^2-2x\\ x^2-10x-24=0.\end{gathered}$$

Zapisivanjem srednjeg člana kao $-12x+2x$ i pogodnim grupiranjem posljednji izraz pišemo u obliku umnoška

$$(x-12)(x+2)=0.$$

Jedino faktor $x-12$ može biti jednak nula, pa je rješenje početne jednadžbe $x=12$. Tada Franu treba 12, Tinu 15, a Luki 10 sati da samostalno oboji ogradu.

Drugo rješenje.

Uz iste oznake kao u prvom rješenju navodimo drugačiji postupak rješavanja dobivene jednadžbe.

$$\begin{gathered}\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x-2}=\frac{1}{4}\\ 4(x+3)(x-2)+4x(x-2)+4x(x+3)=x(x+3)(x-2)\\ 4(x^2+x-6)+4x^2-8x+4x^2+12x=x(x^2+x-6)\\ x^3-11x^2-14x+24=0\\ x^3-x^2-10x^2+10x-24x+24=0\\ x^2(x-1)-10x(x-1)-24(x-1)=0\end{gathered}$$

$$(x-1)(x^2-10x-24)=0$$
$$(x-1)(x^2-12x+2x-24)=0$$
$$(x-1)(x(x-12)+2(x-12))=0$$
$$(x-1)(x-12)(x+2)=0$$
$$x_1=1, x_2=12, x_3=-2$$

Jedino moguće rješenje je $x=12$.

Franu treba 12, Tinu 15, a Luki 10 sati da samostalno oboji ogradu.

Zadatak B-1.5.

Dokažite da među bilo kojih 2021 prirodnih brojeva od kojih nijedan nije djeljiv s 2021 postoji nekoliko brojeva čiji je zbroj djeljiv s 2021.

Rješenje.

Neka su a_1, a_2, a_3,...,a_{2021} proizvoljni prirodni brojevi od kojih nijedan nije djeljiv s 2021. Ako među zbrojevima:

$$a_1$$
$$a_1+a_2$$
$$a_1+a_2+a_3$$
$$\ldots$$
$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2021}$$

postoji broj djeljiv s 2021 dokaz je gotov.

Ako niti jedan od danih zbrojeva nije djeljiv s 2021 onda pri dijeljenju s 2021 daju jedan od 2020 ostataka: 1, 2, 3,..., 2020.

Kako ima 2021 zbrojeva, a ostataka je 2020, prema Dirichletovom principu slijedi da barem dva zbroja daju isti ostatak pri dijeljenju s 2021, odnosno

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_k=2021m+r \text{ i } a_1+a_2+a_3+\cdots+a_l=2021n+r.$$

Za $k<l$ vrijedi:

$$a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_l=2021(n-m)$$

pa je zbroj $a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_l$ djeljiv s 2021.

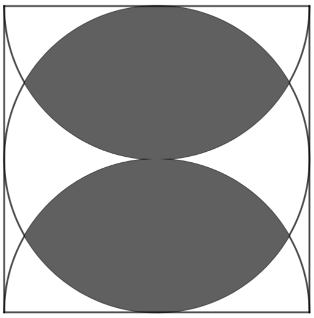
DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

11. svibnja 2021.

Zadatak B-2.1.

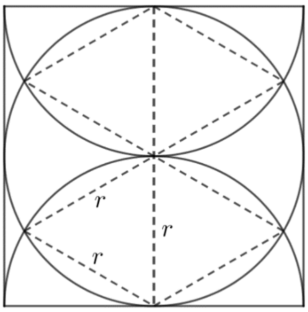
U kvadrat je upisana kružnica i dvije polukružnice kao što je prikazano na slici. Kolika je površina kvadrata ako je površina osjenčanog dijela jednaka $48\pi - 36\sqrt{3}$?



Rješenje.

Uočimo da je osjenčana površina jednaka zbroju površina dvaju sukladnih likova. Svaki od likova je nastao presjekom kruga upisanog u kvadrat i polukruga konstruiranog nad stranicom kvadrata.

Označimo li duljinu stranice kvadrata sa x, tada je $r = \dfrac{x}{2}$.



Uočimo da se svaki od sukladnih likova sastoji od dva jednakostranična trokuta duljine stranice r i 4 kružna odsječka kruga polumjera r koji odgovaraju kutu od 60°.

Površina jednog od trokuta jednaka je $P_\triangle = \dfrac{r^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{16}$.

Površina kruga upisanog u kvadrat jednaka je $P_k = \dfrac{x^2}{4}\pi$.

Površina kružnoga isječka jednaka je $\dfrac{1}{6}$ površine kruga, tj. $P_i = \dfrac{1}{6}P_k = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{x^2}{4}\pi = \dfrac{x^2\pi}{24}$.

$P_{\text{odsječka}} = P_i - P_\triangle = \dfrac{x^2\pi}{24} - \dfrac{x^2\sqrt{3}}{16}$.

