Hrvatsko matematičko društvo

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

subota, 6. lipnja 2020.

Rješenja zadataka za 5. razred

1. Šesteroznamenkasti broj

Svaka znamenka šesteroznamenkastog broja, počevši od znamenke tisućica, jednaka je zbroju prethodnih dviju znamenaka (koje se nalaze njoj slijeva). Koji je troznamenkasti završetak najvećeg broja s tim svojstvom?

Rezultat: 369

Rješenje, prvi način.

Ako je početna znamenka 1, imamo sljedeće mogućnosti: 101123 i 112358.

Naime, ako bi druga znamenka slijeva bila 2, onda bi prvih pet znamenki slijeva bilo redom 1,2,3,5,8 i više ne možemo odabrati znamenku jedinica da uvjeti zadatka budu zadovoljeni. Pogotovo nije moguće da druga znamenka slijeva bude veća od 2.

Ako je početna znamenka 2 imamo mogućnost 202246.

Naime, ako bi druga znamenka slijeva bila 1, onda bi prvih pet znamenki slijeva bilo redom 2,1,3,4,7 i više ne možemo odabrati znamenku jedinica da uvjeti zadatka budu zadovoljeni. Pogotovo nije moguće da druga znamenka slijeva bude veća od 1.

Na sličan način zaključujemo da je jedina mogućnost da prva znamenka slijeva bude 3 te da druga slijeva bude 0; tako dobivamo broj 303369.

Također, na sličan način zaključujemo da početna znamenka ne može biti 4 ili veća od 4.

Vidimo da je najveći takav broj 303369, a zadnje tri znamenke su 369.

Rješenje, drugi način.

Neka je $\overline{abcdef}$ šesteroznamenkasti broj za zadanim svojstvom.
Tada za znamenke c, d, e i f vrijedi: $c = a + b$, $d = b + c$, $e = c + d$, $f = d + e$.
Iz svih tih jednakosti slijedi $f = 5b + 3a$.
Iz uvjeta $3a+5b \leq 9$, slijedi da je b=1 ili b=0. Pritom, a je veći (time je i šesteroznamenkasti broj veći) ako je b=0. Tada znamenka a može biti 1, 2 ili 3. Najveći šesteroznamenkasti broj dobivamo za a = 3. Ako je a = 3, ostale znamenke su: c = 3, d = 3, e = 6 i f = 9. Radi se o broju 303369, pa je traženi troznamenkasti završetak 369.

2. U supermarketu

Jurica šeće supermarketom i razgledava. Sviđa mu se jedna knjiga, a sviđa mu se i lopta. Knjiga je skuplja od lopte za 72 kune. Jurica primijeti da bi za cijenu 5 lopti mogao kupiti dvije takve knjige i još čokoladu. Lopta je tri puta skuplja od čokolade. Na kraju Jurica ipak odlučuje kupiti jednu knjigu, jednu loptu i jednu čokoladu. Koliko će ukupno platiti?

Rezultat: 198

Rješenje, prvi način.

Označimo cijenu čokolade jednim kvadratićem.

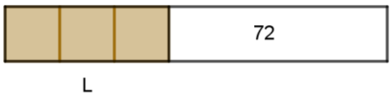
cijena jedne čokolade:

Kako je lopta tri puta skuplja od čokolade, cijenu lopte možemo prikazati ovako:

cijena jedne lopte:

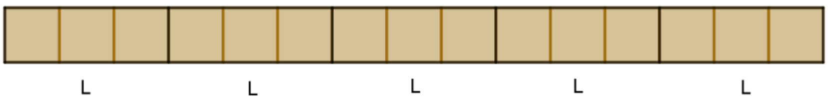
Knjiga je skuplja od lopte za 72 kune, što možemo prikazati ovako:

cijena jedne knjige:

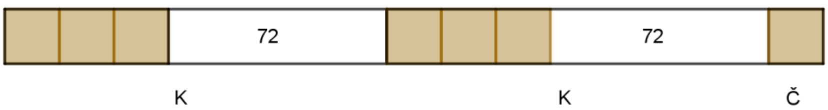


Nadalje, cijena 5 lopti jednaka je kao cijena dviju knjiga i čokolade.

cijena 5 lopti:



cijena dviju knjiga i 1 čokolade



Iz slike se može zaključiti da vrijednost 8 kvadratića, od kojih svaki prikazuje cijenu jedne čokolade, treba biti $2 \cdot 72 = 144$.

