Hrvatsko matematičko društvo

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

subota, 6. lipnja 2020.

Rješenja zadataka za 4. razred

1. Manji broj

Zbroj dvaju troznamenkastih brojeva, čijih je svih šest znamenaka međusobno različito, iznosi 1000. Koliko najviše može iznositi manji od tih dvaju brojeva?

Rezultat: **498**

Rješenje.

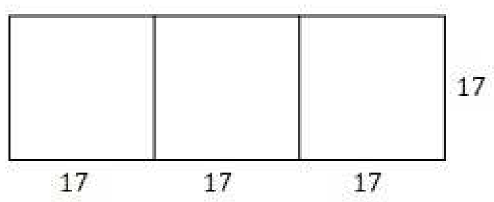
Budući da je 1000 : 2 = 500 manji broj je će biti manji od 500.

Krenimo od prvog broja manjeg od 500 sa svim znamenkama različitim. To je 498.

Vrijedi 498 + 502 = 1000, a 502 i 498 imaju sve različite znamenke, pa je odgovor 498.

2. Zbroj opsega

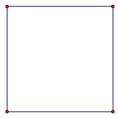
Izračunaj zbroj opsega svih pravokutnika na slici.
Pažnja: Kvadrat je također pravokutnik!



Rezultat: **544**

Rješenje. Razlikujemo tri vrste pravokutnika. Imamo

tri mala



$o = 4 \cdot 17 = 68$

$3 \cdot 68 = 204$

dva srednja

$o = 6 \cdot 17 = 102$

$2 \cdot 102 = 204$

jedan veliki pravokutnik

$o = 8 \cdot 17 = 136$

$1 \cdot 136 = 136$

Zbroj opsega svih međusobno različitih pravokutnika na slici je 204 + 204 + 136 = 544.

3. Troznamenkasti završetak

Zbroji sve neparne četveroznamenkaste brojeve kojima je zbroj znamenaka jednak 4. Koje su posljednje tri znamenke toga zbroja, počevši sa znamenkom stotica?

Rezultat: **449**

Rješenje.

Prikažimo broj 4 kao zbroj četiriju brojeva:

$$4 + 0 + 0 + 0 = 3 + 1 + 0 + 0 = 2 + 2 + 0 + 0 = 2 + 1 + 1 + 0 = 1 + 1 + 1 + 1$$

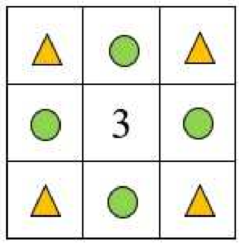
Od znamenaka 4,0,0,0 i 2,2,0,0 nije moguće sastaviti neparan broj.

Neparni četveroznamenkasti brojevi kojima je zbroj znamenaka jednak 4 su:

3001, 1003, 2101, 2011, 1201, 1021 i 1111

Njihov je zbroj 11449, a posljednje tri znamenke toga zbroja su 449.

4. Magični kvadrat



U svako polje tablice na slici upisan je po jedan od brojeva 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9. Zbrojevi triju brojeva u poljima svakog retka, odnosno stupca međusobno su jednaki. U središnjem polju tablice nalazi se broj 3. Označimo s A zbroj brojeva u poljima označenima kružićem, a s B zbroj brojeva u poljima označenima trokutićem. Koliko iznosi $A \cdot B$?

Rezultat: **432**

Rješenje, prvi način.

S obzirom da je

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45,$$

a tablica ima tri retka (i tri stupca), zbroj brojeva u svakom retku (i u svakom stupcu) mora biti

$$45 : 3 = 15.$$

Zbroj brojeva u drugom retku je 15, što znači da je zbroj brojeva u poljima sa zelenim kružićem u tom retku 12. Na isti način zaključujemo da je zbroj brojeva u poljima sa zelenim kružićem u drugom stupcu jednak 12. Zbroj brojeva upisanih u sva četiri polja označena kružićem jednak je

$$A = 12 + 12.$$

$$B = 45 – (24 + 3) = 45 – 27 = 18$$

$$A \cdot B = 24 \cdot 18 = 432$$

Rješenje, drugi način.

