HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

drugo kolo – utorak, 23. lipnja 2020.

Rješenja zadataka za 4. razred

1. zadatak

Točno u 9 sati Petar je istovremeno zapalio dvije svijeće, duljina 29 cm i 34 cm. Poznato je da 2 mm kraće svijeće izgori za 4 minute, a 2 mm dulje svijeće za 3 minute. Nakon nekog vremena, Petar je primijetio da je jedna svijeća dulja od druge za 2 cm. U koliko sati se to moglo dogoditi?

Rješenje:

Prvi način

Kraća se svijeća za 4 minute smanji za 2 mm, pa se za 1 sat smanji 15 · 2 = 30 mm = 3 cm.

Dulja se svijeća za 3 minute smanji za 2 mm, pa se za 1 sat smanji 20 · 2 = 40 mm = 4 cm.

Dakle, svakim se satom razlika njihovih duljina smanjuje za 1 cm.

Kako je početna razlika u duljinama 34 – 29 = 5 cm, od paljenja tih svijeća proći će 3 sata da bi razlika bila 2 cm. Dakle, u 12:00.

No, dulja svijeća gori brže pa promotrimo situaciju kad će od nje ostati manji dio nego od kraće svijeće.

Kako je početna razlika u duljinama 5 cm, a svakim se satom razlika smanjuje za 1 cm, nakon 5 sati te će svijeće biti jednakih visina.

To znači da nakon još 2 sata, razlika njihovih duljina opet biti 2 cm.

Kako je 29 : 3 = 9 i ostatak 2, a 34 : 4 = 8 i ostatak 2, obje svijeće će gorjeti više od 8 sati.

To znači da će razlika opet biti 2 cm i to 7 sati od paljenja. Dakle, u 16:00.

Drugi način

Kraća se svijeća za 4 minute smanji za 2 mm, pa se za 1 sat smanji 15 · 2 = 30 mm = 3 cm.

Dulja se svijeća za 3 minute smanji za 2 mm, pa se za 1 sat smanji 20 · 2 = 40 mm = 4 cm.

U 9:00 duljine svijeća su 29 cm i 34 cm.

U 10:00 duljine svijeća su 26 cm i 30 cm.

U 11:00 duljine svijeća su 23 cm i 26 cm.

U 12:00 duljine svijeća su 20 cm i 22 cm, pa je razlika u njihovim duljinama 2 cm.

U 13:00 duljine svijeća su 17 cm i 18 cm.

U 14:00 duljine svijeća su 14 cm i 14 cm.

U 15:00 duljine svijeća su 11 cm i 10 cm.

U 16:00 duljine svijeća su 8 cm i 6 cm, pa je razlika u njihovim duljinama 2 cm.

Nakon toga razlika njihovih duljina se povećava, sve dok jedna svijeća ne izgori.

Treći način (skica)

gorenje kraće svijeće: 2 mm za 4 min
1 cm za 20 min
3 cm za 1 h

gorenje dulje svijeće: 2 mm za 3 min
1 cm za 15 min
4 cm za 1 h

proteklo vrijeme u satima	0	1	2	3	4	5	6	7
duljina kraće svijeće u cm	29	26	23	20	17	14	11	8
duljina dulje svijeće u cm	34	30	26	22	18	14	10	6

Razlika duljina svijeća od 2 cm biti će u 12:00 i 16:00 sati.

Četvrti način (skica)

Za 12 minuta, prva svijeća se smanji za 6 mm, a druga za 8 mm.

Neka je proteklo x puta po 12 minuta.

Tada je duljina prve svijeće u milimetrima $290 - 6x$, a druge svijeće $340 - 8x$.

Dvije svijeće će biti jednake ako vrijedi

$$(290 - 6x) + 20 = 340 - 8x \quad \text{ili} \quad 290 - 6x = (340 - 8x) + 20$$

Rješenje prve jednadžbe je $x = 15$, a druge jednadžbe $x = 35$.

