Hrvatsko matematičko društvo

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

subota, 6. lipnja 2020.

Rješenja zadataka za 6. razred

1. Šesteroznamenkasti broj

Svaka znamenka šesteroznamenkastog broja, počevši od znamenke tisućica, jednaka je zbroju prethodnih dviju znamenaka (koje se nalaze njoj slijeva). Koji je troznamenkasti završetak najvećeg broja s tim svojstvom

Rezultat: 369

Rješenje, prvi način.

Ako je početna znamenka 1, imamo sljedeće mogućnosti: 101123 i 112358.

Naime, ako bi druga znamenka slijeva bila 2, onda bi prvih pet znamenki slijeva bilo redom 1,2,3,5,8 i više ne možemo odabrati znamenku jedinica da uvjeti zadatka budu zadovoljeni. Pogotovo nije moguće da druga znamenka slijeva bude veća od 2.

Ako je početna znamenka 2 imamo mogućnost 202246.

Naime, ako bi druga znamenka slijeva bila 1, onda bi prvih pet znamenki slijeva bilo redom 2,1,3,4,7 i više ne možemo odabrati znamenku jedinica da uvjeti zadatka budu zadovoljeni. Pogotovo nije moguće da druga znamenka slijeva bude veća od 1.

Na sličan način zaključujemo da je jedina mogućnost da prva znamenka slijeva bude 3 te da druga slijeva bude 0; tako dobivamo broj 303369.

Također, na sličan način zaključujemo da početna znamenka ne može biti 4 ili veća od 4.

Vidimo da je najveći takav broj 303369, a zadnje tri znamenke su 369.

Rješenje, drugi način.

Neka je $\overline{abcdef}$ šesteroznamenkasti broj za zadanim svojstvom.
Tada za znamenke c, d, e i f vrijedi: $c = a + b$, $d = b + c$, $e = c + d$, $f = d + e$.
Iz svih tih jednakosti slijedi $f = 5b + 3a$.
Iz uvjeta $3a+5b \leq 9$, slijedi da je b=1 ili b=0. Pritom, a je veći (time je i šesteroznamenkasti broj veći) ako je b=0. Tada znamenka a može biti 1, 2 ili 3. Najveći šesteroznamenkasti broj dobivamo za a = 3. Ako je a = 3, ostale znamenke su: c = 3, d = 3, e = 6 i f = 9. Radi se o broju 303369, pa je traženi troznamenkasti završetak 369.

2. Pravokutnici

Izračunaj zbroj svih mogućih različitih opsega koje mogu imati pravokutnici površine 144 kojima su duljine svih stranica prirodni brojevi.

Rezultat: 830

Rješenje.

U tablici su prikazane sve mogućnosti za dimenzije pravokutnika *a x b*, te pripadni opseg.

a	1	2	3	4	6	8	9	12
b	144	72	48	36	24	18	16	12
Opseg	290	148	102	80	60	52	50	48

Zbroj opsega je 830.

3. Dezinfekcija

Obitelj Ekološki na ulazu u stan ima bocu s dezinfekcijskim sredstvom koje, naravno, rade sami. Majka je istočila $\frac{3}{5}$ ukupne količine i prelila u svoju bočicu. Potom je otac istočio $\frac{1}{6}$ ostatka u svoju bočicu. Nakon toga je sin ulio $\frac{6}{7}$ ostatka u svoju bočicu, ali je još 15 ml prolio. Poslije toga, u boci je ostalo samo 10 ml tekućine. Koliko je mililitara tekućine za dezinfekciju bilo u boci na početku?

Rezultat: 525

Rješenje, prvi način.

Kako je u boci ostalo 10 ml, a sin je 15 ml prolio znači da je u boci ostalo 25 ml nakon što je sin odlio svoj dio. Kako je sin odlio $\frac{6}{7}$ količine tekućine iz boce, koja je ostala nakon očevog dijela, znači da 25 ml čini $\frac{1}{7}$ količine tekućine koja je ostala nakon očevog dijela.

