Hrvatsko matematičko društvo

Hrvatska matematička olimpijada za kadete

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

prvo kolo – subota, 12. lipnja 2021.

Rješenja zadataka za 5. razred

1. Čarobni napitak

Petar i Tomo igraju igru u kojoj se koriste novčanice od 3 krune i 5 kruna. Ako stanu na zlatno polje mogu kupiti čarobni napitak. Petar je platio napitak novčanicama od 3 krune, a Tomo novčanicama od 5 kruna. Kolika je cijena čarobnog napitka ako su zajedno dali više od 60, a manje od 70 novčanica?

Rezultat: **120**

Rješenje: Kako je Petar platio napitak novčanicama od 3 krune, a Tomo novčanicama od 5 kruna, znači da je cijena djeljiva s 3 i s 5, znači s 15. Za svakih 15 kruna Petar je dao 5 svojih novčanica, a Tomo 3 svoje. To znači da je ukupan broj novčanica djeljiv s 8. Kako su dali više od 60, a manje od 70 novčanica, napitak su platili sa 64 novčanice.

Kako je Petar platio novčanicama od 3 krune, a Tomo novčanicama od 5 kruna, očito je Petar dao više novčanica od Tome pa gledamo slučajeve kada je broj novčanica koje je dao Petar veći od 32. Ako je Petar dao 35 novčanica, Tomo je dao 29, što je nemoguće jer $35 \cdot 3 \neq 29 \cdot 5$.

Ako je Petar dao 40 novčanica, Tomo je dao 24, što je rješenje jer $40 \cdot 3 = 24 \cdot 5 = 120$.

Daljnjim povećavanjem (ili smanjenjem) broja Petrovih novčanica ne možemo dobiti drugo rješenje, što znači da je cijena čarobnog napitka 120 kruna.

2. Brajica

Brajica je pismo kojim se koriste slijepe i slabovidne osobe, a sastoji se od izbočenih točkica otisnutih na posebnom papiru. Svi znakovi se prikazuju kao kombinacije istaknutih točaka raspoređenih u dva stupca po tri točke. Ovdje su prikazani znakovi koji se koriste za pisanje brojeva (istaknute točke su crne boje):

„broj“	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
○● ○● ●●	●○ ○○ ○○	●○ ●○ ○○	●● ○○ ○○	●● ○● ○○	●○ ○● ○○	●● ●○ ○○	●● ●● ○○	●○ ●● ○○	○● ●○ ○○	○● ●● ○○

Brojevi se pišu tako da se na početku stavi oznaka „broj“, a potom znakovi za pojedine znamenke.

Npr. 11 = ○● ●○ ●○ / ○● ○○ ○○ / ●● ○○ ○○   478 = ○● ●● ●● ●○ / ○● ○● ●● ●● / ●● ○○ ○○ ○○

Koji je najveći troznamenkasti broj koji se brajicom zapisuje s ukupno 13 istaknutih točaka?

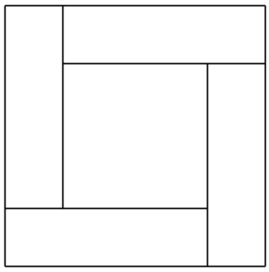
Rezultat: **987**

Rješenje: Uočimo da se s jednom točkom može se zapisati samo znamenka 1, s dvije točke znamenke iz skupa {2, 3, 5, 9}, s tri točke znamenke iz skupa {4, 6, 8, 0}, a sa četiri točke znamenka 7. Kako je iskorišteno 13 točaka, a to uključuje i 4 točke za oznaku „broj“, za tri znamenke tog broja korišteno je 13 – 4 = 9 točaka. S obzirom da se znamenke pišu s jednom, dvije, tri ili četiri točke, 9 točaka se može dobiti na tri načina:

jedna znamenka s jednom, a dvije s četiri točke, jer je 1 + 4 + 4 = 9,
jedna znamenka s dvije, jedna s tri, a jedna s četiri točke, jer je 2 + 3 + 4 = 9,
sve tri znamenke s tri točke, jer je 3 + 3 + 3 = 9.