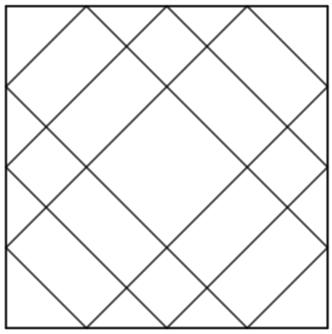
U prvom slučaju je proteklo $15 \cdot 12 = 180$ minuta, odnosno 3 sata.

U drugom slučaju je proteklo $35 \cdot 12 = 420$ minuta, odnosno 7 sati.

Razlika duljina svijeća od 2 cm biti će u 12:00 i 16:00 sati.

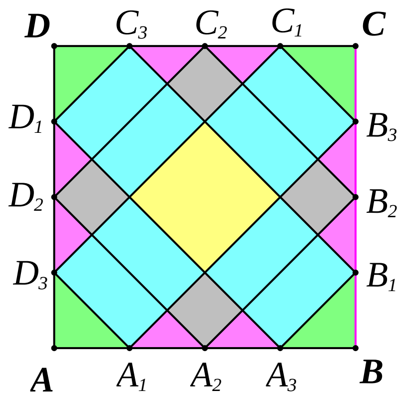
2. zadatak

U kvadrat na slici ucrtana su tri pravokutnika s vrhovima na stranicama kvadrata. Koliko je različitih trokuta, a koliko različitih pravokutnika na slici?



Rješenje:

Dužine koje su nacrtane dijele početni kvadrat na manje trokute i pravokutnike koji se ne preklapaju, a koje ćemo zvati **osnovni trokuti i pravokutnici**. Svi ostali trokuti i pravokutnici se sastoje od osnovnih.



Kvadrat je podijeljen na 8 malih (ružičastih) i 4 veća (zelena) osnovna trokuta te 4 mala (siva) osnovna kvadrata, 8 srednjih (plavih) osnovnih pravokutnika i 1 veći (žuti) osnovni kvadrat.

Trokuti:

- 8 ružičastih trokuta
- 4 zelena trokuta
- 4 trokuta koja se sastoje od 2 ružičasta trokuta i 1 sivog kvadrata
- 4 trokuta koje čine 1 zeleni trokut, 2 ružičasta trokuta i 1 plavi pravokutnik
- 4 trokuta koje čine 1 zeleni trokut, 4 ružičasta trokuta, 2 siva kvadrata i 2 plava pravokutnika

Ukupno ima 24 trokuta.

Pravokutnici (brojeni redom prema broju osnovnih pravokutnika od kojih se sastoje):

- 1 žuti kvadrat
- 4 siva kvadrata
- 8 plavih pravokutnika
- 4 kvadrata koja čine po dva plava pravokutnika
- 4 pravokutnika koja čine plavi pravokutnik i žuti kvadrat
- 8 pravokutnika koja čine plavi pravokutnik i sivi kvadrat
- 4 pravokutnika koja čine plavi pravokutnik i dva siva kvadrata
- 6 pravokutnika koja čine po dva plava pravokutnika i žuti kvadrat
- 4 pravokutnika koja čine po tri plava pravokutnika i žuti kvadrat
- 4 kvadrata koja čine žuti kvadrat, jedan sivi kvadrat i dva plava pravokutnika
- 2 pravokutnika koja čine po četiri plava pravokutnika i žuti kvadrat
- 4 pravokutnika koja čine žuti kvadrat, dva siva kvadrata i tri plava pravokutnika
- 1 kvadrat kojeg čine žuti kvadrat, četiri siva kvadrata i četiri plava pravokutnika
- 1 početni kvadrat

Ukupno ima 55 pravokutnika.

3. zadatak

Broj se naziva *zanimljivim* ako su mu sve znamenke međusobno različite, a njegova prva znamenka jednaka je zbroju svih ostalih znamenaka. Na primjer, zanimljivi su brojevi 321 i 80413. Koliko ima zanimljivih brojeva?

Rješenje:

Najprije primijetimo da broj može imati 3, 4 ili 5 znamenaka. Ne može više, jer je 0+1+2+3+4= 10.