Prema tome, cijena jedne čokolade je $144 : 8$, a to je 18 kuna. Cijena jedne lopte je $3 \cdot 18$, a to je 54 kune. Cijena knjige je $54 + 72$, a to je 126 kuna.

Za sve troje Jurica je na blagajni platio $126 + 54 + 18 = 198$ kuna.

Rješenje, drugi način.

Označimo s K, L i Č redom cijene knjige, lopte i čokolade. Vrijedi:

$$K - L = 72$$
$$2K + Č = 5L$$
$$3Č = L$$

Iz druge i treće jednadžbe slijedi:

$$2K + Č = 15Č$$
$$2K = 14Č$$
$$K = 7Č$$

Dakle, knjiga košta kao 7 čokolada. Kako je lopta tri puta skuplja od čokolade, slijedi da je razlika cijene knjige i cijene lopte ($K - L = 72$) jednaka cijeni 4 čokolade:

$$4Č = 72$$

Iz toga slijedi

$$Č = 18$$

Dakle, cijena čokolade je 18 kuna, cijena lopte je $3 \cdot 18 = 54$ kune, a cijena knjige je

$7 \cdot 18 = 126$ kuna.

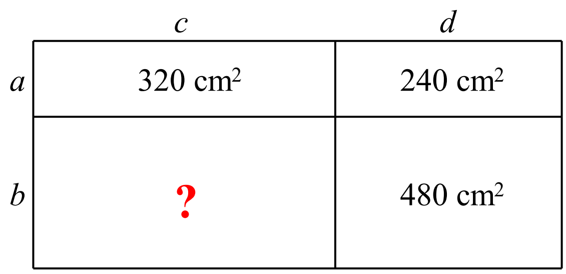
Za sve troje Jurica je na blagajni platio $126 + 54 + 18 = 198$ kuna.

3. Pravokutnici

Pravokutnik je dužinama, koje su usporedne s njegovim stranicama, podijeljen na četiri pravokutnika. Površine triju manjih od tih četiriju pravokutnika iznose 240 cm^2, 320 cm^2 i 480 cm^2. Koliko iznosi (u cm^2) površina najvećeg od četiriju nastalih pravokutnika?

Rezultat: 640

Rješenje, prvi način.



Uz oznake kao na slici vrijedi:

$$ac = 320 \qquad ad = 240 \qquad bd = 480 \qquad bc = ?$$

Množenjem dobivamo $(ac)(bd) = 320 \cdot 480$,

odnosno

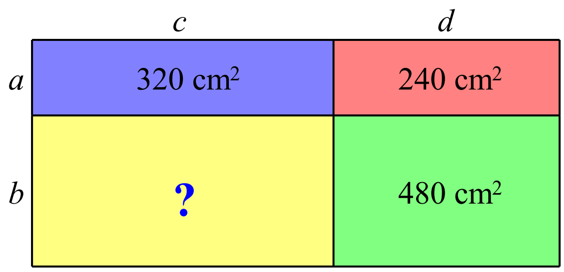
$$(ac)(bd) = 153600$$

Grupiranjem na drugačiji slijedi $(ad)(bc) = 153600$, a primjenom $ad = 240$ dobivamo

$$240(bc) = 15360.$$

Stoga je tražena površina $bc = 640$.

Rješenje, drugi način.



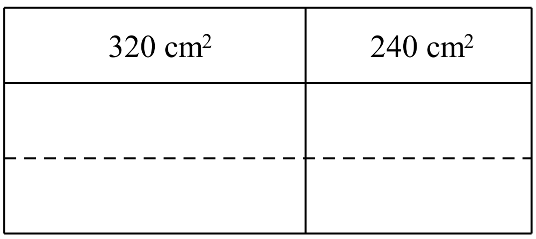
S obzirom da je površina zelenog pravokutnika dva puta veća od površine crvenog pravokutnika, te oba pravokutnika imaju jednu stranicu jednake duljine d, znači da je duljina druge stranice zelenog pravokutnika, b, dva puta veća od duljine druge stranice crvenog pravokutnika, a, odnosno b = 2a.