Zaključujemo: nakon istakanja očevog dijela, u boci je ostalo $7 \cdot 25 = 175$ ml tekućine.

Otac je potrošio $\frac{1}{6}$ količine tekućine iz boce, koja je ostala nakon majčinog dijela, pa 175 ml čini $\frac{5}{6}$ količine tekućine iz boce koja je ostala nakon majčinog dijela.

Ako je $\frac{5}{6}$ količine 175 ml, onda je $\frac{1}{6}$ količine $175 : 5 = 35$ ml.

Zaključujemo: nakon istakanja majčinog dijela, u boci je ostalo $6 \cdot 35 = 210$ ml tekućine.

Majka je potrošila $\frac{3}{5}$ količine tekućine iz boce pa je u boci ostalo $\frac{2}{5}$ količine.

Konačno, ako je $\frac{2}{5}$ količine tekućine iz boce 210 ml, onda je $\frac{1}{5}$ te količine $210 : 2 = 105$ ml, pa je u boci bilo ukupno $5 \cdot 105 = 525$ ml tekućine za dezinfekciju.

Rješenje, drugi način.

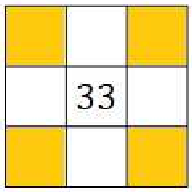
Označimo s x količinu tekućine u ml za dezinfekciju u boci na početku.

Nakon što je majka istočila svoj dio, preostalo je $\frac{2}{5}x$ tekućine. Kako je otac istočio $\frac{1}{6}$ ostatka, tj. $\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5}x = \frac{1}{15}x$ tekućine, ukupno je istočeno $\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{15}\right)x = \frac{10}{15}x = \frac{2}{3}x$ tekućine, te je nakon toga je preostalo $\frac{1}{3}x$ tekućine.

Kako je sin istočio $\frac{6}{7}$ ostatka, tj. $\frac{6}{7} \cdot \frac{1}{3}x = \frac{2}{7}x$ tekućine, ukupno je istočeno $\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{7}\right)x = \frac{20}{21}x$ tekućine. Preostalo je $\frac{1}{21}x$ tekućine. Kako je u boci ostalo 10 ml, a sin je 15 ml prolio znači da je u boci ostalo 25 ml nakon što je sin odlio svoj dio.

Zato iz $\frac{1}{21}x = 25$ ml, slijedi da je $x = 525$ ml.

4. Magična tablica



U svako polje tablice na slici upisan je po jedan od brojeva $11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88$ i 99. Zbrojevi triju brojeva u poljima svakog retka, odnosno stupca međusobno su jednaki. Ako je u središnje polje tablice upisan broj 33, koliki je zbroj brojeva upisanih u četiri obojena polja?

Rezultat: 198

Rješenje, prvi način

S obzirom da je $11 + 22 + 33 + 44 + 55 + 66 + 77 + 88 + 99 = \cdots = 495$, zbroj brojeva u svakom retku i u svakom stupcu mora biti 495/3= 165.
Promotrimo brojeve A, B, C i D (na slici):

	C	
A	**33**	**B**
	D	

S obzirom da treba biti A + 33 + B = 165 i C + 3 + D = 165, treba vrijediti A + B = 132 i C + D = 132. Kako je A+B+C+D+33 = 132+132+33 = 297, zaključujemo da je zbroj preostalih četiriju brojeva 495 - 297 = 198.

Rješenje, drugi način

S obzirom da je $11 + 22 + 33 + 44 + 55 + 66 + 77 + 88 + 99 = \cdots = 495$, zbroj brojeva u svakom retku i u svakom stupcu mora biti 495/3= 165.
Promotrimo brojeve A, B, C i D (na slici):

	C	
A	**33**	**B**
	D	

Treba odrediti koji par brojeva može biti u drugom retku. Uzmimo da je $A < B$. Budući da je

$A + 33 + B = 165$, treba vrijediti $A + B = 132$. Najveća vrijednost koju može imati B je 99, pa A ne može biti ni 11 ni 22 jer bi u tom slučaju B trebao biti veći od 99. Broj 33 je u sredini, pa je najmanji mogući broj $A = 44$. U tom slučaju $B = 132 – 44 = 88$.