Površina osjenčanog dijela kvadrata jest

$$P = 8 \cdot P_i + 4 \cdot P_\triangle = 8\left(\frac{x^2\pi}{24} - \frac{x^2\sqrt{3}}{16}\right) + \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{x^2\pi}{3} - \frac{x^2\sqrt{3}}{4}.$$

Kako je površina osjenčanog dijela kvadrata jednaka $48\pi - 36\sqrt{3}$, rješavanjem jednadžbe $48\pi - 36\sqrt{3} = \dfrac{x^2\pi}{3} - \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
&48\pi - 36\sqrt{3} = \frac{4x^2\pi - 3\sqrt{3}\cdot x^2}{12},\\
&12(4\pi - 3\sqrt{3}) = \frac{x^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{12},\\
&x^2 = 144.
\end{aligned}$$

Dakle, površina kvadrata je 144.

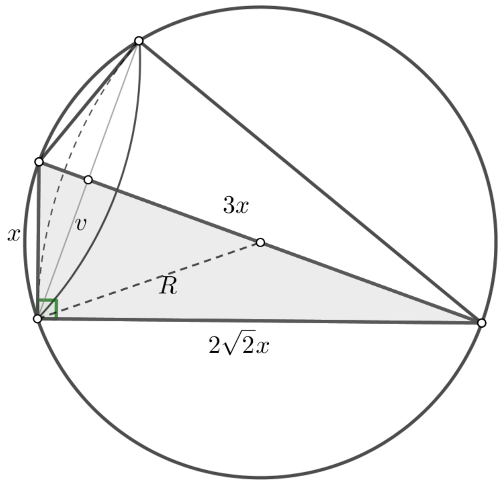
Zadatak B-2.2.

Pravokutan trokut kojemu je hipotenuza trostruko dulja od jedne katete rotira oko hipotenuze. Odredite omjer obujma tako nastalog tijela i obujma tom tijelu opisane kugle.

Rješenje.

Označimo li duljinu jedne katete s x, tada je duljina hipotenuze jednaka $3x$, a duljina druge katete $\sqrt{9x^2 - x^2} = \sqrt{8x^2} = 2\sqrt{2}x$.

Zarotiramo trokut oko hipotenuze i dobivenom tijelu opišemo kuglu. Na slici je prikazan poprečni presjek rotacijskog tijela i njemu opisane kugle.



Dobiveno se tijelo sastoji od dva stošca kojima je baza zajednička, a polumjer baze je visina pravokutnog trokuta spuštena iz vrha pravoga kuta (na slici označena s v).

Izrazimo li površinu pravokutnog trokuta na dva načina:

$P = \dfrac{x \cdot 2\sqrt{2}x}{2}$ i $P = \dfrac{3x \cdot v}{2}$, dobivamo $\dfrac{x \cdot 2\sqrt{2}x}{2} = \dfrac{3x \cdot v}{2}$,

odakle slijedi $v = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}x$.

Zbroj duljina visina dvaju spojenih stožaca jednak je duljini hipotenuze $3x$, te ih možemo označiti s x_1 i $(3x - x_1)$.

Obujam dobivenog tijela je:

$$\begin{aligned}
V_t &= \frac{v^2\pi x_1}{3} + \frac{v^2\pi(3x - x_1)}{3},\\
V_t &= \frac{v^2\pi x_1 + v^2\pi \cdot 3x - v^2\pi x_1}{3},\\
V_t &= v^2\pi x.
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem $v = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}x$ dobivamo $V_t = \left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}x\right)^2 \pi x = \dfrac{8x^3\pi}{9}$.

Središte kugle opisane nastalom tijelu nalazi se u polovištu hipotenuze, pa je polumjer kugle $R = \dfrac{3x}{2}$, a obujam kugle

$$V_{\text{kugle}} = \frac{4}{3}\left(\frac{3x}{2}\right)^3 \pi = \frac{9x^3\pi}{2}.$$

Omjer obujma nastalog tijela i obujma njemu opisane kugle jednak je

$$\frac{V_t}{V_{\text{kugle}}} = \frac{\dfrac{8x^3\pi}{9}}{\dfrac{9x^3\pi}{2}} = \frac{16}{81}.$$

Zadatak B-2.3.

Odredite sva cjelobrojna rješenja sustava jednadžbi

$$\begin{aligned}
x^2 - y^2 - z^2 &= 18,\\
3x^2 - 2y^2 - 4z^2 &= 134.
\end{aligned}$$

Rješenje.

Pomnožimo li prvu jednadžbu s brojem -3 i dodamo drugoj jednadžbi dobivamo:

$$y^2 - z^2 = 80. \tag{1}$$

Zaključujemo da je $|y| > |z|$, a zapišemo li jednadžbu u obliku

$$(y + z)(y - z) = 80$$

možemo zaključiti da su y i z iste parnosti jer bi u protivnom njihov zbroj i razlika bili neparni, a time i umnožak $(y + z)(y - z)$, što je nemoguće.

Dakle, $y + z$ i $y - z$ su parni djelitelji broja 80. Budući da je $|y| > |z|$ i da su svi uređeni parovi oblika $(\pm y, \pm z)$ rješenja jednadžbe (1), dovoljno je promotriti sljedeće slučajeve:

- $y+z=40,\ y-z=2$,
- $y+z=20,\ y-z=4$, i
- $y+z=10,\ y-z=8$.

Uzimajući u obzir sve moguće kombinacije predznaka, slijedi da je

$$(y,z) \in \{(\pm 9, \pm 1), (\pm 12, \pm 8), (\pm 21, \pm 19)\}.$$

Ako ova rješenja uvrstimo u jednadžbu $x^2 = y^2 + z^2 + 18$ iz početnog sustava, dobivamo $x \in \mathbb{Z}$ jedino ako je $(y,z) = (\pm 9, \pm 1)$. Vrijedi da je $x = \pm 10$.