U prvom slučaju najveći mogući broj je 771, u drugom 987, a u trećem 888. Stoga je najveći mogući broj zapisan s točno 13 istaknutih točaka 987.

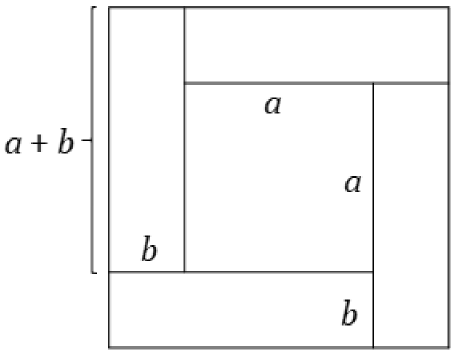
3. Podijeljeni kvadrat



Veći kvadrat podijeljen je na četiri sukladna pravokutnika i jedan manji kvadrat kao na slici. Ako je opseg većeg kvadrata za 40 cm veći od opsega manjeg kvadrata, a opseg manjeg kvadrata za 8 cm veći od opsega svakog od četiriju sukladnih pravokutnika, kolika je razlika površina većeg i manjeg kvadrata?

Rezultat: **380**

Rješenje. Neka je a duljina stranice manjeg kvadrata i b duljina kraće stranice pravokutnika.



Tada dulja stranica pravokutnika ima duljinu $a + b$, a veći kvadrat stranice duljine $a + 2b$.

Opseg je većeg kvadrata $o_V = 4(a + 2b) = 4a + 8b$, a opseg manjeg kvadrata $o_M = 4a$.

Opseg je svakog pravokutnika $o = 2(a + b + b) = 2(a + 2b) = 2a + 4b$.

Razlika opsega većeg i manjeg kvadrata je 40 cm pa slijedi

$4a + 8b - 4a = 40$ odnosno $8b = 40$.

Duljina kraće stranice pravokutnika je $b = 5$ cm.

Razlika opsega manjeg kvadrata i pravokutnika je 8 cm pa slijedi

$4a - 2a - 4b = 8$ odnosno $2a - 20 = 8$, pa je $a = 14$.

Duljina stranice manjeg kvadrata je 14 cm, a većeg 24 cm.

Površina većeg kvadrata je $P_V = 24^2$ cm² = 576 cm², površina manjeg kvadrata

$P_M = 14^2$ cm² = 196 cm², a razlika njihovih površina 380 cm².

4. Tijela pod vodom

Marta se igra modelima geometrijskih tijela potapajući ih u vodu u posudi oblika kvadra. Ako u posudu stavi kocku i valjak, razina vode podigne se 5 cm više nego ako stavi samo piramidu. Ako u posudu stavi kocku i piramidu, razina vode se podigne čak 10 cm više nego ako stavi samo valjak. Kada su u posudi piramida i valjak, razina vode je ista kao kada je u njoj samo kocka. Za koliko se milimetara podigne razina vode ako Marta u posudu stavi kocku, valjak i piramidu?

Rezultat: **150**

Rješenje. Neka je k povećanje razine vode zbog stavljanja kocke u posudu (u cm), te slično v za valjak i p za piramidu. Prema uvjetima zadatka tada vrijedi:

$$k + v = p + 5$$

$$k + p = v + 10$$

$$p + v = k$$

Zbrojimo li sve tri jednadžbe, dobit ćemo

$$k + v + k + p + p + v = p + 15 + v + k$$

Oduzmemo li s obje strane jednake pribrojnike p, v i k dobit ćemo

$$k + v + p = 15$$

Dakle, ako Marta u posudu stavi kocku, valjak i piramidu, razina će se vode podići za

15 cm odnosno 150 mm.