Troznamenkasti brojevi:

$3 = 1 + 2$

$4 = 1 + 3$

$5 = 1 + 4 = 2 + 3$

$6 = 1 + 5 = 2 + 4$

$7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4$

$8 = 1 + 7 = 2 + 6 = 3 + 5$

$9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5$

To je 16 mogućnosti, no poredak druge i treće znamenke može biti po volji, pa ima ukupno $16 \cdot 2 = 32$ troznamenkastih zanimljivih brojeva.

Kod četveroznamenkastih imamo svih 16 kombinacija kao kod troznamenkastih jer njima možemo dodati pribrojnik 0 (npr. $6 = 0 + 2 + 4$), te imamo još dodatnih 7 mogućnosti:

$6 = 1 + 2 + 3$

$7 = 1 + 2 + 4$

$8 = 1 + 2 + 5 = 1 + 3 + 4$

$9 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 2 + 3 + 4$

To je ukupno $16 + 7 = 23$ različitih zbrojeva. Svaki zbroj daje šest zanimljivih brojeva jer znamenke (osim prve) mogu zamijeniti mjesta. Zato je ukupan broj četveroznamenkastih zanimljivih brojeva $23 \cdot 6 = 138$.

Kod peteroznamenkastih nisu moguće kombinacije bez 0, jer je $1 + 2 + 3 + 4 > 9$.

Dakle, imamo istih 7 mogućnosti kao kod četveroznamenkastih brojeva bez nule, te u svakoj mogućnosti dodajemo 0 (npr. $8 = 0 + 1 + 3 + 4$).

Svaki zbroj daje 24 zanimljivih brojeva jer zadnje 4 znamenke možemo rasporediti na $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ načina. Dakle, peteroznamenkastih zanimljivih brojeva ima $7 \cdot 24 = 168$.

Ukupno ima $168 + 138 + 32 = 338$ zanimljivih brojeva.

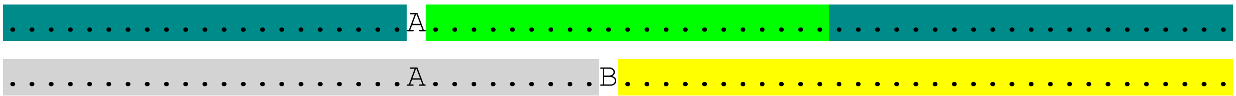
4. zadatak

Antun i Branko sudjelovali su u utrci. Svi su trkači završili utrku, a nikoja dva nisu završila utrku u isto vrijeme. Broj trkača koji su završili utrku prije Antuna dva je puta manji od broja trkača koji su završili nakon njega. Broj trkača koji su završili utrku prije Branka jednak je broju trkača koji su završili nakon njega. Točno 15 trkača završilo je utrku nakon Antuna, a prije Branka. Koliko je trkača sudjelovalo na utrci?

Rješenje:

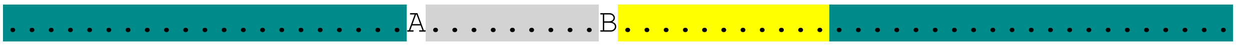
Prvi način

Uočimo da je Branko završio utrku na sredini, a Antun ima više trkača nakon sebe, nego prije sebe, pa je Antun završio utrku ispred Branka. Označimo na crtežu Antunov (A) i Brankov (B) položaj.



Obojeni blokovi u svakom redu su jednaki.

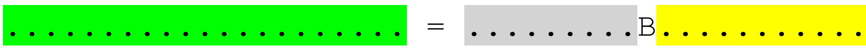
Zato je na sljedećoj slici sivi blok za jedan manji od žutog bloka:



Prema uvjetu zadatka imamo:

 = 15

 = 15 + 1 = 16



= 15 + 1 + 16 = 32

Ukupno je sudjelovalo 3· 32 + 1 = 97 trkača.

Drugi način

Neka je A broj trkača koji su završili utrku prije Antuna, a B broj trkača koji su završili nakon Branka. Uočimo da je Branko završio utrku na sredini, a Antun ima više trkača nakon sebe, nego prije sebe, pa je Antun završio utrku ispred Branka. Broj trkača možemo grafički prikazati ovako:

$$A \,\_\, \text{Antun} \,\_\, 15 \,\_\, \text{Branko} \,\_\, B.$$

Tada vrijedi

$$2A = 16 + B \quad \text{i} \quad A + 16 = B.$$

Uvrštavanjem $B = A + 16$ u prvu jednadžbu dobivamo $2A = 16 + A + 16$, odnosno $A + A = 32 + A$.

