Hrvatsko matematičko društvo

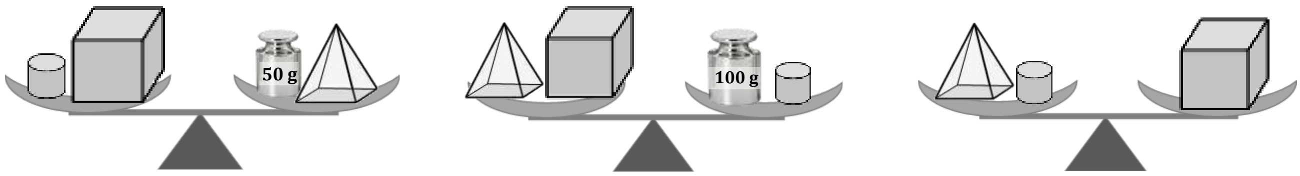
HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

prvo kolo – subota, 12. lipnja 2021.

Rješenja zadataka za 4. razred

1. Vaga

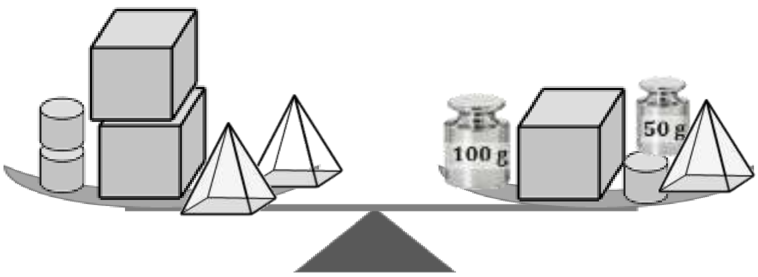
Marta se igra modelima kocke, valjka i piramide te utezima stavljajući ih na vagu. Na utezima je vidljiva njihova masa. Ako su vage na slikama u ravnoteži, odredi ukupnu masu kocke, valjka i piramide u gramima.



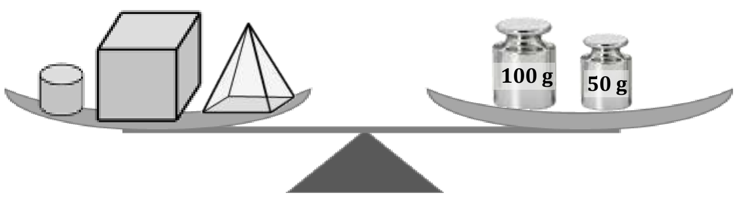
Rezultat: 150

Prvo rješenje.

Zamislimo da na lijevu stranu vage stavimo sve predmete koji su se nalazili na lijevoj strani vage na svim trima slikama, a na desnu stranu stavimo sve predmete koji su bili na desnim stranama vage. Tada bi se dobilo:



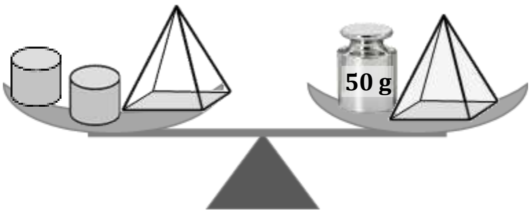
Skinemo li s jedne i druge strane po jednu kocku, valjak i piramidu, dobivamo:



Dakle, ukupna masa kocke, valjka i piramide iznosi 150 g.

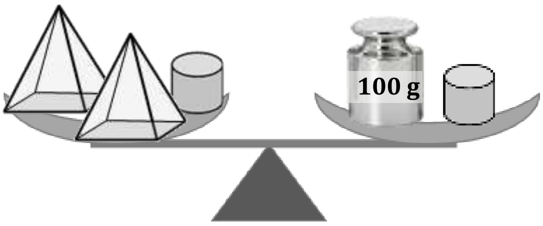
Drugo rješenje.