Napomena: Rješavanjem sustava može se dobiti $k = 7.5$, $v = 2.5$ i $p = 5$.

5. Zamišljeni broj

Grga je zamislio troznamenkasti broj, a njegovi ga prijatelji pokušavaju pogoditi.
Ovo su njihovi pokušaji:

Boris: 218 Robert: 571 Marko: 732 Darko: 853

Grga im je rekao: „Jedan od vas je pogodio sve znamenke, a ostali samo po jednu, no nijedna od pogođenih znamenaka nije na pravom mjestu.“ Na to mu prijatelji kažu: „Na temelju ovih informacija ne možemo odrediti koji si broj zamislio jer postoji više takvih brojeva.“ Odredi zbroj svih tih mogućih brojeva.

Rezultat: **712**

Rješenje.

Pretpostavimo da je Boris pogodio sve znamenke.
Tada znamenka 2 nije ni na mjestu stotica, ni na mjestu jedinica (jer Marko nije pogodio točno mjesto nijedne znamenke) pa mora biti na mjestu desetica.
Znamenka 1 nije ni na mjestu desetica, ni na mjestu jedinica (jer je Robert pretpostavio da je 1 na mjestu jedinica) pa mora biti na mjestu stotica.
Znamenka 8 nije ni na mjestu jedinica, ni na mjestu stotica (Darkova pretpostavka) pa mora biti na mjestu desetica.
No, na mjestu desetica ne mogu biti dvije znamenke (2 i 8) pa je ovo nemoguće.
Boris nije pogodio sve tri znamenke.

Pretpostavimo da je Robert pogodio sve znamenke. Tada na sličan način zaključujemo da:
5 nije ni na mjestu stotica, ni na mjestu desetica pa mora biti na mjestu jedinica,
7 nije ni na mjestu desetica, ni na mjestu stotica pa mora biti na mjestu jedinica,
a to je nemoguće.

Pretpostavimo da je Marko pogodio sve znamenke. Tada zaključujemo:
7 nije ni na mjestu stotica, ni na mjestu desetica pa mora biti na mjestu jedinica,
3 nije ni na mjestu desetica, ni na mjestu jedinica pa mora biti na mjestu stotica,
2 nije ni na mjestu jedinica, ni na mjestu stotica pa mora biti na mjestu desetica.
To je moguće samo ako je zamišljeni broj jednak 327.

Pretpostavimo da je Darko pogodio sve znamenke. Tada:
8 nije ni na mjestu stotica, ni na mjestu jedinica pa mora biti na mjestu desetica,
5 nije ni na mjestu desetica, ni na mjestu stotica pa mora biti na mjestu jedinica,
3 nije ni na mjestu jedinica, ni na mjestu desetica pa mora biti na mjestu stotica.
To je moguće samo ako je zamišljeni broj jednak 385.

Zbroj svih mogućih brojeva iznosi $327 + 385 = 712$.

6. Ljepuškasti brojevi

Prirodni broj nazivamo *ljepuškastim* ako mu je znamenka jedinica jednaka umnošku svih preostalih znamenaka. Koliko ima četveroznamenkastih ljepuškastih brojeva?