Kako plavi i žuti pravokutnik imaju jednu stranicu duljine c, a druga stranica žutog pravokutnika je dva puta dulja od druge stranice plavog pravokutnika, znači da je površina žutog pravokutnika dva puta veća od površine plavog pravokutnika.

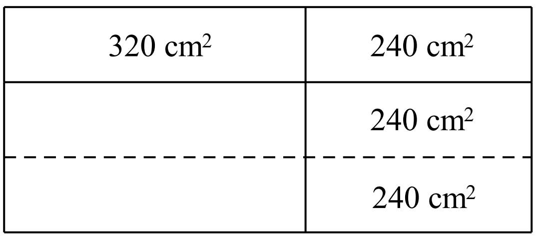
Prema tome, površina žutog pravokutnika je $2 \cdot 320\ \text{cm}^2 = 640\ \text{cm}^2$.

Rješenje, treći način.

Nacrtajmo dužinu, usporednu s jednom stranicom velikog pravokutnika, koja dijeli donje pravokutnike na dva jednaka dijela.

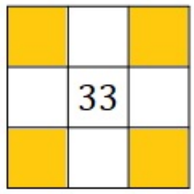


Time je pravokutnik površine $480\ \text{cm}^2$ podijeljen na dva pravokutnika površina $240\ \text{cm}^2$, pa se može uočiti da su dvije usporedne dužine unutar pravokutnika podijelile pravokutnik na tri jednaka dijela.



Prema tome, površina četvrtog pravokutnika je $2 \cdot 320\ \text{cm}^2 = 640\ \text{cm}^2$.

4. Magična tablica



U svako polje tablice na slici upisan je po jedan od brojeva $11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88$ i 99. Zbrojevi triju brojeva u poljima svakog retka, odnosno stupca međusobno su jednaki. Ako je u središnje polje tablice upisan broj 33, koliki je zbroj brojeva upisanih u četiri obojena polja?

Rezultat: 198

Rješenje, prvi način

S obzirom da je $11 + 22 + 33 + 44 + 55 + 66 + 77 + 88 + 99 = \cdots = 495$, zbroj brojeva u svakom retku i u svakom stupcu mora biti 495/3= 165.
Promotrimo brojeve A, B, C i D (na slici):

	C	
A	**33**	**B**
	D	

S obzirom da treba biti A + 33 + B = 165 i C + 3 + D = 165, treba vrijediti A + B = 132 i C + D = 132. Kako je A+B+C+D+33 = 132+132+33 = 297, zaključujemo da je zbroj preostalih četiriju brojeva 495 - 297 = 198.

Rješenje, drugi način

S obzirom da je $11 + 22 + 33 + 44 + 55 + 66 + 77 + 88 + 99 = \cdots = 495$, zbroj brojeva u svakom retku i u svakom stupcu mora biti 495/3= 165.
Promotrimo brojeve A, B, C i D (na slici):

	C	
A	**33**	**B**
	D	

Treba odrediti koji par brojeva može biti u drugom retku. Uzmimo da je A < B. Budući da je

A + 33 + B = 165, treba vrijediti A + B = 132. Najveća vrijednost koju može imati B je 99, pa A ne može biti ni 11 ni 22 jer bi u tom slučaju B trebao biti veći od 99. Broj 33 je u sredini, pa je najmanji mogući broj A = 44. U tom slučaju B = 132 – 44 = 88.

Nadalje, A može biti 55. U tom slučaju B = 132 – 55 = 77. Kad bi A bio 66, tada bi i B trebao biti 66, a to ne može jer svi brojevi u tablici trebaju biti različiti.