Tada se sva cjelobrojna rješenja (x,y,z) dobiju uzimajući u obzir sve moguće kombinacije predznaka iz $(\pm 10, \pm 9, \pm 1)$, a ima ih ukupno $2^3 = 8$.

Ili raspisano:

$(10,9,1), (10,9,-1), (10,-9,1), (-10,9,1), (10,-9,-1), (-10,-9,1), (-10,9,-1), (-10,-9,-1)$.

Zadatak B-2.4.

Dvojica su gusara na pustom otoku pronašla sanduk u kojemu su bili zlatni lančići, narukvice i prsteni. Započeli su raspravu o tome kako će međusobno podijeliti lančiće, narukvice i prstene. Zaključili su da će na raspravu potrošiti ukupno 5865 minuta ako o svakoj mogućoj raspodjeli raspravljaju po 5 minuta. Odredite koliko je u sanduku bilo lančića, koliko narukvica i koliko prstena ako se zna da je najviše bilo prstena, a najmanje narukvica. Svi su lančići međusobno jednaki, a isto vrijedi za narukvice i prstene.

Rješenje.

Očito je ukupan broj mogućih raspodjela blaga jednak $5865 : 5 = 1173$.

Označimo s l broj zlatnih lančića, s n broj zlatnih narukvica i s p broj zlatnih prstena.

Ako prvi gusar dobiva x lančića, y narukvica i u prstena, tada je dobitak drugog gusara jednoznačno određen, tj. on dobiva $l-x$ lančića, $n-y$ narukvica i $p-u$ prstena.

Kako je $x \in \{0,1,2,\ldots,l\}$, $y \in \{0,1,2,\ldots,n\}$, $u \in \{0,1,2,\ldots,p\}$, zaključujemo da je broj mogućih raspodjela blaga jednak $(l+1)(n+1)(p+1)$.

Dakle, dobivamo jednadžbu $(l+1)(n+1)(p+1) = 1173$.

Rastavimo li broj 1173 na faktore dobivamo $(l+1)(n+1)(p+1) = 3 \cdot 17 \cdot 23$.

Zbog uvjeta da je u sanduku bilo najviše zlatnih prstena, a najmanje zlatnih narukvica zaključujemo da je $p = 22$, $n = 2$, $l = 16$.

U sanduku je bilo 16 zlatnih lančića, dvije narukvice i 22 prstena.

Zadatak B-2.5.

Odredite minimalnu vrijednost funkcije $f : \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{12x^2 + 8x + 4}{(2x+1)^2}$. Za koji x funkcija f postiže minimum?

Prvo rješenje.

Funkciju f zapišimo u obliku:

$$f(x) = \frac{12x^2+8x+4}{(2x+1)^2} = \frac{3(2x+1)^2-4x+1}{(2x+1)^2} = 3+\frac{-4x+1}{(2x+1)^2} = 3+\frac{-2(2x+1)+3}{(2x+1)^2} =$$
$$= 3-\frac{2}{2x+1}+\frac{3}{(2x+1)^2}.$$

Uz supstituciju $\frac{1}{2x+1} = t$ promatramo funkciju $g(t) = 3t^2-2t+3$.

Minimalna vrijednost funkcije g jednaka je $m = \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{36-4}{12} = \frac{32}{12} = \frac{8}{3}$, a postiže se za $t = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{3}$.

Minimalna vrijednost funkcije f jednaka je minimalnoj vrijednosti funkcije g.

Dakle, minimalna vrijednost funkcije f je $\frac{8}{3}$.

Kako funkcija g postiže minimum za $t = \frac{1}{3}$, iz $\frac{1}{2x+1} = \frac{1}{3}$ dobivamo da funkcija f postiže minimum za $x = 1$.

Drugo rješenje.

Označimo $\frac{12x^2+8x+4}{(2x+1)^2} = a$.

Tu jednakost možemo napisati u obliku $12x^2+8x+4 = 4ax^2+4ax+a$, odnosno $(12-4a)x^2+(8-4a)x+4-a = 0$.

Ako je $a = 3$, dobivamo jednadžbu $-4x+1 = 0$. Dakle, za $x = \frac{1}{4}$ funkcija f poprima vrijednost 3.

Ako je $a \neq 3$, dobivamo kvadratnu jednadžbu $(12-4a)x^2+(8-4a)x+4-a = 0$.

Rješenja ove jednadžbe su realni brojevi ako i samo ako je $D \geqslant 0$.

Iz $D \geqslant 0$ dobivamo

$$\begin{aligned}
&(8-4a)^2-4(12-4a)(4-a) \geqslant 0,\\
&64-64a+16a^2-4(48-12a-16a+4a^2) \geqslant 0,\\
&64-64a+16a^2-192+48a+64a-16a^2 \geqslant 0,\\
&48a-128 \geqslant 0,\\
&a \geqslant \frac{128}{48} = \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

Kako je $\frac{12x^2+8x+4}{(2x+1)^2} = a$ i $a \geqslant \frac{8}{3}$ i $\frac{8}{3} \leqslant 3$, zaključujemo da je minimalna vrijednost funkcije f jednaka $\frac{8}{3}$.