Nadalje, A može biti 55. U tom slučaju $B = 132 – 55 = 77$. Kad bi A bio 66, tada bi i B trebao biti 66, a to ne može jer svi brojevi u tablici trebaju biti različiti.

Prema tome, jedina dva para brojeva koji dolaze u obzir su 44 i 88, te 55 i 77. Kako isto vrijedi i za brojeve C i D, znači da će jedan od tih parova brojeva biti A i B, a drugi C i D. Preostali brojevi, a to su 11, 22, 66 i 99 bit će u 4 obojena polja. Njihov zbroj je 198.

5. Veće od 6

Koliko ima troznamenkastih prirodnih brojeva kojima je barem jedna znamenka veća od 6?

Rezultat: 606

Rješenje, prvi način

Ukupno troznamenkastih brojeva ima 900. Izračunajmo koliko ima onih za koje ne vrijedi da je barem jedna znamenka veća od 6, tj. onih za koje vrijedi da je svaka znamenka manja ili jednaka 6. Za takve brojeve znamenku stotica možemo birati na 6 načina (znamenka stotica može biti 1,2,3,4,5,6), a znamenku desetica i jedinica na 7 načina (znamenka desetica i jedinica može biti 0,1,2,3,4,5,6) pa takvih brojeva ima $6 \cdot 7 \cdot 7 = 294$.

Zato traženih brojeva ima $900 - 294 = 606$.

Rješenje, drugi način

1. slučaj - samo jedna od znamenaka iz skupa {7,8,9}

Ako je ta znamenka znamenka stotica, onda to znači da su i znamenka desetica i znamenka jedinica iz skupa {0,1,2,3,4,5,6}. Takvih brojeva ima $3 \cdot 7 \cdot 7 = 147$.

Ako je ta znamenka znamenka desetica, onda to znači da je znamenka stotica iz skupa {1,2,3,4,5,6}, a znamenka jedinica iz skupa {0,1,2,3,4,5,6}. Takvih brojeva ima $3 \cdot 6 \cdot 7 = 126$.

Ako je ta znamenka znamenka jedinica, slično kao u prethodnom slučaju zaključujemo da takvih brojeva ima $3 \cdot 6 \cdot 7 = 126$.

Ukupan ima $147 + 2 \cdot 126 = 399$ brojeva kojima je samo jedna od znamenaka iz skupa {7,8,9}.

2. slučaj - dvije znamenke iz skupa {7,8,9}

Ako su te dvije znamenke znamenke desetica i jedinica, onda to znači da je znamenka stotica iz skupa {1,2,3,4,5,6}. Takvih brojeva ima $6 \cdot 3 \cdot 3 = 54$.

Ako se među te dvije znamenke nalazi znamenka stotica, onda imamo još $2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 = 126$.

Ukupno, ako su dvije znamenke iz skupa {7,8,9}, takvih brojeva ima $54 + 126 = 180$.

3. slučaj - sve tri znamenke iz skupa {7,8,9}

U tom slučaju imamo $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ takvih brojeva.

Konačno, ukupni broj traženih brojeva je $399 + 180 + 27 = 606$.

6. Zlatnici

Ante, Branimir, Celestin i Dubravko sjede oko okruglog stola (tim redom). Zajedno imaju 1600 zlatnika. Najprije Ante polovinu svojih zlatnika podijeli na dva jednaka dijela i po jedan dio preda svom lijevom i desnom susjedu, dok drugu polovinu zadržava za sebe. Nakon toga isto tako postupi Branimir, potom Celestin i na kraju Dubravko. Na kraju sva četvorica imaju jednak broj zlatnika. Koliko je zlatnika Branimir imao na početku?