S obzirom da je

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45,$$

a tablica ima tri retka (i tri stupca), zbroj brojeva u svakom retku (i u svakom stupcu)

mora biti 45 : 3 = 15.

Popunimo tablicu tako da zbrojevi brojeva u svim retcima i stupcima budu jednaki 15. Zbroj dvaju brojeva koji nedostaju u srednjem retku/stupcu mora biti 15 - 3 = 12.

Vrijedi 12 = 5 + 7 = 3 + 9, i to su jedini načini da dobijemo zbroj 12.

Neka su na primjer brojevi 5 i 7 u srednjem retku, a 3 i 9 u srednjem stupcu:

	8	
5	3	7
	4	

Dopunimo tablicu preostalim brojevima:

1	8	6
5	3	7
9	4	2

Računamo:

$$A = 8 + 5 + 7 + 4 = 24$$

$$B = 1 + 6 + 9 + 2 = 18$$

$$A \cdot B = 24 \cdot 18 = 432$$

5. Broj u sredini

Poredaj po veličini sve troznamenkaste brojeve manje od 550 čija je znamenka stotica jednaka umnošku ostalih dviju znamenaka. Među tako poredanim brojevima, koji se broj nalazi u sredini?

Rezultat: **331**

Rješenje.

Neka je znamenka stotica 1. Kako je 1 = 1 · 1, preostale znamenke su 1 i 1. Traženi broj je 111.

Neka je znamenka stotica 2. Kako je 2 = 1 · 2 = 2 · 1, preostale znamenke su 1 i 2.

Traženi brojevi su 212 i 221.

Neka je znamenka stotica 3. Kako je 3 = 1 · 3 = 3 · 1, preostale znamenke su 1 i 3.

Traženi brojevi su 313 i 331.

Neka je znamenka stotica 4. Kako je 4 = 1 · 4 = 2 · 2 = 4 · 1, preostale znamenke mogu biti 1 i 4 ili 2 i 2. Traženi brojevi su 414, 441 i 422.

Neka je znamenka stotica 5. Kako je 5 = 1 · 5 = 5 · 1, preostale znamenke su 1 i 5.

Traženi broj je 515.

Broj 551 nije rješenje jer tražimo brojeve manje od 550.

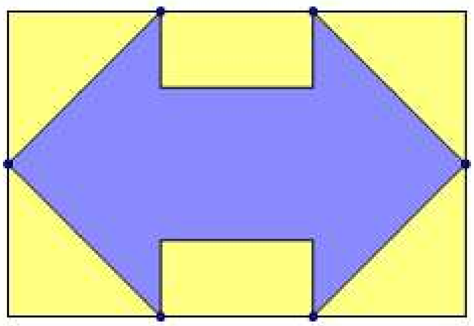
Brojevi sa zadanim svojstvom poredani po veličini od najmanjeg prema najvećem su:

111, 212, 221, 313, 331, 414, 422, 441, 515.

Srednji broj u nizu je 331.

6. Površina

Na slici je prikazan pravokutnik sa stranicama duljina 48 mm i 32 mm. Dulje stranice pravokutnika podijeljene su istaknutim točkama na tri jednaka dijela, a kraće stranice na dva jednaka dijela.
Opseg svakog žutog pravokutnika jednak je duljini duže stranice pravokutnika. Odredi površinu lika obojenog plavom bojom, u kvadratnim milimetrima.



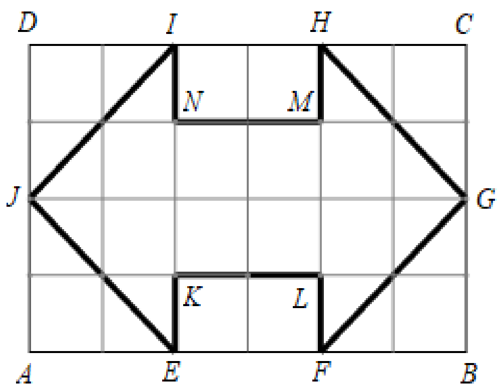
Rezultat: **768**

Rješenje prvi način.