Za koji x funkcija f postiže minimum odredit ćemo rješavanjem jednadžbe $f(x)=\frac{8}{3}$, odnosno

$$\frac{12x^2+8x+4}{4x^2+4x+1}=\frac{8}{3}.$$

Dakle, za $x=1$ funkcija f postiže minimum.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

11. svibnja 2021.

Zadatak B-3.1.

Odredite umnožak svih rješenja jednadžbe

$$\sqrt{2021}\, x^{\log_{2021} x} = x^2.$$

Rješenje.

Izraz logaritmiramo:

$$\begin{aligned} \log_{2021} \sqrt{2021} x^{\log_{2021} x} &= \log_{2021} x^2 \\ \log_{2021} \sqrt{2021} + \log_{2021} x^{\log_{2021} x} &= \log_{2021} x^2 \\ \frac{1}{2} + (\log_{2021} x)^2 &= 2 \log_{2021} x. \end{aligned}$$

Supstitucijom $\log_{2021} x = t$ dobivamo kvadratnu jednadžbu $2t^2 - 4t + 1 = 0$ čija su rješenja $t_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$.

Rješenja početne jednadžbe su $x_1 = 2021^{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$ i $x_2 = 2021^{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$.

Sada je $x_1 \cdot x_2 = 2021^{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} \cdot 2021^{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = 2021^2$.

Napomena:

Do umnoška rješenja može se doći i koristeći Vieteove formule, odnosno ako je zbroj rješenja dobivene kvadratne jednadžbe $t_1 + t_2 = -\dfrac{b}{a} = 2$ onda je

$\log_{2021} x_1 + \log_{2021} x_2 = \log_{2021} (x_1 x_2) = 2$.

Stoga je $x_1 x_2 = 2021^2$.

Zadatak B-3.2.

Tenisač Duje je na početku zemljane turneje imao 50% pobjeda. Nakon prvog odigranog turnira na zemlji na kojem je imao tri pobjede i jedan poraz, udio pobjeda mu je bio veći od 52%. Nakon drugog odigranog turnira na zemlji na kojem je imao četiri pobjede i jedan poraz, udio pobjeda mu je bio manji od 56%. Koliko je mečeva Duje odigrao do zemljane turneje ako znamo da je do kraja sezone odigrao dvostruko više mečeva nego prije zemljane turneje i da je pobijedio u 60% mečeva?

Rješenje.

S $2n$ označimo broj mečeva, koje je Duje odigrao prije zemljane turneje. Broj pobjeda je jednak n jer vrijedi $\frac{n}{2n} = 0.5$.

Nakon prvog turnira, 3 pobjede u 4 odigrana meča, vrijedi

$$\begin{aligned}\frac{n+3}{2n+4} &> 0.52\\ 25n+75 &> 26n+52\\ n &< 23.\end{aligned}$$

Znači da je $n \leqslant 22$.

Nakon drugog turnira, 4 pobjede u 5 odigranih mečeva, vrijedi

$$\begin{aligned}\frac{n+7}{2n+9} &< 0.56\\ 25n+175 &< 28n+126\\ n &> \frac{49}{3}.\end{aligned}$$

Dakle, vrijedi $n \geqslant 17$.

Slijedi da je $n \in \{17, 18, 19, 20, 21, 22\}$.

Na kraju sezone vrijedi

$$\begin{aligned}\frac{n+x}{4n} &= 0.6\\ 2.4n &= n+x\\ 1.4n &= x.\end{aligned}$$

Budući da je x prirodan broj, n mora biti jednako 20, odnosno Duje je odigrao 40 mečeva.

Zadatak B-3.3.

Odredite cjelobrojna rješenja nejednadžbe $\frac{x^2-16x+39}{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi x}{4} - 1} \geqslant 0$.

Rješenje.

Zapišimo uvjete za dani izraz.

Zbog domene funkcije tangens je $\frac{\pi x}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pa $x \neq 4k+2,\ k \in \mathbb{Z}$.

Nadalje, iz $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi x}{4}\right) - 1 \neq 0$ slijedi $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi x}{4}\right) \neq 1$ odnosno $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{4}\right) \neq \pm 1$.

Dakle, $\frac{\pi x}{4} \neq \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$ pa $x \neq 4k \pm 1$.

Iz ovih uvjeta slijedi da mora vrijediti $x = 4k, k \in \mathbb{Z}$, budući da tražimo samo cjelobrojna rješenja.

Riješimo sada nejednadžbu. Imamo dva slučaja:

1. slučaj:

$$x^2 - 16x + 39 \geqslant 0$$
$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi x}{4}\right) - 1 > 0$$

Iz $(x-3)(x-13) \geqslant 0$ slijedi $x \in \langle -\infty, 3] \cup [13, \infty\rangle$.

$$\text{Iz } \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi x}{4}\right) > 1 \text{ slijedi}$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{4}\right) < -1 \text{ ili } \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{4}\right) > 1$$
$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < \frac{\pi x}{4} < -\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ ili } \frac{\pi}{4} + k\pi < \frac{\pi x}{4} < \frac{\pi}{2} + k\pi$$
$$-2 + 4k < x < -1 + 4k \text{ ili } 1 + 4k < x < 2 + 4k, k \in \mathbb{Z}.$$

Dakle, to su intervali $\ldots \langle -2, -1\rangle \cup \langle 1, 2\rangle \cup \langle 2, 3\rangle \cup \langle 5, 6\rangle \cup \langle 6, 7\rangle \cup \langle 9, 10\rangle \ldots$.