Rezultat: 575

Rješenje:

Rješavanje unatrag:

	Ante	**Branimir**	**Celestin**	**Dubravko**
broj zlatnika na kraju	400	400	400	400
broj zlatnika nakon 3. koraka	200	400	200	800
broj zlatnika nakon 2. koraka	200	300	400	700
broj zlatnika nakon 1. koraka	50	600	250	700
broj zlatnika na početku	100	**575**	250	675

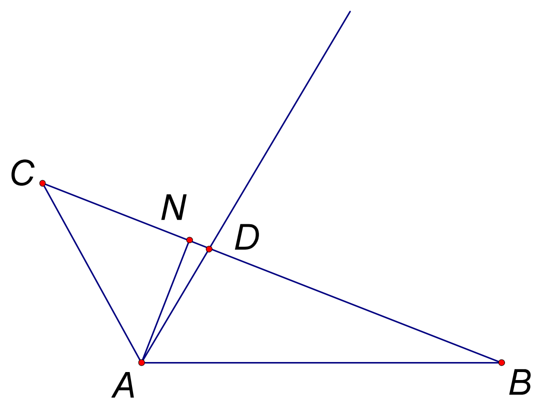
Napomena: Zadatak se može riješiti i tako da se postavi sustav od 4 jednadžbe s 4 nepoznanice, ali je takav pristup puno kompliciraniji.

7. Tupi kut

Zadan je tupokutni trokut ΔABC kojemu su veličine svih kutova izražene u stupnjevima prirodni brojevi. Simetrala tupog kuta $\sphericalangle BAC$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki *D*, a nožište visine iz vrha *A* je točka *N*. Točka *D* nalazi se između točaka *N* i *B*. Veličina kuta $\sphericalangle CBA$ deset je puta veća od veličine kuta $\sphericalangle DAN$ koja je, izražena u stupnjevima, također prirodni broj. Kolika je najveća moguća veličina tupog kuta tog trokuta izražena u stupnjevima?

Rezultat: 158

Rješenje:



Uvedimo oznake $\alpha = |\sphericalangle BAC|$, $x = |\sphericalangle DAN|$.

Tada je $|\sphericalangle ABC| = 10x$.

Kako je trokut ΔABN pravokutan,
imamo $\frac{\alpha}{2} + x + 10x = 90^o$, odnosno $\alpha + 22x = 180^o$.

Kako je najmanji mogući x jednak 1^o, onda je najveći mogući α jednak 158^o.

8. Zajednička mjera i višekratnik

Neka su a, b i c prirodni brojevi za koje vrijedi

$$D(a,b) = 4, \quad D(b,c) = 6 \quad \text{i} \quad V(a,b,c) = 36000.$$

Koliko najviše može iznositi $D(a,c)$?

$D(m,n)$ je oznaka za najveći zajednički djelitelj brojeva m i n, a $V(p,q,r)$ za najmanji zajednički višekratnik brojeva p, q i r.

Rezultat: 250

Rješenje:

Rastavom na proste faktore dobivamo da je $36000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$.

Iz uvjeta zadatka slijedi da je

$$a = 2 \cdot 2 \cdot x$$

$$b = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot y$$

$$c = 2 \cdot 3 \cdot z$$

Pri čemu x ne može biti djeljiv s 3, a z ne može biti djeljiv s 2. Slijedi da $D(x,z)$ dijeli $5 \cdot 5 \cdot 5$ pa $D(a,c)$ može najviše biti $2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 250$.