Dulja stranica pravokutnika podijeljena je na tri dužine duljina 48 : 3 = 16 mm.

Kraća stranica pravokutnika podijeljena je na dvije dužine duljina 32 : 2 = 16 mm.

Žuti pravokutnici imaju opsege 48 mm i imaju po dvije stranice duljina 16 mm.



Duljine preostalih stranica žutih pravokutnika su (48 – 16 – 16) : 2 = 16 : 2 = 8 mm.

Zadatak ćemo dalje riješiti tako da pravokutnik podijelimo kvadratnom mrežom na kvadrate stranica duljina 8 mm, kao na slici.

Površina svakog takvog kvadrata je $P_1 = 8 \cdot 8 = 64$ mm^2, a površina trokuta koji je polovina takvog kvadrata je $P_2 = 64 : 2 = 32$ mm^2.
Uočimo da se „plavi" lik sastoji od 8 kvadrata površine 64 mm^2 i 8 polovina takvih kvadrata pa je njegova površina $P = 8 \cdot 64 + 8 \cdot 32 = 512 + 256 = 768$ mm^2.

Rješenje, drugi način.

Kao u prvom načinu, izračunamo duljine stranica žutih pravokutnika i podijelimo početni pravokutnik na kvadratnu mrežu. Neka su P i R polovišta dužina $\overline{NK}$ i $\overline{ML}$, redom.

Žuti trokuti DJI, AEJ, BGF, CHG imaju istu površinu kao plavi trokuti EPJ, IJP, FGR, GHR.

Također, žuti pravokutnici HINM i EFLK imaju istu površinu kao plavi pravokutnici MNPR i KLRP.

Zato je površina plavog lika jednaka površini preostalog žutog dijela pravokutnika, tj. površina plavog lika iznosi polovinu površine početnog pravokutnika.

Odgovor je $P = 48 \cdot 32 : 2 = 768$ mm^2.

Rješenje, treći način.

Dulja stranica pravokutnika podijeljena je na tri dužine duljina 48 : 3 = 16 mm. Kraća stranica pravokutnika podijeljena je na dvije dužine duljina 32 : 2 = 16 mm.

Žuti pravokutnici imaju opsege 48 mm i imaju po dvije stranice duljina 16 mm.

Duljine preostalih stranica žutih pravokutnika su (48 – 16 – 16) : 2 = 16 : 2 = 8 mm.

Zadatak ćemo dalje riješiti tako da od površine velikog pravokutnika ABCD oduzmemo:
- površine dvaju žutih pravokutnika (jedna stranica im je duljine 8 mm, a druga 16 mm) i
- površine četiriju žutih trokuta (to su pravokutni trokuti istog oblika i iste površine, a po dva zajedno čine kvadrat sa stranicom duljine 16 mm)

Površina lika obojenog plavom bojom, u kvadratnim milimetrima iznosi

$P = 48 \cdot 32 - (2 \cdot 8 \cdot 16 + 2 \cdot 16 \cdot 16) = 1\,536 - (256 + 512) = 1\,536 - 768 = 768$

7. Niz brojeva

Brojevi su napisani bez razmaka, jedan iza drugoga

123456789101112131415161718192021222324252627...

Odredi znamenke na 2019., 2020. i 2021. mjestu i zapiši ih tim redom kao troznamenkasti broj.

Rezultat: 971

Rješenje.

Jednoznamenkastih brojeva ima 9, dvoznamenkastih brojeva ima 90, a troznamenkastih brojeva 900. Za njihovo ispisivanje treba redom 9, 180 i 2700 znamenki.

Broj koji sadrži 2020. znamenku je troznamenkast. Za pisanje svih jednoznamenkastih i dvoznamenkastih brojeva ukupno treba 9 + 180 = 189 znamenki, pa ostaje 2020– 189 = 1831 znamenka.

1831 : 3= 610 i ostatak 1 pa se s tom 1831 znamenkom može napisati 610 troznamenkastih brojeva i preostaje još jedna znamenka.