Prema tome, jedina dva para brojeva koji dolaze u obzir su 44 i 88, te 55 i 77. Kako isto vrijedi i za brojeve C i D, znači da će jedan od tih parova brojeva biti A i B, a drugi C i D. Preostali brojevi, a to su 11, 22, 66 i 99 bit će u 4 obojena polja. Njihov zbroj je 198.

5. Kuglice u kutiji

U kutiji se nalazi 25 žutih, 42 crvene, 50 plavih, 78 zelenih i 105 bijelih kuglica. Ako kuglice iz kutije izvlačimo bez gledanja, koliko najmanje kuglica treba izvući kako bismo bili sigurni da će među izvučenim kuglicama biti barem 50 kuglica iste boje?

Rezultat: 215

Rješenje.

Odgovor na pitanje u zadatku je za 1 veći od odgovora na sljedeće pitanje: Koliko najviše kuglica možemo izvući, a da među njima ne bude više od 49 kuglice iste boje? A taj je broj jednak

25+42+3·49=214.

Odnosno, moguće je izvući 214 kuglica tako da među njima nema 49 kuglice jedne boje. To će se dogoditi ako izvučemo 25 žutih, 42 crvene, 49 plavih, 49 zelenih i 49 bijelih kuglica. S druge strane, ako izvučemo 215 kuglica, onda možemo biti sigurni da smo izvukli ili 50 plavih ili 50 zelenih ili 50 bijelih kuglica.

Dakle, odgovor na pitanje postavljeno u zadatku je:

Ako kuglice iz kutije izvlačimo bez gledanja, treba izvući najmanje 215 kuglica da bismo bili sigurni da će među njima biti barem 50 kuglica iste boje.

6. Različite znamenke

Odredi najmanji troznamenkasti broj s različitim znamenkama koji ima točno tri djelitelja.

Rezultat: 169

Rješenje.

Svaki prirodni broj, osim broja 1, ima barem dva prirodna djelitelja, pri čemu brojevi imaju točno dva prirodna djelitelja ako i samo ako su prosti. Ako u rastavu na proste faktore broj ima barem dva različita prosta djelitelja (recimo p i q), ukupni broj djelitelja je barem 4 (taj broj je djeljiv s $1, p$, q i pq).

Dakle, da bi prost broj imao točno tri prirodna djelitelja, mora imati točno jedan prost broj u rastavu na proste faktore. Ako se taj broj u rastavu na proste faktore javlja tri ili više puta, broj prirodnih djelitelja je veći od 3 . Zašto? Neka je p prost faktor koji se pojavljuje bar 3 puta u rastavu nekog broja na proste faktore. Tada je taj broj, osim s brojem 1 i samim sobom, djeljiv s p i $p \cdot p$, koji su oba različiti od 1 i tog broja, što znači da ima bar 4 djelitelja. Ako je pak broj oblika $p \cdot p$, pri čemu je p prost, onda ima točno tri prirodna djelitelja 1, p i $p \cdot p$.

Da bi broj $p \cdot p$ bio dvoznamenkast, p mora biti barem 10, ali mora biti i prost broj. Sada redom uvrštavamo: za $p = 11$, $p \cdot p = 121$, no taj broj nema različite znamenke. Za $p = 13$, $p \cdot p = 169$ i to je traženi broj.

7. Zlatnici

Ante, Branimir, Celestin i Dubravko sjede oko okruglog stola (tim redom). Zajedno imaju 1600 zlatnika. Najprije Ante polovinu svojih zlatnika podijeli na dva jednaka dijela i po jedan dio preda svom lijevom i desnom susjedu, dok drugu polovinu zadržava za sebe. Nakon toga isto tako postupi Branimir, potom Celestin i na kraju Dubravko. Na kraju sva četvorica imaju jednak broj zlatnika. Koliko je zlatnika Branimir imao na početku?

Rezultat: 575

Rješenje:

Rješavanje unatrag:

	Ante	**Branimir**	**Celestin**	**Dubravko**
broj zlatnika na kraju	400	400	400	400
broj zlatnika nakon 3. koraka	200	400	200	800
broj zlatnika nakon 2. koraka	200	300	400	700
broj zlatnika nakon 1. koraka	50	600	250	700
broj zlatnika na početku	100	**575**	250	675

Napomena: Zadatak se može riješiti i tako da se postavi sustav od 4 jednadžbe s 4 nepoznanice, ali je takav pristup puno kompliciraniji.