9. Dijagonalni kvadrati

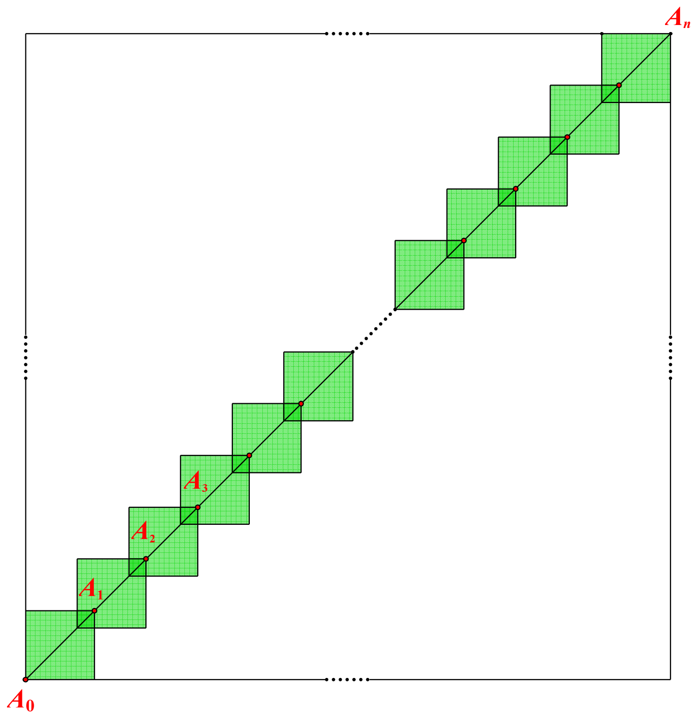
Dijagonalu velikog kvadrata stranice duljine 2020 cm Vlado je prekrio nizom kvadrata stranice duljine 4 cm izrezanih od zelenog kolaž-papira. Dijagonale zelenih kvadrata pripadaju dijagonali velikog kvadrata, a presjek svakih dvaju uzastopnih zelenih kvadrata je kvadrat stranice duljine 1 cm. Izračunaj površinu lika koji tvore zeleni kvadrati. Rezultat izrazi u kvadratnim decimetrima i zaokruži na najbliži cijeli broj.

Rezultat: 101

Rješenje, prvi način.

Izračunajmo koliko je ukupno kvadrata duljine stranice 4 cm.
Krenimo s ucrtavanjem kvadrata počevši od donjeg lijevog vrha velikog kvadrata koji označimo s A_0. Gornji desni vrh prvog ucrtanog kvadrata označimo s A_1, gornji desni vrh drugog ucrtanog kvadrata označimo s A_2 itd.
Od vrha A_0 do vrha A_1 može se doći tako da se pomakne 4 cm desno i 4 cm gore. Da bi se došlo do vrha A_2, treba ići još 3 cm desno i još 3 cm gore, do vrha A_3 još 3 cm desno i još 3 cm gore. Dakle, nakon prvog kvadrata, svakim sljedećim kvadratom dolazi se do točke koja je 3 cm desno i 3 cm gore u odnosu na posljednju točku na dijagonali velikog kvadrata.

S obzirom da se dodavanjem kvadrata pomiče prema gore jednako koliko i udesno, dovoljno je gledati pomake udesno. Od početne točke zbroj svih pomaka treba biti jednak duljini stranice velikog kvadrata, što iznosi 2020 cm. Kod prvog kvadrata pomak je 4 cm, a kod svakog sljedećeg po 3 cm.



Označimo s n ukupan broj kvadrata duljine stranice 4 cm u tom nizu.
Tada je $4 \text{ cm} + (n-1) \cdot 3 \text{ cm} = 2020 \text{ cm}$.

Odnosno imamo $3n + 1 = 2020$, odakle dobivamo da je $n = 673$.

Pri računanje površine promatramo da je prvi kvadrat cijeli, a svi ostali su kvadrati stranice 4 cm od kojih je izrezan kvadrat stranice 1 cm. Površina je 16 + 672 * 15 = 10096 cm^2 = 100,96 dm^2

Zaokruženo na najbliži cijeli broj dobivamo da je površina približno jednaka 101 dm^2.

Rješenje,drugi način.

Od površine početnog kvadrata stranice 2020 cm oduzet ćemo dijelove koji nisu obojeni zeleno. Imamo dva sukladna dijela, od kojih se svaki sastoji od pravokutnika visine 3 cm i duljina redom 3 cm, 6 cm, …, 2016 cm.