Rezultat: **215**

Rješenje. Neka je traženi četveroznamenkasti broj $\overline{abcd}$, $a \neq 0$.
Za $d = 0$ imamo $9 \cdot 19 = 171$ mogućnost (za a postoji 9 mogućnosti, a za b i c ukupno 19 mogućnosti s barem jednom znamenkom 0).
Za $d = 1$ imamo jednu mogućnost, broj 1111.
Za $d = 2$ imamo 3 mogućnosti, jer su znamenke a, b i c jednake 1, 1 i 2, u nekom poretku.
Za $d = 3$ imamo 3 mogućnosti (znamenke su 1,1,3).
Za $d = 4$ imamo $3 + 3 = 6$ mogućnosti (znamenke 1,1,4 ili 1,2,2).
Za $d = 5$ imamo 3 mogućnosti (znamenke 1,1,5).
Za $d = 6$ imamo $3 + 6 = 9$ mogućnosti (znamenke 1,1,6 ili 1,2,3).
Za $d = 7$ imamo 3 mogućnosti (znamenke 1,1,7).
Za $d = 8$ imamo $3 + 6 + 1 = 10$ mogućnosti (znamenke 1,1,8 ili 1,2,4 ili 2,2,2).
Za $d = 9$ imamo $3 + 3 = 6$ mogućnosti (znamenke 1,1,9 ili 1,3,3).
To je ukupno $171 + 1 + 3 + 3 + 6 + 3 + 9 + 3 + 10 + 6 = \mathbf{215}$ mogućnosti.

7. Žarulje

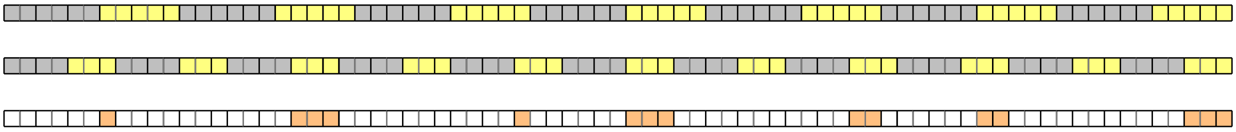
U sobi su dvije žarulje. Kada se uključi prekidač prve žarulje, ona zasvijetli tek nakon 6 s i svijetli 5 s, zatim opet ne svijetli 6 s i svijetli 5 s, i to se stalno ponavlja. Kada se uključi prekidač druge žarulje, ona zasvijetli nakon 4 s i svijetli 3 s, opet ne svijetli 4 s i svijetli 3 s, i to se stalno ponavlja. Linda je istovremeno uključila oba prekidača i nakon 2021 sekunde ih isključila. Koliko su sekundi za to vrijeme obje žarulje istovremeno svijetlile?

Rezultat: **392**

Rješenje.

Svakih 11 sekundi prva će žarulja ponavljati period u kojem 6 sekundi neće svijetliti pa će 5 sekundi svijetliti. Druga će žarulja takav period ponavljati svakih 7 sekundi.

Vremenski interval koji trebamo promatrati kao zajednički period za obje žarulje traje $7 \cdot 11 = 77$ sekundi.



U prva dva pravokutnika žutom su bojom predstavljene sekunde u kojima žarulje svijetle, a sivom sekunde u kojima žarulje ne svijetle. Prvi pravokutnik prikazuje stanje prve žarulje, a drugi druge. U trećem pravokutniku označene su sekunde kad obje žarulje svijetle istovremeno.

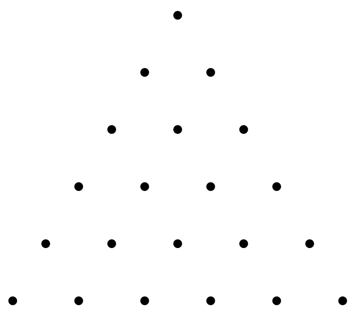
U promatranom periodu od 77 sekundi obje žarulje istovremeno svijetle $1 + 3 + 1 + 3 + 2 + 2 + 3 = 15$ sekundi. Kako je $2021 = 26 \cdot 77 + 19$, takvih će perioda biti 26, a zatim preostaje još 19 sekundi. U tih 19 sekundi žarulje će istovremeno svijetliti 2 sekunde.

Obje žarulje istovremeno svijetle ukupno $26 \cdot 15 + 2 = 392$ sekunde.

8. Dužine

Dvadeset i jedna točka raspoređena je kao na slici.

Koliko ima dužina koje spajaju neke dvije od tih točaka, a ne sadrže niti jednu od preostalih?