Na trećoj slici se vidi da kocka ima masu kao valjak i piramida zajedno. Stavimo li umjesto kocke na prvoj slici valjak i piramidu, vaga će ostati u ravnoteži i dobit ćemo sljedeće:

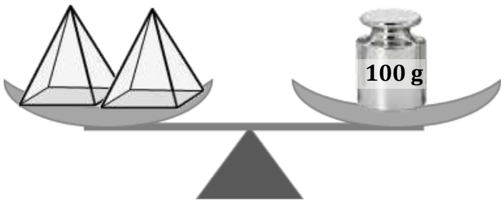


Ako maknemo piramidu s jedne i druge strane, vaga će ostati u ravnoteži. Tada lijevo ostaju 2 valjka, a desno uteg od 50 g, što znači da masa valjka iznosi 25 g.

Zamijenimo li kocku na drugoj slici valjkom i piramidom, vaga će također ostati u ravnoteži i dobit ćemo sljedeće:



Maknemo li valjak s jedne i druge strane, na lijevoj će strani ostati dvije piramide, a na desnoj uteg od 100 g, što znači da masa piramide iznosi 50 g.



Kocka ima masu kao valjak i piramida zajedno, to jest masa kocke iznosi 25 g + 50 g = 75 g.

Prema tome, masa valjka, piramide i kocke zajedno iznosi 25 g + 50 g + 75 g = 150 g.

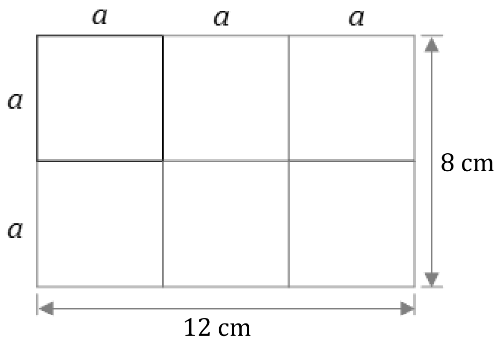
2. Umnoženi kvadrat

Ako duljinu jedne stranice kvadrata *K* uvećaš tri puta, a drugu dva puta, dobit ćeš pravokutnik *P* čija je površina 96 cm^2. Za koliko je milimetara opseg pravokutnika *P* veći od opsega kvadrata *K*?

Rezultat: 240

Rješenje.
Ako duljinu jedne stranice povećamo 3 puta, a duljinu druge 2 puta, površina će se povećati 6 puta.

Budući da površina dobivenog pravokutnika P iznosi 96 cm^2, slijedi da površina kvadrata *K* iznosi 96:6=16 cm^2. Stoga duljina stranice kvadrata *K* iznosi 4 cm, a njegov opseg 16 cm.



Duljine stranica pravokutnika P su $3a$ = 12 cm i $2a$ = 8 cm, a njegov opseg iznosi o = 40 cm.

Razlika opsega pravokutnika P i kvadrata K je 40 – 16 = 24 cm, tj. opseg pravokutnika P je za 240 mm veći od opsega kvadrata K.

3. Klupe

U parku je grupa učenika. Ako na svakoj klupi u parku sjedi po 7 učenika, bez mjesta će ostati 8 učenika. Ako bi učenici sjedili po 9 na klupi, četiri bi klupe ostale prazne. Koliko je učenika u parku?

Rezultat: 162

Prvo rješenje. Ako 8 učenika koji su ostali bez mjesta rasporedimo po 2 na klupe na kojima već sjedi po 7 učenika imat ćemo 4 klupe na kojima sjedi 9 umjesto 7 učenika.

Ispraznimo sada 4 klupe sa po 7 učenika. Tih 28 učenika možemo rasporediti po 2 na 14 klupa kojima već sjedi 7 učenika.

Dakle, ukupan broj učenika u parku je 4·9+14·9=162.

Drugo rješenje. Neka je x broj klupa u parku.

Prema prvoj rečenici slijedi da je broj učenika $7 \cdot x + 8$.

Prema drugoj rečenici je broj učenika jednak $9 \cdot (x - 4)$. Stoga vrijedi

$$7 \cdot x + 8 = 9 \cdot (x - 4) = 9 \cdot x - 36.$$

Slijedi da je $9 \cdot x - 36 = 7x + 8$, tj. $2 \cdot x = 44$. Zaključujemo da su u parku 22 klupe.

