Hrvatsko matematičko društvo

Hrvatska matematička olimpijada za kadete

# HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

**drugo kolo – utorak, 23. lipnja 2020.**

## Rješenja zadataka za 6. razred

### 1. zadatak

Nađi najmanji višeznamenkasti broj koji započinje znamenkom 1 sa svojstvom da, premjestimo li tu znamenku 1 s početka na kraj, iza znamenke jedinica, dobivamo broj tri puta veći od početnog.

***Prvo rješenje.***

Pretpostavimo da postoji takav dvoznamenkast broj; tj. pretpostavimo da broj $10+\ x$ (pri čemu je $x$ jednoznamenkast broj ili 0) koji zadovoljava uvjete zadatka. Tada je $10x+1=3\cdot(10+x)$, što vodi na jednadžbu $7x=29$ koja nema rješenja u skupu prirodnih brojeva.

Pretpostavimo li da postoji takav troznamenkast broj $100+\ x$, dobivamo uvjet $10x+1=3\cdot(100+x)$ i jednadžbu $7x=299$ koja također nema rješenja u skupu prirodnih brojeva .

Za četveroznamenkast broj dobivamo uvjet $10x+1=3\cdot(1000+x)$, i jednadžbu $7x=2999$ koja također nema rješenja u skupu prirodnih brojeva.

Za peteroznamenkasti broj dobivamo uvjet $10x+1=3\cdot(10000+x)$, i jednadžbu $7x=29999$ koja također nema rješenja u skupu prirodnih brojeva.

Za šesteroznamenkast broj, iz uvjeta $10x+1=3\cdot(100000+x)$, dobivamo jednadžbu $7x=299999$, čije je rješenje $x=42857$.

Broj 142857 je najmanji broj koji zadovoljava uvjete zadatka.

***Napomena:***
"Zadatak se može riješiti i određivanjem jedne po jedne znamenke u umnošku

$1\ldots7\ \cdot 3\ =\ \ldots71$ ."

### 2. zadatak

Na jednom natjecanju iz matematike sudjeluje 12 Varaždinaca, 8 Zadrana i 2 Osječana. Trebaju sastaviti peteročlanu ekipu u kojoj će biti barem po jedan učenik iz svakog od tih triju gradova, ali ne smiju biti tri učenika iz istog grada. Na koliko različitih načina oni mogu sastaviti ekipu?

***Rješenje.***

Ekipa se može sastojati od

- jednog učenika iz Varaždina, dvoje iz Zadra i dvoje iz Osijeka (VZZOO)

- dva učenika iz Varaždina, jednog iz Zadra i dva iz Osijeka (VVZOO)

- po dva učenika iz Varaždina i Zadra i jedan iz Osijeka (VVZZO).

U prva dva slučaja, oba Osječana su u ekipi.

U prvom slučaju, jednog Varaždinca biramo na 12 načina, a dvoje Zadrana možemo odabrati na $\frac{8\cdot 7}{2} = 28$ načina. Ukupan broj ekipa tipa "VZZOO" je $12 \cdot 28 = 336$.

U drugom slučaju, par Varaždinaca biramo na $\frac{12\cdot 11}{2} = 66$ načina, a jednog Zadranina na 8 načina. Ukupan broj ekipa tipa "VVZOO" je $66 \cdot 8 = 528$.

Konačno, u trećem slučaju dva Varaždinca biramo na 66 načina, dva Zadrana na 28 načina, a jednog Osječanina na 2 načina, pa je ekipa tipa "VVZZO" ukupno $66 \cdot 28 \cdot 2 = 3696$.

