Hrvatsko matematičko društvo

Hrvatska matematička olimpijada za kadete

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

prvo kolo – subota, 12. lipnja 2021.

Rješenja zadataka za 6. razred

1. Točke u trokutu

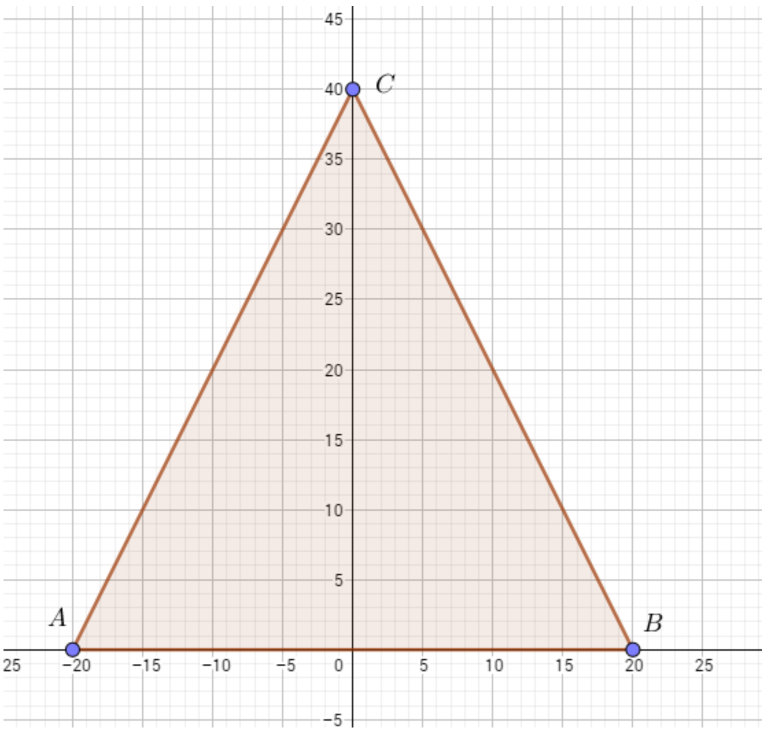
U pravokutnom koordinatnom sustavu zadan je trokut ABC čiji su vrhovi $A(-20{,}0)$, $B(20{,}0)$ i $C(0{,}40)$. Koliko ima točaka čije su obje koordinate cijeli brojevi, a koje leže unutar ili na rubu tog trokuta?

Rezultat: 841

Rješenje.

Ako koordinate traženih točaka označimo s (x, y), onda je najmanji mogući cjelobrojni y jednak 0, a najveći 40.

Za $y = 0$ u trokutu ΔABC leži 41 točka s cjelobrojnim koordinatama.
Za $y = 1$ ima ih 39.
Za $y = 2$ ih ima također 39.
Za $y = 3$ ih je 37.
Za $y = 4$ ih je 37.
…
Za $y = 37$ ih je 3
Za $y = 38$ ih je 3.
Za $y = 39$ ih je 1.
Za $y = 40$ ih je 1.



Dakle, ukupan broj točaka sa zadanim svojstvom je:

$$41 + 2 \cdot (39 + 37 + \cdots + 3 + 1)$$
$$= 41 + 2 \cdot \frac{20 \cdot 40}{2} = 41 + 800$$
$$= 841.$$

2. Lokot

Mislav je zaboravio četveroznamenkastu šifru lokota bicikla, no sjeća se nekih detalja. Broj je djeljiv s 15, no nije djeljiv sa 6, a znamenke se smanjuju od znamenke tisućica prema znamenki jedinica. Odredi šifru tog lokota te kao rezultat upiši njegove prve tri znamenke (bez znamenke jedinica).

Rezultat: 976

Rješenje.

Kako je četveroznamenkasti broj djeljiv s 15, mora biti djeljiv s 5. No, kako broj nije djeljiv sa 6, nije djeljiv ni s 2, pa je znamenka jedinica jednaka 5.