8. Dijagonalni kvadrati

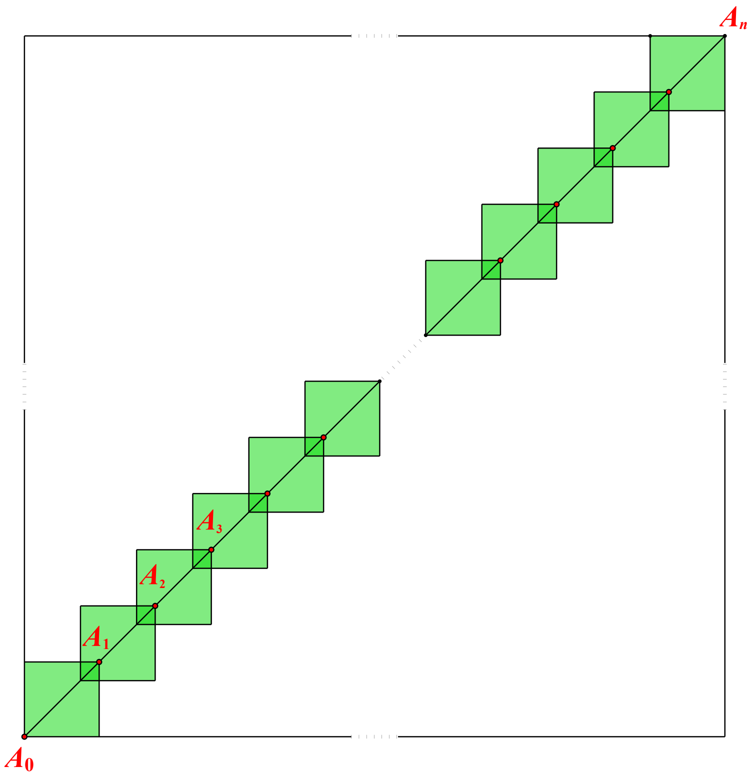
Dijagonalu velikog kvadrata stranice duljine 2020 cm Vlado je prekrio nizom kvadrata stranice duljine 4 cm izrezanih od zelenog kolaž-papira. Dijagonale zelenih kvadrata pripadaju dijagonali velikog kvadrata, a presjek svakih dvaju uzastopnih zelenih kvadrata je kvadrat stranice duljine 1 cm. Izračunaj opseg lika koji tvore zeleni kvadrati. Rezultat izrazi u decimetrima.

Rezultat: 808

Rješenje, prvi način.

Izračunajmo koliko je ukupno kvadrata duljine stranice 4 cm.
Krenimo s ucrtavanjem kvadrata počevši od donjeg lijevog vrha velikog kvadrata koji označimo s A_0. Gornji desni vrh prvog ucrtanog kvadrata označimo s A_1, gornji desni vrh drugog ucrtanog kvadrata označimo s A_2 itd.

Od vrha A_0 do vrha A_1 može se doći tako da se pomakne 4 cm desno i 4 cm gore. Da bi se došlo do vrha A_2, treba ići još 3 cm desno i još 3 cm gore, do vrha A_3 još 3 cm desno i još 3 cm gore. Dakle, nakon prvog kvadrata, svakim sljedećim kvadratom dolazi se do točke koja je 3 cm desno i 3 cm gore u odnosu na posljednju točku na dijagonali velikog kvadrata.



S obzirom da se dodavanjem kvadrata pomiče prema gore jednako koliko i udesno, dovoljno je gledati pomake udesno. Od početne točke zbroj svih pomaka treba biti jednak duljini stranice velikog kvadrata, što iznosi 2020 cm. Kod prvog kvadrata pomak je 4 cm, a kod svakog sljedećeg po 3 cm.
Označimo s n ukupan broj kvadrata duljine stranice 4 cm u tom nizu.
Tada je $4\text{ cm} + (n-1)\cdot 3\text{ cm} = 2020\text{ cm}$.