U parku je bilo $7 \cdot 22 + 8 = 162$ učenika.

4. Zamišljeni broj

Grga je zamislio troznamenkasti broj, a njegovi ga prijatelji pokušavaju pogoditi.
Ovo su njihovi pokušaji:

Boris: 218 Robert: 571 Marko: 732 Darko: 853

Grga im je rekao: „Jedan od vas je pogodio sve znamenke, a ostali samo po jednu, no nijedna od pogođenih znamenaka nije na pravom mjestu.“ Na to mu prijatelji kažu: „Na temelju ovih informacija ne možemo odrediti koji si broj zamislio jer postoji više takvih brojeva.“ Odredi zbroj svih tih mogućih brojeva.

Rezultat: 712

Rješenje.

Pretpostavimo da je Boris pogodio sve znamenke.
Tada znamenka 2 nije ni na mjestu stotica, ni na mjestu jedinica (jer Marko nije pogodio točno mjesto nijedne znamenke) pa mora biti na mjestu desetica.
Znamenka 1 nije ni na mjestu desetica, ni na mjestu jedinica (jer je Robert pretpostavio da je 1 na mjestu jedinica) pa mora biti na mjestu stotica.
Znamenka 8 nije ni na mjestu jedinica, ni na mjestu stotica (Darkova pretpostavka) pa mora biti na mjestu desetica.
No, na mjestu desetica ne mogu biti dvije znamenke (2 i 8) pa je ovo nemoguće.
Boris nije pogodio sve tri znamenke.

Pretpostavimo da je Robert pogodio sve znamenke. Tada na sličan način zaključujemo da:
5 nije ni na mjestu stotica, ni na mjestu desetica pa mora biti na mjestu jedinica,
7 nije ni na mjestu desetica, ni na mjestu stotica pa mora biti na mjestu jedinica,
a to je nemoguće.

Pretpostavimo da je Marko pogodio sve znamenke. Tada zaključujemo:
7 nije ni na mjestu stotica, ni na mjestu desetica pa mora biti na mjestu jedinica,
3 nije ni na mjestu desetica, ni na mjestu jedinica pa mora biti na mjestu stotica,
2 nije ni na mjestu jedinica, ni na mjestu stotica pa mora biti na mjestu desetica.
To je moguće samo ako je zamišljeni broj jednak 327.

Pretpostavimo da je Darko pogodio sve znamenke. Tada:
8 nije ni na mjestu stotica, ni na mjestu jedinica pa mora biti na mjestu desetica,
5 nije ni na mjestu desetica, ni na mjestu stotica pa mora biti na mjestu jedinica,
3 nije ni na mjestu jedinica, ni na mjestu desetica pa mora biti na mjestu stotica.
To je moguće samo ako je zamišljeni broj jednak 385.

Zbroj svih mogućih brojeva iznosi $327 + 385 = 712$.

5. Kartice

U kutiji je bilo sedam kartica na kojima su napisani brojevi od 3 do 9 (na svakoj kartici po jedan broj). Mirko je iz kutije nasumično uzeo tri kartice, a Slavko dvije kartice, dok su dvije kartice ostale u kutiji. Mirko je pogledao svoje kartice i rekao Slavku: „Znam da je zbroj brojeva na tvojim karticama paran.“ Koliki je umnožak svih brojeva na Mirkovim karticama?

Rezultat: 192

Rješenje.

Zbroj dvaju brojeva na karticama koje je uzeo Slavko može biti paran samo ako su oba broja iste parnosti. Među svim brojevima na karticama dana su četiri neparna i tri parna broja.

Ako Mirko ima barem jedan neparan broj među svojim karticama, tj. ako nema sva tri parna broja, onda ne može biti siguran da Slavko nije uzeo jedan paran i jedan neparan broj.

Dakle, Mirko u rukama ima kartice s brojevima 4, 6 i 8, a njihov umnožak $4 \cdot 6 \cdot 8 = 192$.

