HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

drugo kolo – utorak, 23. lipnja 2020.

Rješenja zadataka za 5. razred

1. zadatak

Ako troznamenkastom broju obrišemo jednu znamenku, dobivamo dvoznamenkasti broj šest puta manji od početnog troznamenkastog broja. Odredi sve brojeve s tim svojstvom.

Rješenje:

Neka je $\overline{abc}$ troznamenkasti broj.

1. slučaj. Ako obrišemo znamenku a dobije se dvoznamenkasti broj $\overline{bc}$.

Prema uvjetu zadatka mora vrijediti: $\overline{abc} = 6 \cdot \overline{bc}$

$100a + 10b + c = 6 \cdot (10b + c)$

$100a + 10b + c = 60b + 6c$

$100a = 50b + 5c$

$20a = 10b + c$

Zbog djeljivosti s 10 slijedi da je $c = 0$.

Prema tome je $20a = 10b$ odn. $2a = b$. Slijede mogućnosti:

$a = 1, b = 2$ ➔ broj 120

$a = 2, b = 4$ ➔ broj 240

$a = 3, b = 6$ ➔ broj 360

$a = 4, b = 8$ ➔ broj 480

2. slučaj. Ako obrišemo znamenku b dobije se dvoznamenkasti broj $\overline{ac}$.

Prema uvjetu zadatka mora vrijediti: $\overline{abc} = 6 \cdot \overline{ac}$

$100a + 10b + c = 6 \cdot (10a + c)$

$100a + 10b + c = 60a + 6c$

$40a + 10b = 5c$

$8a + 2b = c$

Kako je c znamenka, slijedi da je $a = 1, b = 0, c = 8$ ➔ broj 108

<u>3. slučaj</u>. Ako obrišemo znamenku c dobije se dvoznamenkasti broj $\overline{ab}$.

Prema uvjetu zadatka mora vrijediti: $\overline{abc} = 6 \cdot \overline{ab}$

$100a + 10b + c = 6 \cdot (10a + b)$

$100a + 10b + c = 60a + 6b$

$40a + 4b + c = 0$

Jednakost vrijedi samo za $a = b = c = 0$ što ne daje troznamenkasti broj.

⇨ Traženi brojevi su 120, 240, 360, 480 i 108.

2. zadatak

Fran i Leon sudjelovali su u utrci. Svi su trkači završili utrku, a nikoja dva nisu završila utrku u isto vrijeme. Broj trkača koji su završili utrku prije Frana jednak je broju trkača koji su završili nakon njega. Broj trkača koji su završili utrku prije Leona dva je puta manji od broja trkača koji su završili nakon njega. Točno 15 trkača završilo je utrku između njih dvojice. Koliko je trkača sudjelovalo na utrci?

Rješenje:
Prvi način

Uočimo da je Fran završio utrku na sredini, a Leon ima više trkača nakon sebe, nego prije sebe, pa je Leon završio utrku ispred Frana. Označimo na crtežu Leonov (A) i Franov (B) položaj.

......................A..

......................A.........B................................

Obojeni blokovi u svakom redu su jednaki.

Zato je na sljedećoj slici sivi blok za jedan manji od žutog bloka:

......................A.........B...............................

Prema uvjetu zadatka imamo:

.... = 15

.... = 15 + 1 = 16

.... = ...B........... = 15 + 1 + 16 = 32

Ukupno je sudjelovalo 3· 32 + 1 = 97 trkača.

Drugi način

Neka je A broj trkača koji su završili utrku prije Leona, a B broj trkača koji su završili nakon Frana. Uočimo da je Fran završio utrku na sredini, a Leon ima više trkača nakon sebe, nego prije sebe, pa je Leon završio utrku ispred Frana. Broj trkača možemo grafički prikazati ovako:

$$A\ \_\ \text{Leon}\ \_\ 15\ \_\text{Fran}\ \_\ B.$$

Tada vrijedi

$$2A = 16 + B \quad \text{i} \qquad A + 16 = B.$$

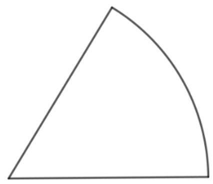
Uvrštavanjem B = A + 16 u prvu jednadžbu dobivamo 2A = 16 + A +16.

Dobivamo A = 32 i slijedi B = A + 16 = 48.

Ukupno je na utrci sudjelovalo A + B + 17 = 97 trkača.