Zbog uvjeta $x = 4k, k \in \mathbb{Z}$ ovaj slučaj nema rješenja.

2. slučaj:

$$x^2 - 16x + 39 \leqslant 0$$
$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi x}{4}\right) - 1 < 0$$

Iz $(x-3)(x-13) \leqslant 0$ slijedi $x \in [3, 13]$.

$$\text{Iz } \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi x}{4}\right) < 1 \text{ slijedi}$$
$$-1 < \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{4}\right) < 1$$
$$-\frac{\pi}{4} + k\pi < \frac{\pi x}{4} < \frac{\pi}{4} + k\pi$$
$$-\frac{1}{4} + k < \frac{x}{4} < \frac{1}{4} + k$$
$$4k - 1 < x < 4k + 1, k \in \mathbb{Z}.$$

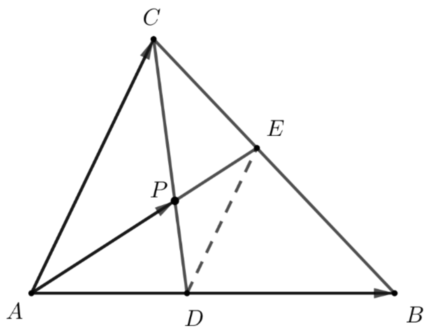
Dakle, $x = 4k, k \in \mathbb{Z}$ i $x \in [3, 13]$ pa je $x \in \{4, 8, 12\}$, što je i konačno rješenje.

Zadatak B-3.4.

U trokutu ABC točka D je na stranici $\overline{AB}$, a točka E na stranici $\overline{BC}$ tako da vrijedi $|AD| : |DB| = |CE| : |EB| = 3 : 4$. Dužine $\overline{AE}$ i $\overline{CD}$ sijeku se u točki P.

Vektor $\overrightarrow{AP}$ izrazite kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$.

Rješenje.



Izrazimo vektor $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$, pri čemu je $\overrightarrow{AD} = \dfrac{3}{7}\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DE} = \dfrac{4}{7}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \dfrac{4}{7}\overrightarrow{AC}$.

Uvrstimo pa je $\overrightarrow{AE} = \dfrac{3}{7}\overrightarrow{AB} + \dfrac{4}{7}\overrightarrow{AC}$.

Vektori $\overrightarrow{AE}$ i $\overrightarrow{AP}$ su kolinearni pa je $\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{AE} = \alpha\left(\dfrac{3}{7}\overrightarrow{AB} + \dfrac{4}{7}\overrightarrow{AC}\right)$

odnosno

$$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{7}\alpha\overrightarrow{AB} + \frac{4}{7}\alpha\overrightarrow{AC} \tag{2}$$

Izrazimo vektor $\overrightarrow{AP}$ na drugi način.

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP}$, pri čemu je $\overrightarrow{CP} = \beta\overrightarrow{CD}$ i

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \dfrac{3}{7}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

Uvrštavanjem dobijemo $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} + \beta\left(\dfrac{3}{7}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)$,

odnosno

$$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{7}\beta\overrightarrow{AB} + (1-\beta)\overrightarrow{AC} \tag{3}$$

Iz dva zapisa vektora $\overrightarrow{AP}$ (1) i (2) slijedi sustav:

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta \\ \frac{4}{7}\alpha &= 1 - \beta. \end{aligned}$$

Rješenje sustava je $\alpha = \beta = \dfrac{7}{11}$.

Konačno, $\overrightarrow{AP} = \dfrac{3}{11}\overrightarrow{AB} + \dfrac{4}{11}\overrightarrow{AC}$.

Zadatak B-3.5.

U kuglu polumjera R upisana je pravilna uspravna četverostrana piramida s vrhom V i osnovkom $ABCD$. Neka je $\cos\sphericalangle AVB = \frac{3}{4}$. Kolika je visina piramide izražena s pomoću R?

Prvo rješenje.

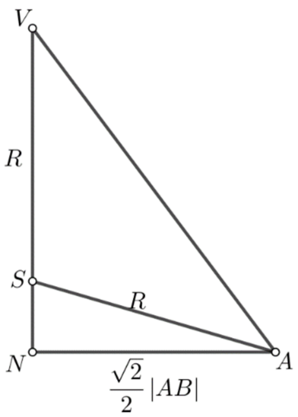
Neka je $ABCD$ osnovka piramide, a N nožište visine iz vrha V.

Pobočka piramide je jednakokračni trokut ABV. Primjenom poučka o kosinusu slijedi

$|AB|^2 = 2|AV|^2 - 2|AV|^2 \cos\sphericalangle AVB = 2|AV|^2 - \frac{3}{2}|AV|^2 = \frac{1}{2}|AV|^2$ pa je $|AV|^2 = 2|AB|^2$.

Nadalje, $|AN| = \frac{\sqrt{2}}{2}|AB|$.

U poprečnom presjeku piramide promotrimo trokute ANV i ANS, gdje je točka S središte, a R polumjer kugle.