6. Metlomet

Na turniru u novom sportu metlometu natječe se 19 ekipa koje su svaka sa svakom odigrale po jednu utakmicu. U slučaju pobjede jedne od ekipa, ona dobiva 4 boda, a poražena ne dobiva niti jedan bod. U slučaju neriješenog rezultata, svaka od te dvije ekipe dobiva po jedan bod. Sve ekipe na turniru su osvojile ukupno 600 bodova. Koliko je utakmica završilo pobjedom jedne od ekipa?

Rezultat: 129

Rješenje.

Pokažimo da je ukupno odigrano 171 utakmica. To možemo pokazati na više različitih načina.

Prvi način. Zamislimo da svake dvije ekipe igraju dvaput, jednom je jedna ekipa domaćin, a drugi put druga. Domaćina možemo odabrati na 19 načina, a gostujuću ekipu na 18 načina. To znači da je dvostruki broj utakmica jednak $19 \cdot 18 = 342$, pa je broj utakmica 342 : 2 = 171.

Drugi način. Prva ekipa je igrala sa 18 preostalih ekipa. Za drugu ekipu smo već brojali da je igrala sa prvom ekipom, pa moramo brojati njene utakmice sa preostalih 17 ekipa. Za treću ekipu smo već brojali utakmice s prve dvije ekipe, pa dodajemo utakmice sa preostalih 16 ekipa. Tako nastavljamo dalje i zaključujemo da je ukupan broj utakmica $18 + 17 + 16 + \cdots + 3 + 2 + 1 = 171$.

Ako bi u svim utakmicama jedna ekipa pobijedila, onda bi ukupan broj bodova iznosio $171 \cdot 4 = 684$, što bi bilo 84 boda više nego što je zadano u zadatku. To znači da umjesto po 4 boda, neke utakmice donose po 2 boda (po 1 svakoj ekipi). Dakle, u 42 utakmice je ostvareno ukupno 2 boda, a ne 4 boda, tj. 42 utakmice su završile neriješeno.

Broj utakmica koje su završile pobjedom jedne ekipe je $171 - 42 = 129$.

7. Silazne znamenke

Koliko ima troznamenkastih brojeva kojima je znamenka stotica veća od znamenke desetica, a znamenka desetica veća od znamenke jedinica?

Rezultat: 120

Prvo rješenje.

Tri različite znamenke možemo odabrati na $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ načina jer prvu znamenku možemo odabrati na 10 načina, drugu koja će biti različita od nje na 9 načina, a treću koja će biti različita od prve dvije na 8 načina.

Uočimo da imamo šest različitih načina da poredamo te tri znamenke a, b, c : abc, acb, bac, bca, cab, cba. No, točno u jednom od tih šest poredaka su znamenke silazne.

Stoga je ukupni broj traženih troznamenkastih brojeva 720 : 6 =120.

Drugo rješenje.

Zbog preglednosti zapišimo rješenje u tablicu:

Znamenka stotica	Znamenka desetica	Znamenka jedinica	Broj brojeva
9	8 7 6 5 4 3 2 1	7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0 5, 4, 3, 2, 1, 0 4, 3, 2, 1, 0 3, 2, 1, 0 2, 1, 0 1, 0 0	8 7 6 5 4 3 2 1
8	7 6 ... 1	6, 5, 4, 3, 2, 1, 0 5, 4, 3, 2, 1, 0 ... 0	7 6 ... 1
7	6 5 ... 1	5, 4, 3, 2, 1, 0 4, 3, 2, 1, 0 ... 0	6 5 ... 1
6	5 4 ... 1	4, 3, 2, 1, 0 3, 2, 1, 0 ... 0	5 4 ... 1
5	4 3 2 1	3, 2, 1, 0 2, 1, 0 2,1 0	4 3 2 1
4	3 2 1	2, 1, 0 1, 0 0	3 2 1
3	2 1	1, 0 0	2 1
2	1	0	1
Ne može biti manje od 2 jer znamenka desetica treba biti manja nje, a znamenka jedinica manja od znamenke desetica			

Stoga je ukupno rješenje

(1+2+3+4+5+6+7+8) + (1+2+3+4+5+6+7) + (1+2+3+4+5+6) + (1+2+3+4+5) + (1+2+3+4) + (1+2+3) + (1+2) + 1 = 36 + 28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 120.