Odnosno imamo $3n + 1 = 2020$, odakle dobivamo da je $n = 673$.

Opseg dobivenog lika može se dobiti tako da se od zbroja opsega svih kvadrata duljine stranice 4 cm, oduzme zbroj opsega malih kvadrata duljine stranice 1 cm koji su nastali preklapanjem susjednih kvadrata.
Traženi opseg je 673 · 16 cm – 672 · 4 cm = 8080 cm = 808 dm.

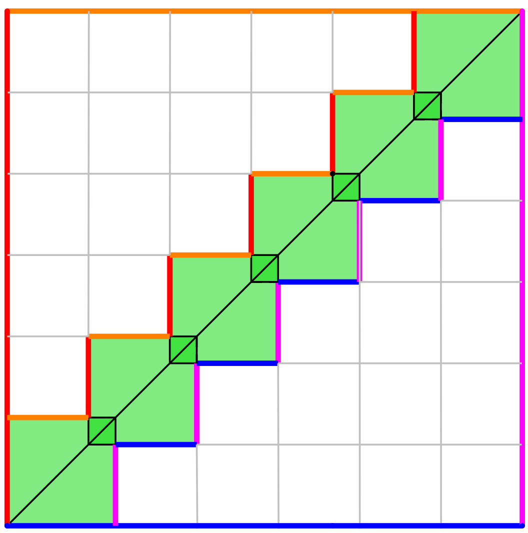
Rješenje, drugi način

Kao u prvom načinu, odredimo da je ukupan broj kvadrata 673.

Prvi i posljednji kvadrat u nizu pridonose opsegu lika sa 4+4+3+3=14 cm, dok svi ostali pridonose sa 3+3+3+3=12 cm. Stoga je opseg zelenog lika

2 · 14 cm + 671 · 4 cm = 8080 cm = 808 dm.

Rješenje, treći način.



Produljimo stranice zelenih kvadrata tako da na svakoj polovice velikog kvadrata dobijemo kvadratnu mrežu (na slici je prikazano kako to izgleda na manjem primjeru).
Sada lako uočavamo da je opseg tog lika jednak opsegu velikog kvadrata. Naime, zeleni lik je omeđen plavim, ružičastim, narančastim i crvenim dužinama. Ukupna duljina plavih dužina jednaka je duljini plave stranice velikog kvadrata, a slično vrijedi i za ružičaste, narančaste i crvene dužine.

Opseg lika jednak je opsegu kvadrata:

4 · 2020 = 8080 cm = 808 dm.

9. U kinu

Nino, Miro, Bruno, Damjan, Ivana i Ana kupili su ulaznice za kino za prvih šest sjedala u trećem redu. Ivana i Ana žele sjediti jedna pored druge. Na koliko se načina njih šestero može rasporediti ako žele udovoljiti Ivani i Ani?

Rezultat: 240

Rješenje, prvi način.

Odgovorimo najprije na jednostavnije pitanje: na koliko bi načina moglo sjesti petero djece na pet sjedala? Na prvo sjedalo može sjesti bilo tko od petero djece, što je 5 načina, na drugo može sjesti bilo tko od preostalih četvero pa su to 4 načina itd.

Prema tome, bilo bi ukupno $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ načina.

Promotrimo sada naš zadatak: šestero je djece, ali s obzirom da Ivana i Ana žele sjediti jedna do druge, povežimo njih dvije, pa se možemo pitati na koliko načina je moguće smjestiti ovih 5 blokova:

$\boxed{N}\quad \boxed{M}\quad \boxed{B}\quad \boxed{D}\quad \boxed{I \mid A}$

Odgovor bi bio: na 120 načina. No, u svakom od dobivenih načina djevojke mogu zamijeniti mjesta pa se na taj način dobiva novih 120 načina, što je ukupno 240 načina

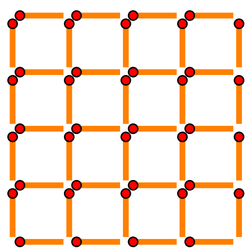
Rješenje, drugi način.