Iz pravokutnog trokuta ANV izrazimo visinu piramide VN:

$|VN|^2 = |AV|^2 - |AN|^2 = 2|AB|^2 - \frac{1}{2}|AB|^2 = \frac{3}{2}|AB|^2$, odnosno $|VN| = \frac{\sqrt{6}}{2}|AB|$

Primijenimo Pitagorin poučak u pravokutnom trokutu ANS. Redom dobivamo

$|AN|^2 + |NS|^2 = |AS|^2$

$\frac{1}{2}|AB|^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}|AB| - R\right)^2 = R^2$

$\frac{1}{2}|AB|^2 + \frac{3}{2}|AB|^2 - \sqrt{6}|AB| \cdot R + R^2 = R^2$

Sređivanjem izraza dobivamo $|AB| = \frac{\sqrt{6}}{2}R$.

Konačno, $|VN| = \frac{\sqrt{6}}{2}|AB| = \frac{3}{2}R$.

Drugo rješenje.

Neka je $ABCD$ osnovka piramide, a N nožište visine iz vrha V.

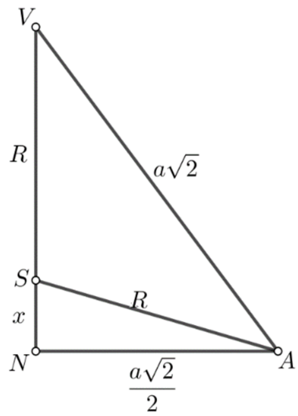
Pobočka piramide je jednakokračni trokut ABV. Neka je $a = |AB|, b = |AV|$.

Kao i u prvom rješenju, duljinu brida $\overline{AV}$ odredit ćemo koristeći poučak o kosinusu:

$a^2 = 2b^2 - 2b^2 \cos \sphericalangle AVB = 2b^2 - \dfrac{3}{2}b^2 = \dfrac{1}{2}b^2$ pa je

$b^2 = 2a^2$, odnosno $b = a\sqrt{2}$.

U poprečnom presjeku piramide promotrimo trokute ANV i ANS, gdje je točka S središte, a $|SV|$ polumjer kugle.



Primijenimo Pitagorin poučak na trokute ANV i ANS.

$(R + x)^2 + a^2 = 2a^2$, odnosno $(R + x)^2 = \dfrac{3}{2}a^2$

$x^2 + \dfrac{1}{2}a^2 = R^2$

Ako iz prve jednadžbe izrazimo a^2 i uvrstimo u drugu jednadžbu, dobivamo kvadratnu jednadžbu

$x^2 + \dfrac{1}{3}(R + x)^2 = R^2$, odnosno $2x^2 + Rx - R^2 = 0$.

Pozitivno rješenje ove jednadžbe jest $x = \dfrac{R}{2}$.

Konačno, visina piramide jest $|VN| = R + \dfrac{R}{2} = \dfrac{3}{2}R$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

11. svibnja 2021.

Zadatak B-4.1.

Prvi red kazališta ima 15 sjedala, a svaki sljedeći red ima dva sjedala više. Ukupan broj sjedala u kazalištu je kvadrat nekog prirodnog broja. Koliko ima redova u tom kazalištu?

Prvo rješenje.

Neka je k broj redova u kazalištu. Ukupan broj sjedala u kazalištu S je jednak sumi aritmetičkog niza:

$S = 15 + 17 + 19 + \cdots + (15 + 2(k-1)) = k^2 + 14k.$

Da bi $k^2 + 14k$ bio potpuni kvadrat, treba mu dodati 49, pa imamo:

$k^2 + 14k + 49 = (k+7)^2 = n^2 + 49,$

$(k + n + 7)(k - n + 7) = 49.$

S obzirom da je $49 = (\pm 1) \cdot (\pm 49)$ ili $49 = (\pm 7) \cdot (\pm 7)$, te da je $k+n+7 > 0$ i $k-n+7 < k+n+7$, zaključujemo da je jedina mogućnost $k - n + 7 = 1$ i $k + n + 7 = 49$.

Iz navedenog sustava jednadžbi dobijemo $k = 18$, odnosno u kazalištu ima 18 redova.

Napomena: Iz $n^2 + 7^2 = (k+7)^2$, učenik može dobiti rješenje i na način da traži "najmanju" Pitagorinu trojku kojoj je jedan član jednak 7, a to je $(7, 24, 25)$. Slijedi $k + 7 = 25$, odnosno $k = 18$.

Drugo rješenje.

Kao i u prvom rješenju, $S = k^2 + 14k$.

S obzirom da $k^2 + 14k$ treba biti potpuni kvadrat, imamo $k^2 + 14k = (k+a)^2$, iz čega slijedi $k = \dfrac{a^2}{14 - 2a} \in \mathbb{N}$, odnosno $2(7-a) \mid a^2$, pa mora vrijediti da je a paran i $a < 7$.

Razmatramo slučajeve:

- za $a = 2$, $k = \frac{4}{10} \notin \mathbb{N}$,
- za $a = 4$, $k = \frac{8}{3} \notin \mathbb{N}$,
- za $a = 6$, $k = \frac{36}{2} = 18$, što je rješenje zadatka.

Zadatak B-4.2.