Znači da se tražena 2020. znamenka nalazi na prvom mjestu u 611. troznamenkastom broju.

Taj je broj 9 + 90 + 611 = 710 (a 2020. znamenka je 7).

2021. znamenka je 2. znamenka broja 710 , a to je 1.

2019. znamenka je treća znamenka broja 709, a to je 9.

Znamenke su redom 9, 7 i 1, odnosno broj je 971.

8. Zlatnici

Ante, Branimir, Celestin i Dubravko sjede oko okruglog stola (tim redom). Zajedno imaju 1600 zlatnika. Najprije Ante polovinu svojih zlatnika podijeli na dva jednaka dijela i po jedan dio preda svojem lijevom i desnom susjedu, dok drugu polovinu zadržava za sebe. Nakon toga isto tako postupi Branimir, potom Celestin i na kraju Dubravko. Na kraju sva četvorica imaju jednak broj zlatnika. Koliko je zlatnika Branimir imao na početku?

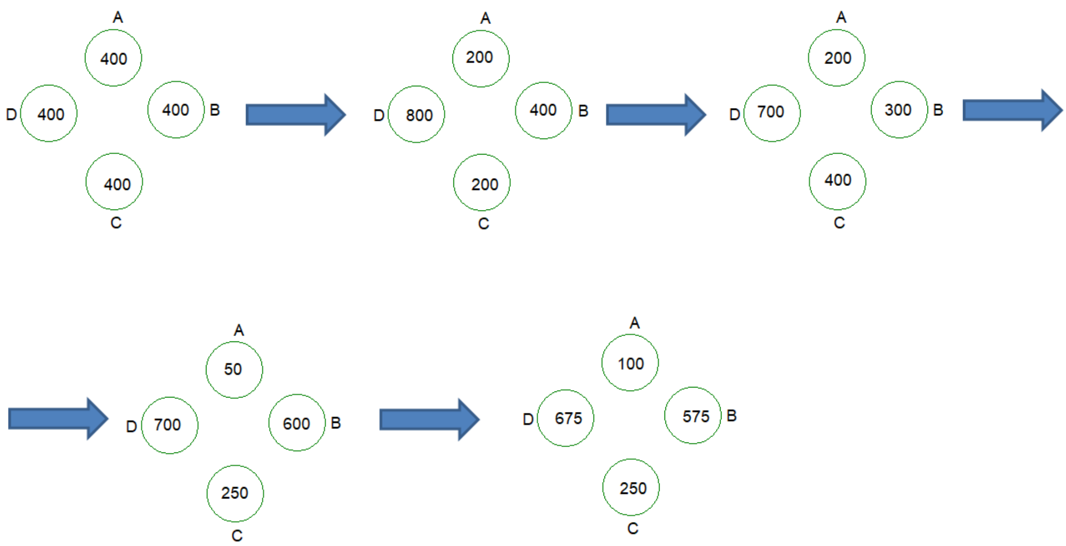
Rezultat: 575

Rješenje, prvi način.

Rješavanje unatrag:

	Ante	Branimir	Celestin	Dubravko
broj zlatnika na kraju	400	400	400	400
broj zlatnika nakon 3. koraka	200	400	200	800
broj zlatnika nakon 2. koraka	200	300	400	700
broj zlatnika nakon 1. koraka	50	600	250	700
broj zlatnika na početku	100	**575**	250	675

Rješenje, drugi način. Rješavamo unatrag:



Branimir je na početku imao 575 zlatnika.

9. Bazeni i cijevi

Hotel ima tri bazena A, B i C koji se mogu ventilima spojiti ili odvojiti. Za punjenje se koristi nekoliko jednakih cijevi. Kada su spojena sva tri bazena, njihovo punjenje vodom iz triju cijevi traje 18 minuta. Ako se spoje samo bazeni A i B, njihovo punjenje pomoću dviju cijevi traje 21 minutu, a ako se spoje samo bazeni B i C, punjenje pomoću dviju cijevi traje 14 minuta. Koliko sekundi traje punjenje bazena B pomoću jedne cijevi?