8. Biciklist i pješak

Biciklist i pješak, međusobno udaljeni 1 km, kreću istovremeno jedan prema drugom. Biciklist prijeđe 300 metara u minuti, a pješak 90 metara u minuti. Koliko će metara biti međusobno udaljeni 1 minutu i 48 sekundi nakon polaska?

Rezultat: 298

Prvo rješenje.

Biciklist i pješak su udaljeni 1 km = 1000 m. Od tog broja ćemo oduzeti broj metara koji biciklist i pješak prijeđu u 1 minutu i 48 sekundi = 108 sekundi.

Biciklist prijeđe 300 metara u 60 sekundi, pa zaključujemo da prijeđe 5 metara u 1 sekundi.

Dakle, u 108 sekundi biciklist prijeđe $5 \cdot 108 = 540$ metara.

Pješak prijeđe 90 metara u 60 sekundi, pa zaključujemo da prijeđe 3 metra u 2 sekunde.

Budući da je 108 : 2 = 54, u 108 sekundi pješak prijeđe $3 \cdot 54 = 162$ metra.

Zajedno su biciklist i pješak prešli 540 + 162 = 702 metra.

Konačno, udaljenost između biciklista i pješaka je 1000 – 702 = 298 metara.

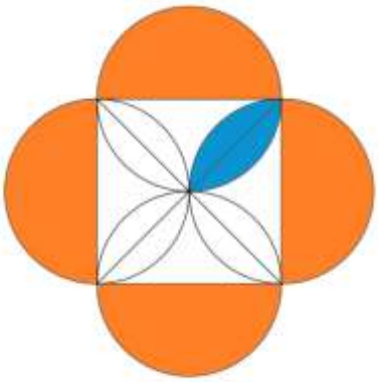
Drugo rješenje.

Biciklist i pješak su udaljeni 1 km = 1000 m. Od tog broja oduzimamo koliko se udaljenost smanji u 1 minutu i 48 sekundi = 108 sekundi.

Udaljenost između njih se smanjuje 390 metara u minuti, tj. 390 metara u 60 sekundi.

U 2 sekunde se udaljenost smanjiti za 390:30=13 metara. U 108 sekundi se udaljenost smanji za $13 \cdot 54 = 702$ metra. Konačno, udaljenost između biciklista i pješaka je 1000 – 702 = 298 metara.

9. Krugovi

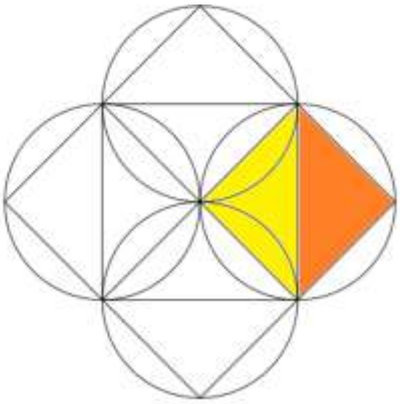


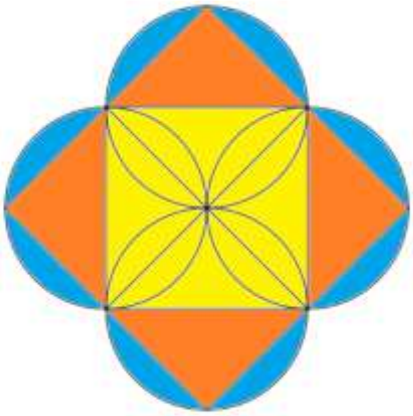
Površina plavo obojenog lika na slici iznosi 124 cm^2. Za koliko kvadratnih centimetara je površina kvadrata na slici manja od ukupne površine narančasto obojenih likova?

Rezultat: 496

Prvo rješenje.