Riješite sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} &\log_3 |\pi x| + 2 \log_{|\pi x|} 3 = 3, \\ &\sin^2(x+y) + 1 = 2 \sin(x+y). \end{aligned}$$

Rješenje.

Iz prve jednadžbe slijede uvjeti $|\pi x| > 0$ i $|\pi x| \neq 1$, odnosno $x \neq 0$ i $x \neq \pm\frac{1}{\pi}$.

Riješimo prvu jednadžbu:

$$
\begin{aligned}
&\log_3|\pi x| + 2\log_{|\pi x|} 3 = 3,\\
&\log_3|\pi x| + \frac{2}{\log_3|\pi x|} = 3,\\
&\log_3^2|\pi x| - 3\log_3|\pi x| + 2 = 0,\\
&(\log_3|\pi x| - 2)(\log_3|\pi x| - 1) = 0,
\end{aligned}
$$

iz čega slijedi $\log_3|\pi x| = 2$ ili $\log_3|\pi x| = 1$.

Iz $\log_3|\pi x| = 2$ slijedi $|\pi x| = 9$, odnosno $x = \pm\frac{9}{\pi}$.

Iz $\log_3|\pi x| = 1$ slijedi $|\pi x| = 3$, odnosno $x = \pm\frac{3}{\pi}$.

Primijetimo da sva četiri dobivena rješenja zadovoljavaju uvjete dobivene na početku.

Iz druge jednadžbe imamo:

$$
\begin{aligned}
&\sin^2(x+y) + 1 = 2\sin(x+y),\\
&(\sin(x+y) - 1)^2 = 0,\\
&\sin(x+y) = 1,\\
&x + y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},\\
&y = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

Slijedi da su tražena rješenja $(x,y) \in \left\{\left(\pm\frac{9}{\pi}, \frac{\pi}{2} \mp \frac{9}{\pi} + 2k\pi\right), \left(\pm\frac{3}{\pi}, \frac{\pi}{2} \mp \frac{3}{\pi} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Zadatak B-4.3.

Točke A_1, B_1, C_1 su redom na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ trokuta ABC takve da vrijedi:

$$
\frac{|BA_1|}{|BC|} = \frac{|CB_1|}{|CA|} = \frac{|AC_1|}{|AB|} = k.
$$

Odredite k tako da površina trokuta $A_1B_1C_1$ bude najmanja moguća.

Prvo rješenje.

Označimo s α, β i γ redom kuteve uz vrhove A, B i C trokuta ABC.

Kako je $P_{ABC} = \dfrac{|AC|\cdot|BC|\sin\gamma}{2} = \dfrac{|AB|\cdot|BC|\sin\beta}{2} = \dfrac{|AB|\cdot|AC|\sin\alpha}{2}$, imamo:

$$
\begin{aligned}
P_{AC_1B_1} &= \frac{|AC_1|\cdot|AB_1|\sin\alpha}{2} = \frac{k|AB|\cdot(|AC| - k|AC|)\sin\alpha}{2} = k(1-k)P_{ABC},\\
P_{BA_1C_1} &= \frac{|BA_1|\cdot|BC_1|\sin\beta}{2} = \frac{k|BC|\cdot(|AB| - k|AB|)\sin\beta}{2} = k(1-k)P_{ABC},\\
P_{CB_1A_1} &= \frac{|CB_1|\cdot|CA_1|\sin\gamma}{2} = \frac{k|CA|\cdot(|BC| - k|BC|)\sin\gamma}{2} = k(1-k)P_{ABC}.
\end{aligned}
$$

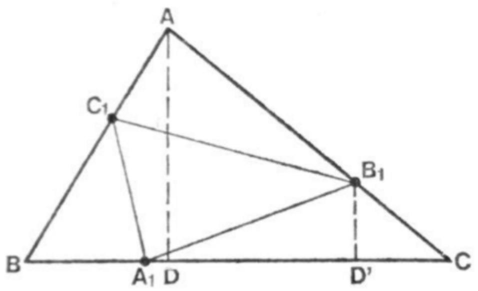
Sada za površinu trokuta $A_1B_1C_1$ imamo:

$$\begin{aligned} P_{A_1B_1C_1} &= P_{ABC} - P_{AC_1B_1} - P_{BA_1C_1} - P_{CB_1A_1} = \\ &= P_{ABC} - 3k(1-k)P_{ABC} = (1-3k(1-k))P_{ABC} = \\ &= (3k^2-3k+1)P_{ABC}. \end{aligned}$$

Funkcija $f(k) = 3k^2 - 3k + 1$ postiže minimum za $k = -\dfrac{-3}{2 \cdot 3} = \dfrac{1}{2}$.

Drugo rješenje.

Neka je točka D nožište visine iz vrha A na $\overline{BC}$, a točka D' nožište okomice iz točke B_1 na $\overline{BC}$.



Trokuti ADC i $B_1D'C$ su slični (oba su pravokutna, imaju zajednički kut u vrhu C, kutovi $\sphericalangle DAC$ i $\sphericalangle D'B_1C$ imaju paralelne krakove). Slijedi da su im stranice proporcionalne. Budući je $|CB_1|/|CA| = k$, slijedi da je $|B_1D'|/|AD| = k$, odnosno vrijedi $|B_1D'| = k|AD|$.