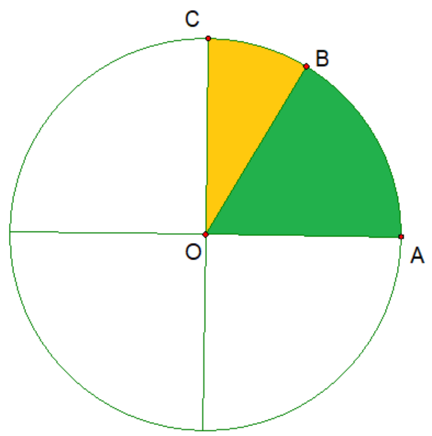
3. zadatak

Na školskom igralištu nacrtan je veliki krug. Središte kruga je točka O, a na rubu su označene točke A, B i C. Pritom su kutovi $\measuredangle AOB$ i $\measuredangle BOC$ šiljasti, a dužine $\overline{OA}$ i $\overline{OC}$ međusobno su okomite. Dio kruga omeđen dužinama $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ i kružnim lukom $\widehat{AB}$ obojen je zelenom bojom, a dio kruga omeđen dužinama $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ i kružnim lukom $\widehat{BC}$ obojen je narančastom bojom. Ivica je svojim stopama izmjerio da je opseg kruga 240 stopa te da je opseg zelenog lika za 18 stopa veći od opsega narančastog lika. Ako je površina čitavog kruga 72 m^2, kolika je površina narančastog lika?



Napomena: Opseg geometrijskog lika je duljina njegovog ruba.

Rješenje:



Narančasti i zeleni kružni isječak zajedno čine četvrtinu kruga koju omeđuje dio kružnice (ili kružni luk) duljine 240 : 4 = 60 stopa.

Zeleni isječak omeđen je dvama polumjerima i kružnim lukom $\widehat{AB}$, a narančasti isječak dvama polumjerima i kružnim lukom $\widehat{BC}$.

Opseg zelenog isječka je 2r + $|\widehat{AB}|$, a opseg narančastog isječka 2r + $|\widehat{BC}|$.

Opseg zelenog isječka je za 18 stopa veći pa vrijedi

2r + $|\widehat{BC}|$ + 18 = 2r + $|\widehat{AB}|$. Odatle slijedi da je $|\widehat{BC}|$ + 18 stopa = $|\widehat{AB}|$.

Kako oba kružna luka zajedno čine četvrtinu kružnice,

vrijedi 2$|\widehat{BC}|$ + 18 stopa = 60 stopa, odnosno $|\widehat{BC}|$ = 21 stopa, $|\widehat{AB}|$ = 39 stopa.

Površina kruga je 72 m^2, pa je površina kružnog isječka kojem pripada kružni luk duljine 1 stope 72 : 240 = 0.3 m^2.

Površina narančastog kružnog isječka je 21 · 0.3 = 6.3 m^2.

4. zadatak

Koliko ima peteroznamenkastih brojeva djeljivih s tri kojima su sve znamenke različite?

Prvo rješenje:

Broj je djeljiv s tri ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 3.

Podijelimo znamenke ovako: A = {0,3,6,9}, B = {1,4,7}, C = {2,5,8}.

U prvoj grupi su znamenke djeljive s 3. Bilo koja znamenka iz druge grupe zbrojena sa bilo kojom znamenkom iz treće grupe daje broj djeljiv s tri. Za broj koji je djeljiv s 3 imamo tri mogućnosti za odabir njegovih znamenaka:

a) po dvije znamenke iz skupova B i C, jedna iz A,

b) po jedna znamenka iz B i C, tri iz A,

c) sva tri broja iz B odnosno C i dva broja iz A.

Još treba razlikovati koristimo li znamenku 0 ili ne.

Ako se ne koristi 0, onda imamo pod a) $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ mogućnosti, pod b) $3 \cdot 3 \cdot 1 = 9$, pod c) $3 \cdot 2 = 6$. Ukupno 42.

Ako se koristimo 0, pod a) imamo $3 \cdot 3 \cdot 1 = 9$ mogućnosti, pod b) $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$, a pod c) $3 \cdot 2 = 6$. Ukupno 42.

Ako se ne koristi znamenka 0, možemo permutirati znamenke na $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ načina.

Ako se pojavljuje znamenka 0, onda imamo samo $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120 - 24 = 96$ mogućnosti.

Traženo rješenje je $42 \cdot 120 + 42 \cdot 96 = 9072$.

Drugo rješenje:

Broj je djeljiv s tri ako i samo ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 3. Odredimo najprije koliki taj zbroj može biti. Najmanji mogući zbroj različitih znamenaka peteroznamenkastog broja je 1 + 0 + 2 + 3 + 4 = 10, a najveći je 9 + 8 + 7 + 6 + 5 = 35.