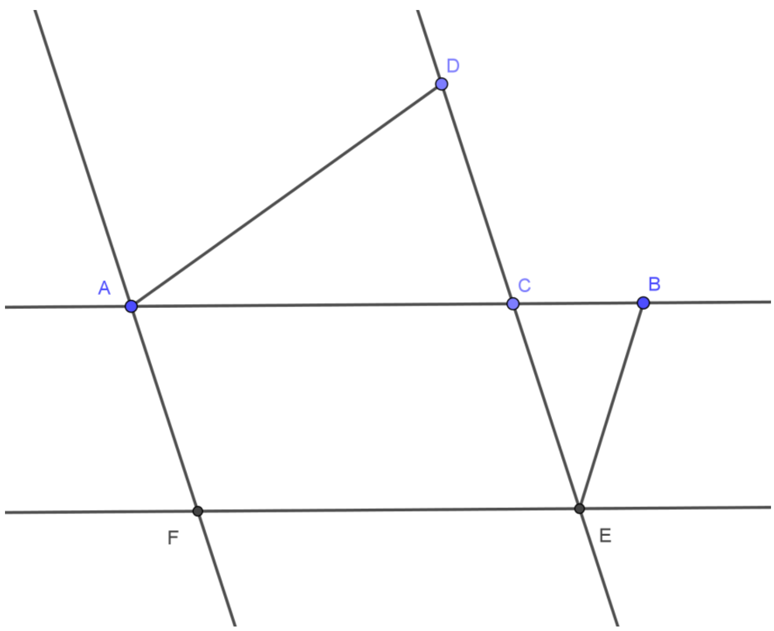
Ekipu je moguće odabrati na $336 + 528 + 3696 = 4560$ načina.

### 3. zadatak

Pravac $p$ siječe dužinu $\overline{AB}$ u točki $C$. Točka $D$ nalazi se na pravcu $p$, različita je od $C$ i vrijedi $|AC| = |AD|$. Točka $E$ nalazi se na pravcu $p$ i vrijedi $|EC| = |EB|$. Pravac paralelan s pravcem $p$ koji prolazi točkom $A$ i pravac paralelan s pravcem $AB$ koji prolazi točkom $E$ sijeku se u točki $F$. Dokaži da vrijedi $|FB| = |FD|$.

***Rješenje.***

Prema uvjetima zadatka, trokuti $ACD$ i $EBC$ su jednakokračni ($|AC| = |AD|$, $|EC| = |EB|$). Njihovi kutovi uz osnovicu su jednaki, jer su kutovi $|\angle DCA| = |\angle ECB|$ vršni. Stoga su i kutovi nasuprot osnovice jednaki, $|\angle CAD| = |\angle BEC|$.




Uočimo da je zbog $AB \parallel r$ i $p \parallel q$ četverokut $ACEF$ paralelogram, pa je $|AC| = |FE|$, $|CE| = |AF|$.

Promotrimo trokute $FAD$ i $BEF$. Vrijedi $|AF| = |CE| = |BE|$, $|AD| = |AC| = |FE|$.

Uočimo da je $|\angle FAD| = |\angle FAC| + |\angle CAD|$, $|\angle BEF| = |\angle BEC| + |\angle CEF|$.

Kako su $\angle FAC$ i $\angle CEF$ nasuprotni kutovi paralelograma, vrijedi $|\angle FAD| = |\angle FAC| + |\angle CAD| = |\angle CEF| + |\angle BEC| = |\angle BEF|$.

Prema SKS poučku o sukladnosti trokuta zaključujemo da su trokuti $FAD$ i $BEF$ sukladni.

Zato je i $|FB| = |FD|$ što je trebalo dokazati.

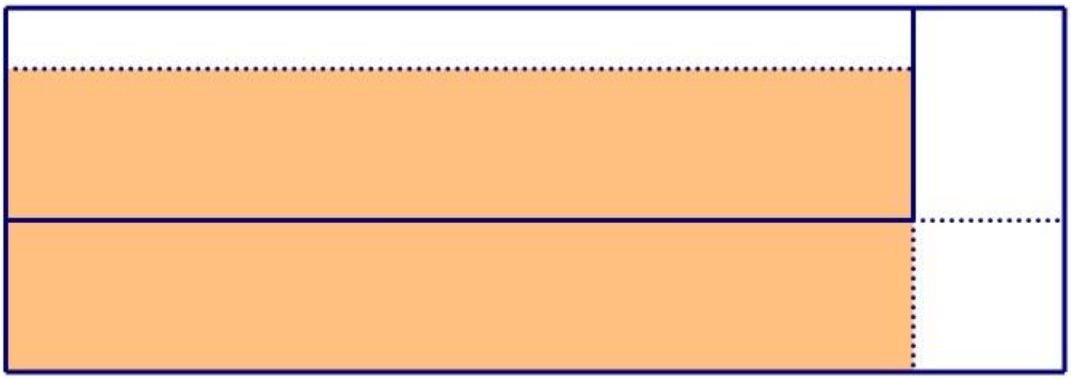
**4. zadatak**

Duljine svih stranica pravokutnika, izražene u centimetrima, prirodni su brojevi. Povećamo li širinu i visinu tog pravokutnika za 10 cm, njegova će se površina udvostručiti. Odredi dimenzije svih takvih pravokutnika.