Zbroj njihovih površina u cm^2 iznosi

$$\begin{aligned} 2 \cdot (3 \cdot 3 + 3 \cdot 6 + \cdots + 3 \cdot 2016) &= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot (1 + 2 + \cdots + 672) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{672 \cdot 673}{2} \\ &= 2016 \cdot 2019 \end{aligned}$$

Stoga je konačni rezultat u cm^2:

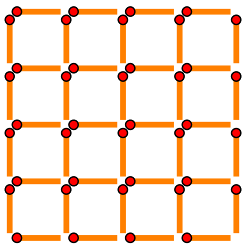
$$\begin{aligned} 2020 \cdot 2020 - 2016 \cdot 2019 &= 2020 \cdot 2020 - (2020 - 4) \cdot (2020 - 1) \\ &= 2020 \cdot 2020 - 2020 \cdot 2020 + 4 \cdot 2020 + 1 \cdot 2020 - 4 = 5 \cdot 2020 - 4 \\ &= 10096 \end{aligned}$$

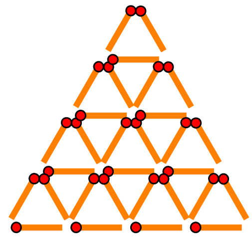
Rezultat iznosi $100{,}96 \text{ dm}^2$. Zaokruženo na najbliži cijeli broj dobivamo da je površina približno jednaka 101 dm^2.

10. Šibice

Ivica je od šibica sastavio kvadrat stranice duljine 36. Marica je uzela sve te šibice i sastavila jednakostranični trokut stranice duljine 36. Koliko je šibica ostalo neiskorišteno?

Na slikama su prikazani kvadrat i jednakostranični trokut stranice duljine 4 sastavljeni od šibica.





Rezultat: 666

Rješenje, prvi način.

Prebrojimo koliko je šibica potrebno za kvadrat, a koliko za trokut stranice duljine 36.

Šibice koje tvore kvadrat su postavljene horizontalno ili vertikalno. Odredimo najprije koliko je horizontalno postavljenih šibica. U svakom redu je po 36 šibica, a redova ima 37. Zato je broj horizontalno postavljenih šibica $36 \cdot 37 = 1332$. Isto je toliko i vertikalno postavljenih šibica. Za kvadrat stranice duljine 36 je potrebno $2 \cdot 1332 = 2664$ šibica.

Šibice koje tvore trokut su postavljene u tri smjera. U svakom smjeru je broj šibica

$$36 + 35 + 34 + \ldots + 3 + 2 + 1 = (36 + 1) + (35 + 2) + \ldots + (19 + 18) = 18 \cdot 37 = 666.$$

Zato je za trokut stranice duljine 36 utrošeno ukupno $3 \cdot 666 = 1998$ šibica.

Ostalo je neiskorišteno $2664 - 1998 = 666$ šibica.

Napomena: Šibice koje tvore trokut možemo podijeliti u grupice po tri koje tvore male trokute. Odredimo koliko ih je. Na dnu je 36 trokuta, u sljedećem redu ih je 35 i u svakom sljedećem po jedan manje, dok ne dođemo do vrha gdje je samo jedan trokut. Ukupan broj tako uočenih malih trokuta je

$$36 + 35 + 34 + \ldots + 3 + 2 + 1 = (36 + 1) + (35 + 2) + \ldots + (19 + 18) = 18 \cdot 37 = 666.$$

Rješenje, drugi način.

Od kvadrata stranice duljine 36 možemo ukloniti sve šibice koje čine male kvadrate u prvom redu i prvom stupcu. Tako ćemo dobiti kvadrat duljine 35.

Uklonili smo 4 puta po 36 šibica (36 na stranici kvadrata, te 36 između kvadrata). Od tih šibica možemo složiti 36 trokuta na dnu velikog trokuta i ostat će nam još 36 šibica viška.

Postupak možemo nastaviti sa kvadratom duljine 35 (složimo 35 trokuta u drugom redu velikog trokuta i preostane nam 35 šibica viška), pa kvadratom duljine 34 itd. Na kraju tog postupka imamo kvadrat duljine 1 od kojeg napravimo mali trokut na vrhu velikog trokuta i ostane nam jedna šibica viška. Ukupno nam je viška

$$36 + 35 + 34 + \ldots + 3 + 2 + 1 = (36 + 1) + (35 + 2) + \ldots + (19 + 18) = 18 \cdot 37 = 666 \text{ šibica.}$$