Kako tražimo peteroznamenkaste brojeve djeljive brojem 3, zbroj njihovih znamenaka mora biti djeljiv s 3. Mogući zbrojevi znamenaka su: 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30 i 33.

Zbroj znamenaka	Znamenke bez 0	Broj takvih brojeva	Znamenke s 0	Broj takvih brojeva
12			1, 0, 2, 3, 6	$4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$
			1, 0, 2, 4, 5	96
15	1, 2, 3, 4, 5	$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$	1, 0, 2, 3, 9	96
			1, 0, 2, 4, 8	96
			1, 0, 2, 5, 7	96
			1, 0, 3, 4, 7	96
			1, 0, 3, 5, 6	96

			2, 0, 3, 4, 6	96
18	1, 2, 3, 4, 8	120	1, 0, 2, 6, 9	96
	1, 2, 3, 5, 7	120	1, 0, 2, 7, 8	96
	1, 2, 4, 5, 6	120	1, 0, 3, 5, 9	96
			1, 0, 3, 6, 8	96
			1, 0, 4, 5, 8	96
			1, 0, 4, 6, 7	96
			2, 0, 3, 4, 9	96
			2, 0, 3, 5, 8	96
			2, 0, 3, 6, 7	96
			2, 0, 4, 5, 7	96
			3, 0, 4, 5, 6	96
21	1, 2, 3, 6, 9	120	1, 0, 3, 8, 9	96
	1, 2, 3, 7, 8	120	1, 0, 4, 7, 9	96
	1, 2, 4, 5, 9	120	1, 0, 5, 7, 8,	96
	1, 2, 4, 6, 8	120	1, 0, 5, 6, 9	96
	1, 2, 5, 6, 7	120	2, 0, 3, 7, 9	96
	1, 3, 4, 5, 8	120	2, 0, 4, 6, 9	96
	1, 3, 4, 6, 7	120	2, 0, 4, 7, 8	96
	2, 3, 4, 5, 7	120	2, 0, 5, 6, 8	96
			3, 0, 4, 5, 9	96
			3, 0, 4, 6, 8	96
			3, 0, 5, 6, 7	96
24	1, 2, 4, 8, 9	120	1, 0, 6, 8, 9	96
	1, 2, 5, 7, 9	120	2, 0, 5, 8, 9	96
	1, 2, 6, 7, 8	120	2, 0, 6, 7, 9	96
	1, 3, 4, 7, 9	120	3, 0, 4, 8, 9	96
	1, 3, 5, 6, 9	120	3, 0, 5, 7, 9	96
	1, 3, 5, 7, 8	120	3, 0, 6, 7, 8	96
	1, 4, 5, 6, 8	120	4, 0, 5, 6, 9	96
	2, 3, 4, 6, 9	120	4, 0, 5, 7, 8	96
	2, 3, 4, 7, 8	120		
	2, 3, 5, 6, 8	120		
	2, 4, 5, 6, 7	120		
27	1, 2, 7, 8, 9	120	3, 0, 7, 8, 9	96
	1, 3, 6, 8, 9	120	4, 0, 6, 8, 9	96
	1, 4, 5, 8, 9	120	5, 0, 6, 7, 9	96
	1, 4, 6, 7, 9	120		
	1, 5, 6, 7, 8	120		
	2, 3, 5, 8, 9	120		
	2, 3, 6, 7, 9	120		
	2, 4, 5, 7, 9	120		
	2, 4, 6, 7, 8	120		
	3, 4, 5, 6, 9	120		
	3, 4, 5, 7, 8	120		
30	1, 5, 7, 8, 9	120	6, 0, 7, 8, 9	96
	2, 4, 7, 8, 9	120		
	2, 5, 6, 8, 9	120		
	3, 4, 6, 8, 9	120		
	3, 5, 6, 7, 9	120		
	4, 5, 6, 7, 8	120		
33	3, 6, 7, 8, 9	120		
	4, 5, 7, 8, 9	120		

Ukupno ih ima $42 \cdot 120 + 42 \cdot 96 = 42 \cdot 216 = 9072$.