***Rješenje:***

Produljivanjem stranica za 10 cm dobivamo sljedeći pravokutnik:

Prema uvjetu zadatka površina novonastalog pravokutnika dva puta je veća od površine početnog, što zapravo znači da su površine plavog i ljubičastog dijela na slici jednake.



Označene površine na gornjem pravokutniku su jednake. Ako ih uklonimo iz dijelova jednakih površina, ostat će nam dijelovi jednakih površina.

Prema tome, preostali dijelovi ljubičastog i plavog dijela su jednakih površina.

Označene površine na gornjem pravokutniku su jednake. Ako ih uklonimo iz dijelova jednakih površina, ostat će nam dijelovi jednakih površina.

Prema tome, preostali dijelovi ljubičastog i plavog dijela su jednakih površina.

Preostali plavi dio površine sastoji se od dva kvadrata sa stranicom duljine 10 cm, ukupne površine 100 cm$^2$ + 100 cm$^2$ = 200 cm$^2$. Znači, preostali pravokutnik ljubičaste boje ima površinu 200 cm$^2$.

Moguće duljine stranica tog pravokutnika su:

I. 1 cm i 200 cm
II. 2 cm i 100 cm
III. 4 cm i 50 cm
IV. 5 cm i 40 cm
V. 8 cm i 25 cm
VI. 10 cm i 20 cm.

Moguće duljine stranica početnog pravokutnika su:

I. 11 cm i 210 cm

II. 12 cm i 110 cm
III. 14 cm i 60 cm
IV. 15 cm i 50 cm
V. 18 cm i 35 cm
VI. 20 cm i 30 cm.

***Drugo rješenje.***

$$(a+10)\cdot(b+10)=2\cdot a\cdot b$$

$$ab+10a+10b+100=2ab$$

$$ab-10a=10b+100$$

$$a(b-10)=10b+100$$

$$a=\frac{10b+100}{b-10}=\frac{10b-100+200}{b-10}=10+\frac{200}{b-10}$$

Dakle, $b-10$ mora biti djelitelj broja $200=2^3\cdot5^2$. Za svaki takav $b$ izračunamo odgovarajući $a$ i dobivamo 3 rješenja:

| $b-10$ | 1 | 2 | 4 | 5 | 8 | 10 | 20 | 25 | 40 | 50 | 100 | 200 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $b$ | 11 | 12 | 14 | 15 | 18 | 20 | 30 | 35 | 50 | 60 | 110 | 210 |
| $a$ | 210 | 110 | 60 | 50 | 35 | 30 | 20 | 18 | 15 | 14 | 12 | 11 |

Moguće duljine stranica početnog pravokutnika su:

I. 11 cm i 210 cm
II. 12 cm i 110 cm
III. 14 cm i 60 cm
IV. 15 cm i 50 cm
V. 18 cm i 35 cm
VI. 20 cm i 30 cm

***Treće rješenje.***

$$(a+10)\cdot(b+10)=2\cdot a\cdot b$$

$$ab+10a+10b+100=2ab$$

$$ab-10a-10b=100$$

$$a(b-10)-10b+100-100=100$$

$$a(b-10)-10(b-10)=200$$

$$(a-10)(b-10)=200$$

Zaključujemo da $b-10$ mora biti djeljitelj broja $200=2^3\cdot5^2$.

Sve mogućnosti su dane tablicom:

| $a-10$ | 1 | 2 | 4 | 5 | 8 | 10 | 20 | 25 | 40 | 50 | 100 | 200 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $b-10$ | 200 | 100 | 50 | 40 | 10 | 8 | 10 | 8 | 5 | 4 | 2 | 1 |
| $a$ | 11 | 12 | 14 | 15 | 18 | 20 | 30 | 35 | 50 | 60 | 110 | 210 |
| $b$ | 210 | 110 | 60 | 50 | 35 | 30 | 20 | 18 | 15 | 14 | 12 | 11 |

Moguće duljine stranica početnog pravokutnika su:

I. 11 cm i 210 cm
II. 12 cm i 110 cm
III. 14 cm i 60 cm
IV. 15 cm i 50 cm
V. 18 cm i 35 cm
VI. 20 cm i 30 cm

## 5. zadatak

Jelena i Krešo igraju igru zapisujući pomoću znamenaka iz skupa {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} šesteroznamenkasti broj s različitim znamenkama. Najprije Jelena bira znamenku jedinica, zatim Krešo bira znamenku desetica i dalje redom: Jelena bira znamenku stotica, Krešo znamenku tisućica, Jelena znamenku desettisućica i na kraju Krešo bira znamenku stotisućica. Ako je tako nastali šesteroznamenkasti broj s različitim znamenkama djeljiv s 3, onda pobjeđuje Krešo, a ako taj broj nije djeljiv s 3, onda pobjeđuje Jelena.

Odredi koji od igrača ima strategiju za pobjedu i objasni tu strategiju.

***Rješenje.***

Šesteroznamenkasti broj je djeljiv s 3 ako i samo ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 3. Nakon što se potroši 6 znamenaka, ostat će neiskorištena tri broja iz skupa {1,2,3,4,5,6,7,8,9}. Zbroj svih tih brojeva je djeljiv s 3, pa je dobiveni šesteroznamenkasti broj djeljiv s 3 ako i samo ako je zbroj preostala tri broja djeljiv s 3. U tom slučaju pobjeđuje Krešo.

Može li Jelena osigurati da nakon njenog zadnjeg poteza preostanu četiri broja koja ne omogućuju Kreši da odabere broj koji bi mu osigurao pobjedu?

Podijelimo brojeve 1,2,3,4,5,6,7,8,9 u tri skupine, ovisno o ostacima pri dijeljenju brojem 3:

{1,4,7}  {2,5,8}  {3,6,9}.

Ako nakon Krešinog zadnjeg poteza ostanu neiskorištena tri broja iz iste skupine, njihov zbroj će biti djeljiv s 3. Ako ostane po jedan broj iz svake skupine, zbroj će također biti djeljiv s tri.

U ostalim slučajevima – a to znači kada ostanu dva broja iz jedne skupine i još jedan broj iz neke druge – zbroj neće biti djeljiv s tri. Dakle, Jelena treba osigurati da Krešo ne može ostaviti niti tri broja iz iste skupine, niti po jedan broj iz svake skupine. Drugim riječima, nakon njenog zadnjeg (trećeg) poteza, moraju još ostati neiskorištena po dva broja iz dviju skupina.

Dokažimo da Jelena ima strategiju za pobjedu.

Najprije Jelena bira bilo koji broj. Nakon toga Krešo ima dvije različite mogućnosti.

Ako Kreše odabere broj iz iste skupine, onda će Jelena nakon toga opet odabrati broj iz iste skupine (to je već treći broj iz iste skupine) pa će Krešo morati izabrati broj iz jedne od dvije preostale skupine. U svom zadnjem izboru Jelena će birati broj iz treće skupine. Sada su ostala još po dva broja u dvije skupine. Što god da Krešo odabere na kraju, izabrani brojevi ne mogu biti ni svi brojevi iz dvije skupine niti po dva broja iz svake od tri skupine.

Ako Krešo u svom prvom "potezu" odabere broj iz skupine iz koje nije Jelenin prvi broj, tada će Jelena u sljedećem izboru birati broj iz preostale treće skupine. Nakon toga Krešo, kojem su preostala po dva broja iz svake skupine bira neki od tih brojeva, a potom Jelena bira broj iz iste skupine. Tada su preostala po dva broja u dvije skupine, dok su iz treće skupine sva tri broja iskorištena. Što god da Krešo odabere u svom zadnjem potezu, izabrani brojevi ne mogu biti ni svi brojevi iz dvije skupine niti po dva broja iz svake od tri skupine.

**Napomena.** Skraćeno možemo pisati koliko u svakom koraku preostaje neiskorištenih brojeva u pojedinoj skupini. Tako na početku zapisujemo 333 jer u svakoj skupini imamo 3 broja.

Za ishod igre nije važno iz koje su skupine birani brojevi, pa broj neiskorištenih brojeva možemo pisati od najvećeg prema najmanjem. Jelenini potezi su označeni crvenom bojom, a Krešini plavom.

Kad tako promatramo, Krešo samo u prvom potezu ima više mogućnosti. Za Jelenu su označeni oni potezi koje treba odabrati da bude sigurna u pobjedu.