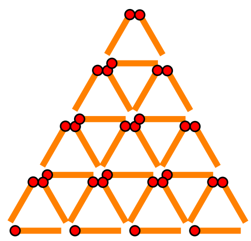
Ivana i Ana mogu sjesti na 1. i 2. sjedalo na dva različita načina. Kad su se one smjestile, ostalih četvero prijatelja mogu sjesti na $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ načina. Prema tome, ukupno je 48 načina u slučaju da su Ivana i Ana na prva dva mjesta. Ako Ivana i Ana sjednu na 2. i 3. mjesto, na sličan način dobiva se također 48 načina. Kako se Ivana i Ana mogu smjestiti na 1. i 2., 2. i 3., 3. i 4., 4. i 5. ili 5. i 6. mjesto, što je ukupno 5 slučajeva, dobiva se ukupno $5 \cdot 48 = 240$ načina sjedenja svih šestero prijatelja.

10. Šibice

Ivica je od šibica sastavio kvadrat stranice duljine 36. Marica je uzela sve te šibice i sastavila jednakostranični trokut stranice duljine 36. Koliko je šibica ostalo neiskorišteno?

Na slikama su prikazani kvadrat i jednakostranični trokut stranice duljine 4 sastavljeni od šibica.





Rezultat: 666

Rješenje, prvi način.

Prebrojimo koliko je šibica potrebno za kvadrat, a koliko za trokut stranice duljine 36.

Šibice koje tvore kvadrat su postavljene horizontalno ili vertikalno. Odredimo najprije koliko je horizontalno postavljenih šibica. U svakom redu je po 36 šibica, a redova ima 37. Zato je broj horizontalno postavljenih šibica $36 \cdot 37 = 1332$. Isto je toliko i vertikalno postavljenih šibica. Za kvadrat stranice duljine 36 je potrebno $2 \cdot 1332 = 2664$ šibica.

Šibice koje tvore trokut su postavljene u tri smjera. U svakom smjeru je broj šibica

$$36 + 35 + 34 + ... + 3 + 2 + 1 = (36 + 1) + (35 + 2) + ... + (19 + 18) = 18 \cdot 37 = 666.$$

Zato je za trokut stranice duljine 36 utrošeno ukupno $3 \cdot 666 = 1998$ šibica.

Ostalo je neiskorišteno $2664 - 1998 = 666$ šibica.

Napomena: Šibice koje tvore trokut možemo podijeliti u grupice po tri koje tvore male trokute. Odredimo koliko ih je. Na dnu je 36 trokuta, u sljedećem redu ih je 35 i u svakom sljedećem po jedan manje, dok ne dođemo do vrha gdje je samo jedan trokut. Ukupan broj tako uočenih malih trokuta je

$$36 + 35 + 34 + ... + 3 + 2 + 1 = (36 + 1) + (35 + 2) + ... + (19 + 18) = 18 \cdot 37 = 666.$$

Rješenje, drugi način.

Od kvadrata stranice duljine 36 možemo ukloniti sve šibice koje čine male kvadrate u prvom redu i prvom stupcu. Tako ćemo dobiti kvadrat duljine 35.

Uklonili smo 4 puta po 36 šibica (36 na stranici kvadrata, te 36 između kvadrata). Od tih šibica možemo složiti 36 trokuta na dnu velikog trokuta i ostat će nam još 36 šibica viška.

Postupak možemo nastaviti sa kvadratom duljine 35 (složimo 35 trokuta u drugom redu velikog trokuta i preostane nam 35 šibica viška), pa kvadratom duljine 34 itd. Na kraju tog postupka imamo kvadrat duljine 1 od kojeg napravimo mali trokut na vrhu velikog trokuta i ostane nam jedna šibica viška. Ukupno nam je viška

$$36 + 35 + 34 + ... + 3 + 2 + 1 = (36 + 1) + (35 + 2) + ... + (19 + 18) = 18 \cdot 37 = 666 \text{ šibica.}$$