Rezultat: **141**

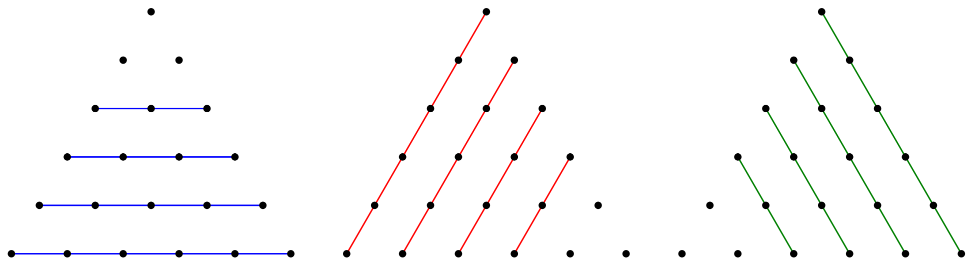
Rješenje.

Ukupan broj dužina određen dvadeset i jednom točkom je $\frac{21 \cdot 20}{2} = 210$.

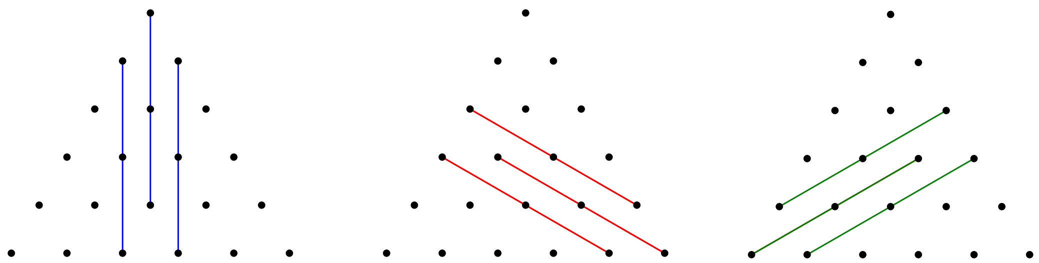
Od 210 oduzimamo višak dužina nastao zbog točaka koje pripadaju istom pravcu.

Na svakoj stranici trokuta je 6 točaka, među njima svake dvije točke između kojih je barem još jedna istaknuta točka određuju dužinu koju ne želimo brojiti. Takvih dužina je 10 (jer je $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ parova točaka odnosno 15 dužina, a samo je 5 dužina koje ne sadrže neku drugu od istaknutih točaka).

Stranici paralelna dužina koja sadrži 5 istaknutih točaka ima $10 - 4 = 6$ dužina koje ne želimo brojiti, stranici paralelna dužina koja sadrži 4 istaknute točke ima ih $6 - 3 = 3$, a stranici paralelna dužina koja sadrži 3 istaknute točke ima jednu takvu dužinu. Dakle, na svakoj stranici trokuta i njoj paralelnim dužinama ima $10 + 6 + 3 + 1 = 20$ dužina koje ne želimo brojiti, a ukupno ih je $3 \cdot 20 = 60$.

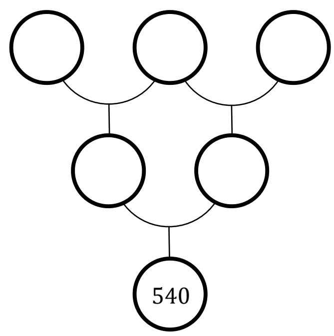


Osim toga, postoje i po tri točke na dužinama koje nisu paralelne nekoj stranici trokuta, a koje ne želimo brojiti, ukupno ih je $3 \cdot 3 = 9$.



Konačno, traženi broj je $210 - (60 + 9) = 210 - 69 = 141$.