Dobivamo $A = 32$ i slijedi $B = A + 16 = 48$.

Ukupno je na utrci sudjelovalo $A + B + 17 = 97$ trkača.

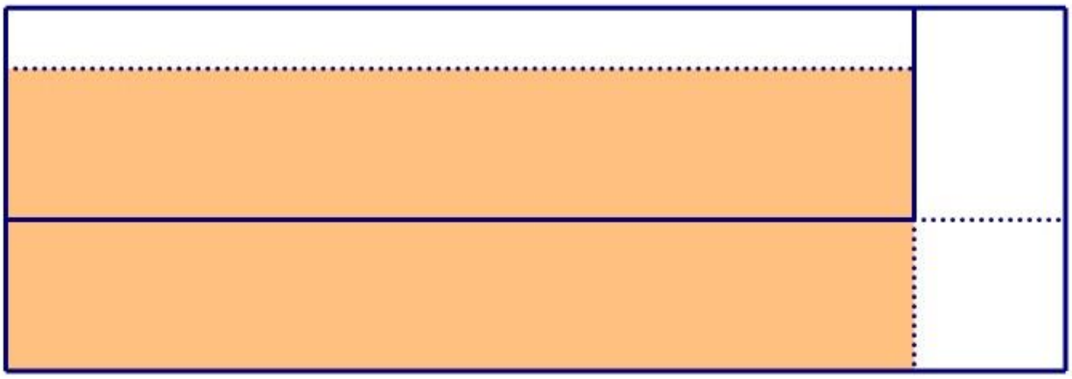
5. zadatak

Lidija i Klara igraju se s hrpom jednakih štapića. Svaka od njih je od određenog broja štapića napravila rub pravokutnika. Svaka stranica Klarinog pravokutnika napravljena je s 5 štapića više od odgovarajuće stranice Lidijinog pravokutnika, a površina Klarinog pravokutnika dvostruko je veća od površine Lidijinog pravokutnika. Koliko je štapića, za rub svog pravokutnika, mogla upotrijebiti Lidija?

Rješenje:

Produljivanjem stranica za štapića dobivamo sljedeći pravokutnik:

Prema uvjetu zadatka površina novonastalog pravokutnika dva puta je veća od površine početnog, što zapravo znači da su površine plavog i ljubičastog dijela na slici jednake.



Označene površine na gornjem pravokutniku su jednake. Ako ih uklonimo iz dijelova jednakih površina, ostat će nam dijelovi jednakih površina.

Prema tome, preostali dijelovi ljubičastog i plavog dijela su jednakih površina.

Označene površine na gornjem pravokutniku su jednake. Ako ih uklonimo iz dijelova jednakih površina, ostat će nam dijelovi jednakih površina.

Prema tome, preostali dijelovi ljubičastog i plavog dijela su jednakih površina.

Preostali plavi dio površine sastoji se od dva kvadrata sa stranicom duljine 5 štapića. Uzmemo li za osnovnu mjernu jedinicu duljinu štapića, površina plavog dijela iznosi $5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 = 50$.

Zato je umnožak duljina stranica preostalog pravokutnika ljubičaste boje (izraženih brojem štapića) jednak 50.

Mogućnosti su:

I. širina 1 štapić i duljina 50 štapića
II. širina 2 štapića i duljina 25 štapića
III. širina 5 štapića i duljina 10 štapića.

Duljine stranica početnog pravokutnika su za 5 štapića veće.

Moguće duljine stranica početnog pravokutnika su:

I. širina 6 štapića i duljina 55 štapića
II. širina 7 štapića i duljina 30 štapića
III. širina 10 štapića i duljina 20 štapića.

Lidija je za rub svog pravokutnika mogla upotrijebiti

I. $2 \cdot 6 + 2 \cdot 55 = 122$ štapića
II. $2 \cdot 7 + 2 \cdot 30 = 74$ štapića
III. $2 \cdot 10 + 2 \cdot 20 = 60$ štapića.