Rezultat: 960

Rješenje.

Jedna cijev bi napunila bazene A, B i C za $3 \cdot 18 = 54$ minute, bazene A i B za $2 \cdot 21 = 42$ minute, a bazene B i C za $2 \cdot 14 = 28$ minuta.

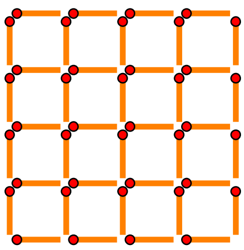
Zato bi jedna cijev napunila bazen C za $54 - 42 = 12$ minuta, a bazen A za $54 - 28 = 26$ minuta, odakle slijedi da bi bazen B napunila za $54 - 12 - 26 = 16$ minuta.

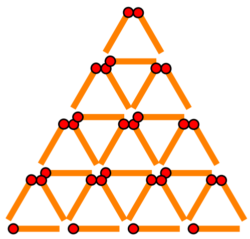
16 minuta = 16 · 60 sekundi = 960 sekundi

10. Šibice

Ivica je od šibica sastavio kvadrat stranice duljine 36. Marica je uzela sve te šibice i sastavila jednakostranični trokut stranice duljine 36. Koliko je šibica ostalo neiskorišteno?

Na slikama su prikazani kvadrat i jednakostranični trokut stranice duljine 4 sastavljeni od šibica.





Rezultat: 666

Rješenje, prvi način.

Prebrojimo koliko je šibica potrebno za kvadrat, a koliko za trokut stranice duljine 36.

Šibice koje tvore kvadrat su postavljene horizontalno ili vertikalno. Odredimo najprije koliko je horizontalno postavljenih šibica. U svakom redu je po 36 šibica, a redova ima 37. Zato je broj horizontalno postavljenih šibica 36 · 37 = 1332. Isto je toliko i vertikalno postavljenih šibica. Za kvadrat stranice duljine 36 je potrebno 2 · 1332 = 2664 šibica.

Šibice koje tvore trokut su postavljene u tri smjera. U svakom smjeru je broj šibica

$$36 + 35 + 34 + \ldots + 3 + 2 + 1 = (36 + 1) + (35 + 2) + \ldots + (19 + 18) = 18 \cdot 37 = 666.$$

Zato je za trokut stranice duljine 36 utrošeno ukupno 3 · 666 = 1998 šibica.

Ostalo je neiskorišteno 2664 - 1998 = 666 šibica.

Napomena: Šibice koje tvore trokut možemo podijeliti u grupice po tri koje tvore male trokute. Odredimo koliko ih je. Na dnu je 36 trokuta, u sljedećem redu ih je 35 i u svakom sljedećem po jedan manje, dok ne dođemo do vrha gdje je samo jedan trokut. Ukupan broj tako uočenih malih trokuta je

$$36 + 35 + 34 + \ldots + 3 + 2 + 1 = (36 + 1) + (35 + 2) + \ldots + (19 + 18) = 18 \cdot 37 = 666.$$

Rješenje, drugi način.

Od kvadrata stranice duljine 36 možemo ukloniti sve šibice koje čine male kvadrate u prvom redu i prvom stupcu. Tako ćemo dobiti kvadrat duljine 35.

Uklonili smo 4 puta po 36 šibica (36 na stranici kvadrata, te 36 između kvadrata). Od tih šibica možemo složiti 36 trokuta na dnu velikog trokuta i ostat će nam još 36 šibica viška.

Postupak možemo nastaviti sa kvadratom duljine 35 (složimo 35 trokuta u drugom redu velikog trokuta i preostane nam 35 šibica viška), pa kvadratom duljine 34 itd. Na kraju tog postupka imamo kvadrat duljine 1 od kojeg napravimo mali trokut na vrhu velikog trokuta i ostane nam jedna šibica viška. Ukupno nam je viška

$$36 + 35 + 34 + \ldots + 3 + 2 + 1 = (36 + 1) + (35 + 2) + \ldots + (19 + 18) = 18 \cdot 37 = 666 \text{ šibica.}$$