9. Najveći zbroj



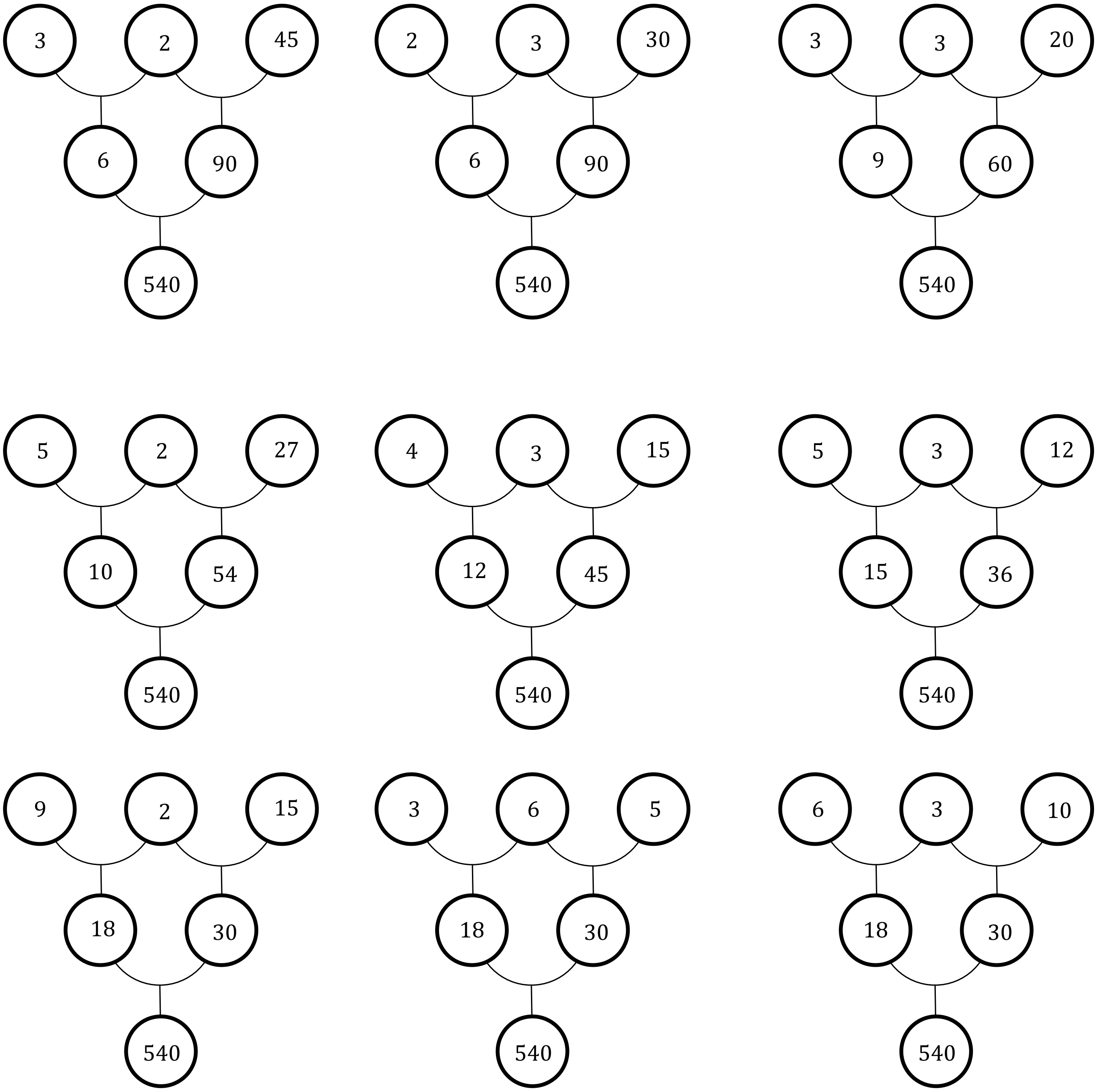
U jednom polju na slici upisan je broj 540, a ostala polja treba popuniti prirodnim brojevima većim od 1 tako da umnožak brojeva u dvama susjednim poljima bude jednak broju u polju ispod njih. Koliki je najveći mogući zbroj tih šest brojeva?