Iz $\dfrac{|BA_1|}{|BC|} = \dfrac{|CB_1|}{|CA|} = \dfrac{|AC_1|}{|AB|} = k$ i $|A_1C| = |BC| - |BA_1|$ slijedi

$$\frac{|A_1C|}{|BC|} = \frac{|BC| - |BA_1|}{|BC|} = 1 - k \Rightarrow |A_1C| = (1-k)|BC|.$$

Kako je $P_{ABC} = \dfrac{1}{2}|BC| \cdot |AD|$, imamo:

$$\begin{aligned} P_{A_1CB_1} &= \frac{1}{2}|A_1C| \cdot |B_1D'| = \\ &= \frac{1}{2}(1-k)k|BC| \cdot |AD| = \\ &= (1-k)kP_{ABC}. \end{aligned}$$

Analogno, $P_{B_1AC_1} = (1-k)kP_{ABC}$ i $P_{C_1BA_1} = (1-k)kP_{ABC}$ te je

$$P_{A_1B_1C_1} = P_{ABC} - 3k(1-k)P_{ABC} = (3k^2 - 3k + 1)P_{ABC}.$$

Najmanju ćemo površinu dobiti kada je $3k^2 - 3k + 1$ najmanje, što vrijedi za $k = -\dfrac{-3}{2 \cdot 3} = \dfrac{1}{2}$.

Zadatak B-4.4.

Odredite sve polinome p s realnim koeficijentima za koje je jednakost

$$x \cdot p(x-1) = (x-2021) \cdot p(x)$$

ispunjena za sve realne brojeve x.

Rješenje.

Uvrštavanjem u danu jednakost prirodnih brojeva $0, 1, \ldots, 2020$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
&x = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = -2021 \cdot p(0) \quad \Rightarrow \quad p(0) = 0, \\
&x = 1 \quad \Rightarrow \quad p(0) = -2020 \cdot p(1) \quad \Rightarrow \quad p(1) = 0, \\
&x = 2 \quad \Rightarrow \quad 2p(1) = -2019 \cdot p(2) \quad \Rightarrow \quad p(2) = 0, \\
&\quad \vdots \\
&x = 2020 \quad \Rightarrow \quad 2020p(2019) = -p(2020) \quad \Rightarrow \quad p(2020) = 0.
\end{aligned}$$

Iz zadane jednakosti je očito da iz $p(x-1) = 0$ slijedi da je $p(x) = 0$ za sve prirodne brojeve $x < 2021$.

Zaključujemo da su $0, 1, 2, \ldots, 2020$ nultočke polinoma p, pa je

$$p(x) = q(x) \cdot x(x-1)(x-2) \cdots (x-2020)$$

za neki polinom $q(x)$.

Sada iz zadane jednakosti $x \cdot p(x-1) = (x-2021) \cdot p(x)$ imamo:

$$x \cdot q(x-1) \cdot (x-1)(x-2) \cdots (x-2021) = (x-2021) \cdot q(x) \cdot x(x-1)(x-2) \cdots (x-2020)$$

iz čega slijedi da je $q(x-1) = q(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$, odnosno $q(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$.

Traženi polinomi p su oblika $p(x) = c \cdot x(x-1)(x-2) \cdots (x-2020)$, $c \in \mathbb{R}$.

Zadatak B-4.5.

Andro i Borna naizmjence bacaju simetričnu kocku čije su stranice označene brojevima 1, 2, 3, 4, 5 i 6. Pobjednik je onaj koji prvi dobije šesticu. Ako Andro počinje igru, kolika je vjerojatnost da Borna pobijedi?

Rješenje.

Da bi nakon svog prvog bacanja Borna pobijedio, Andro u prvom bacanju mora dobiti broj različit od 6, a Borna broj 6. Kako je vjerojatnost dobitka šestice u jednom bacanju jednaka $\frac{1}{6}$, a broja različitog od šest $\frac{5}{6}$, slijedi da je vjerojatnost da Borna pobijedi nakon svog prvog bacanja jednaka $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$.

Slično, da bi Borna pobijedio nakon svog drugog bacanja, Andro u svoja dva prva bacanja te Borna u svom prvom bacanju ne smiju dobiti šesticu, koju treba dobiti Borna u svom drugom bacanju. Navedeni događaj će se ostvariti s vjerojatnošću $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6}$.

Analogno zaključujemo da je vjerojatnost da Borna pobijedi u svom $n-$tom bacanju jednaka

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{2n-1}\cdot\frac{1}{6},$$

pa je šansa Bornine pobjede p jednaka beskonačnoj sumi

$$\begin{aligned} p &= \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^{3}\cdot\frac{1}{6}+\cdots+\left(\frac{5}{6}\right)^{2n-1}\cdot\frac{1}{6}+\cdots \\ &= \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^{3}+\cdots+\left(\frac{5}{6}\right)^{2n-1}+\cdots\right). \end{aligned}$$

Izraz u zagradi je geometrijski red s prvim članom $\frac{5}{6}$ i kvocijentom $\left(\frac{5}{6}\right)^{2}<1$, pa njegova suma postoji i jednaka je $\dfrac{\frac{5}{6}}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{2}}=\dfrac{30}{11}$.

Sada je vjerojatnost za Borninu pobjedu jednaka $p=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{30}{11}=\dfrac{5}{11}$.