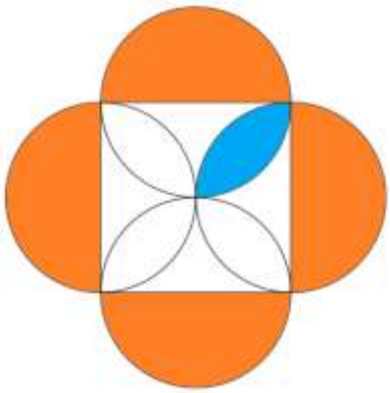
Dužine koje spajaju nasuprotne vrhove dijele kvadrat na četiri trokuta. Nacrtajmo ta četiri trokuta unutar narančastih polukrugova. Površina žutog trokuta jednaka je površini narančastog trokuta na slici.





Zbroj površina narančastih trokuta jednak je površini žutog kvadrata, pa je razlika površina koja se traži u zadatku jednaka zbroju površina plavih likova. S obzirom da je zbroj površina dvaju plavih likova na slici jednak površini plavo obojenog lika zadanoj u zadatku, što iznosi 124 cm^2, znači da je zbroj površina svih 8 plavo obojenih dijelova jednak $4 \cdot 124 = 496$ cm^2.

Drugo rješenje.



Unutar kvadrata su nacrtana četiri dijela kruga koji su jednake površine kao narančasti likovi. Ti dijelovi imaju zajedničke likove koji su iste površine kao plavi lik.

Dakle, ukupna površina narančastih likova je veća od površine kvadrata točno za četverostruku površinu plavog lika, to jest za $4 \cdot 124 = 496$ cm^2.

10. Žarulje

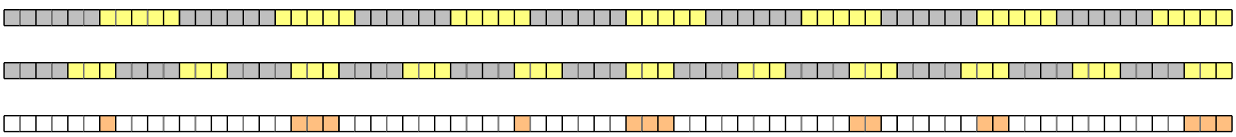
U sobi su dvije žarulje. Kada se uključi prekidač prve žarulje, ona zasvijetli tek nakon 6 s i svijetli 5 s, a zatim opet ne svijetli 6 s i svijetli 5 s, i to se stalno ponavlja. Kada se uključi prekidač druge žarulje, ona zasvijetli nakon 4 s i svijetli 3 s, opet ne svijetli 4 s i svijetli 3 s, i to se stalno ponavlja. Linda je istovremeno uključila oba prekidača i nakon 2021 sekunde ih isključila. Koliko su sekundi za to vrijeme obje žarulje istovremeno svijetlile?

Rezultat: 392

Rješenje.

Svakih 11 sekundi prva će žarulja ponavljati period u kojem 6 sekundi neće svijetliti pa će 5 sekundi svijetliti. A druga će žarulja takav period ponavljati svakih 7 sekundi.

Vremenski interval koji trebamo promatrati kao zajednički period za obje žarulje traje $7 \cdot 11 = 77$ sekundi.



U prva dva pravokutnika žutom su bojom predstavljene sekunde u kojima žarulje svijetle, a sivom sekunde u kojima žarulje ne svijetle. Prvi pravokutnik prikazuje stanje prve žarulje, a drugi druge. U trećem pravokutniku označene su sekunde kad obje žarulje svijetle istovremeno.

U promatranom periodu od 77 sekundi obje žarulje istovremeno svijetle 1 + 3 + 1 + 3 + 2 + 2 + 3 = 15 sekundi. Kako je $2021 = 26 \cdot 77 + 19$, takvih će perioda biti 26, a zatim preostaje još 19 sekundi. U tih 19 sekundi žarulje će istovremeno svijetliti 2 sekunde.

Obje žarulje istovremeno svijetle ukupno $26 \cdot 15 + 2 = 392$ sekunde.