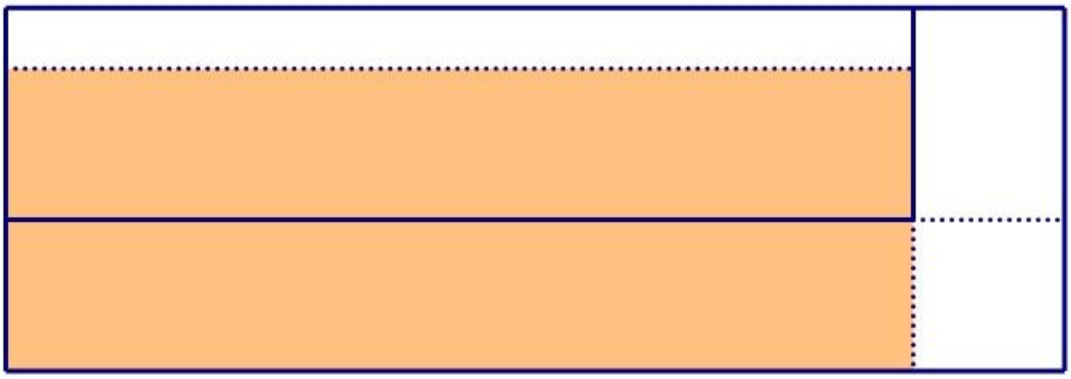
5. zadatak

Duljine svih stranica pravokutnika, izražene u centimetrima, prirodni su brojevi. Povećamo li širinu i visinu tog pravokutnika za 10 cm, njegova će se površina udvostručiti. Odredi dimenzije svih takvih pravokutnika.

Rješenje:

Produljivanjem stranica za 10 cm dobivamo sljedeći pravokutnik:

Prema uvjetu zadatka površina novonastalog pravokutnika dva puta je veća od površine početnog, što zapravo znači da su površine plavog i ljubičastog dijela na slici jednake.



Označene površine na gornjem pravokutniku su jednake. Ako ih uklonimo iz dijelova jednakih površina, ostat će nam dijelovi jednakih površina.

Prema tome, preostali dijelovi ljubičastog i plavog dijela su jednakih površina.

Označene površine na gornjem pravokutniku su jednake. Ako ih uklonimo iz dijelova jednakih površina, ostat će nam dijelovi jednakih površina.

Prema tome, preostali dijelovi ljubičastog i plavog dijela su jednakih površina.

Preostali plavi dio površine sastoji se od dva kvadrata sa stranicom duljine 10 cm, ukupne površine $100\ cm^2 + 100\ cm^2 = 200\ cm^2$. Znači, preostali pravokutnik ljubičaste boje ima površinu $200\ cm^2$.

Moguće duljine stranica tog pravokutnika su:

I. 1 cm i 200 cm
II. 2 cm i 100 cm
III. 4 cm i 50 cm
IV. 5 cm i 40 cm
V. 8 cm i 25 cm
VI. 10 cm i 20 cm.

Moguće duljine stranica početnog pravokutnika su:

I. 11 cm i 210 cm
II. 12 cm i 110 cm
III. 14 cm i 60 cm
IV. 15 cm i 50 cm
V. 18 cm i 35 cm
VI. 20 cm i 30 cm.

Drugo rješenje.

$$(a+10)\cdot(b+10)=2\cdot a\cdot b$$

$$ab+10a+10b+100=2ab$$

$$ab-10a=10b+100$$

$$a(b-10)=10b+100$$

$$a=\frac{10b+100}{b-10}=\frac{10b-100+200}{b-10}=10+\frac{200}{b-10}$$

Dakle, $b-10$ mora biti djelitelj broja $200=2^3\cdot5^2$. Za svaki takav b izračunamo odgovarajući a i dobivamo 3 rješenja:

$b-10$	1	2	4	5	8	10	20	25	40	50	100	200
b	11	12	14	15	18	20	30	35	50	60	110	210
a	210	110	60	50	35	30	20	18	15	14	12	11

Moguće duljine stranica početnog pravokutnika su:

I. 11 cm i 210 cm
II. 12 cm i 110 cm
III. 14 cm i 60 cm
IV. 15 cm i 50 cm
V. 18 cm i 35 cm
VI. 20 cm i 30 cm.

Treće rješenje.

$$(a+10)\cdot(b+10)=2\cdot a\cdot b$$

$$ab+10a+10b+100=2ab$$

$$ab-10a-10b=100$$

$$a(b-10)-10b+100-100=100$$

$$a(b-10)-10(b-10)=200$$

$$(a-10)(b-10)=200$$

Zaključujemo da $b-10$ mora biti djelitelj broja $200=2^3\cdot5^2$.

Sve mogućnosti su dane tablicom:

$a-10$	1	2	4	5	8	10	20	25	40	50	100	200
$b-10$	200	100	50	40	10	8	10	8	5	4	2	1
a	11	12	14	15	18	20	30	35	50	60	110	210
b	210	110	60	50	35	30	20	18	15	14	12	11

Moguće duljine stranica početnog pravokutnika su:

I. 11 cm i 210 cm
II. 12 cm i 110 cm
III. 14 cm i 60 cm
IV. 15 cm i 50 cm
V. 18 cm i 35 cm
VI. 20 cm i 30 cm