Rezultat: **686**

Rješenje. Broj 540 možemo prikazati kao umnožak dvaju faktora većih od 1 na više načina, no ako rastavimo npr. kao $540 = 2 \cdot 270$, te upišemo te brojeve u srednjem retku, nećemo moći popuniti gornji redak jer ne smijemo koristiti faktor 1. Ovo zapravo znači da nijedan od brojeva u srednjem retku ne smije biti prost broj, pa broj 540 moramo prikazati kao umnožak dvaju složenih brojeva. Također, ti brojevi ne smiju biti relativno prosti, jer bi u tom slučaju u srednje polje gornjeg retka trebali upisati broj 1. Zato razmatramo ove mogućnosti:

$$540 = 6 \cdot 90 = 9 \cdot 60 = 10 \cdot 54 = 12 \cdot 45 = 15 \cdot 36 = 18 \cdot 30.$$

U srednjem gornjem polju može biti bilo koji zajednički faktor tih brojeva (veći od 1), pa imamo sljedeće mogućnosti:

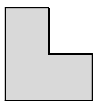


Najveći mogući zbroj svih 6 brojeva je 686 koji se postiže u prvom slučaju (45 + 2 + 3 + 90 + 6 + 540).

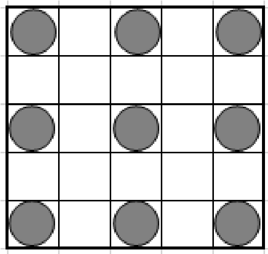
15	11	37	11	15
11	21	40	21	11
37	40	26	40	37
11	21	40	21	11
15	11	37	11	15

Rezultat: **234**

10. Triomino

Osam triomino pločica oblika  postavlja se na ploču dimenzija 5×5 tako da svaka prekriva tri polja, a međusobno se ne preklapaju. Pritom jedno polje ostaje neprekriveno. Koliki je zbroj brojeva na svim poljima koja mogu ostati neprekrivena?

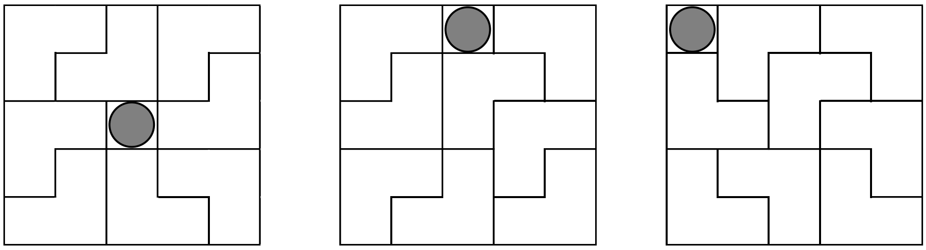
Rješenje. Osam triomino pločica danog oblika prekriva 24 polja, a točno jedno ostaje nepokriveno. Pokazat ćemo da nepokrivena mogu ostati samo polja označena na slici.



Pojedina triomino pločica ne može pokriti dva od njih, pa 8 triomino pločica ne može pokriti svih 9 polja. To znači da će uvijek jedno od tih polja ostati nepokriveno.

To ujedno znači da će pri svakom rasporedu osam triomina na ploči, sva ostala polja biti prekrivena.

Još treba provjeriti može li svako od označenih devet polja ostati nepokriveno.



Ploče možemo i rotirati, pa ovi primjeri pokazuju da je triomine moguće rasporediti tako da nepokriveno ostane središnje polje (u koje je upisan broj 26), bilo koje od četiri srednja polja uz rub ploče (u kojima je broj 37), kao i bilo koje od četiri polja u uglu (u kojima je broj 15).

Dakle, nepokriveno može ostati svako od 9 polja označenih na prvoj slici (i samo ta polja).

Zbroj brojeva na njima je $26 + 4 \cdot 37 + 4 \cdot 15 = 234$.