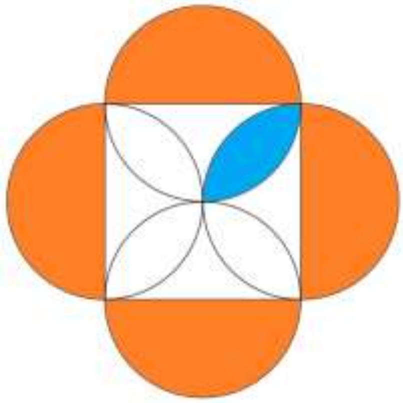
Znamenke se smanjuju od znamenke tisućica prema znamenki jedinica. Dakle, preostale tri znamenke su veće od 5, pa ih biramo iz skupa $\{6, 7, 8, 9\}$.

Moguće šifre su:
9875
9865
9765
8765

Broj je djeljiv s15, pa mora biti djeljiv i s 3. To znači da mu zbroj znamenaka mora biti djeljiv s 3.
9+8+7+5=29
9+8+6+5=28
9+7+6+5=27 (djeljiv s 3!)
8+7+6+5=26

Od moguća četiri broja jedino je 9765 djeljiv s 3, pa i s 15. Dakle, šifra lokota je broj 9765, a rezultat ovog zadatka 976.

3. Krugovi

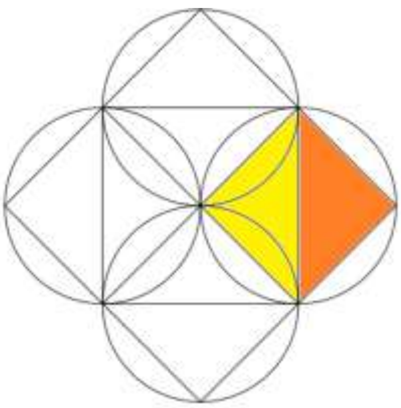


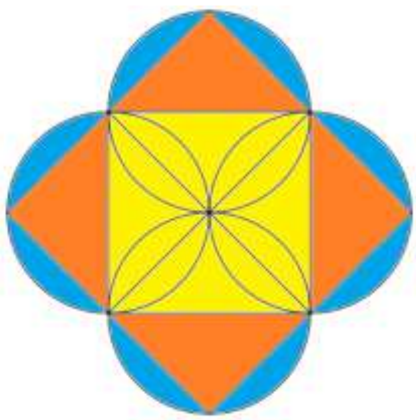
Površina plavo obojenog lika na slici iznosi 124 cm^2. Za koliko je kvadratnih centimetara površina prikazanog kvadrata manja od ukupne površine narančasto obojenih likova?

Rezultat: 496

Prvo rješenje.

Dijagonale dijele kvadrat na četiri sukladna jednakokračna trokuta. Zrcalimo li ta četiri trokuta s obzirom na stranice kvadrata, dobit ćemo još četiri sukladna trokuta upisana u polukrugove kao na slici. Površina žutog trokuta jednaka je površini narančastog trokuta na slici.





Zbroj površina narančastih trokuta jednaka je površini žutog kvadrata, pa je razlika površina koja se traži u zadatku jednaka zbroju površina plavih likova. S obzirom da je zbroj površina dvaju plavih likova na slici jednak površini plavo obojenog lika zadanoj u zadatku, što iznosi 124 cm^2, znači da je zbroj površina svih 8 plavo obojenih dijelova jednak $4 \cdot 124 = 496$ cm^2.

Drugo rješenje.

Unutar kvadrata su nacrtana četiri dijela kruga koji su jednake površine kao narančasti likovi. Ti dijelovi imaju zajedničke likove koji su iste površine kao plavi lik.

Dakle, ukupna površina narančastih likova je veća od površine kvadrata točno za četiri površine plavog lika, to jest za $4 \cdot 124 = 496$ cm^2.

4. Zamišljeni broj

Grga je zamislio troznamenkasti broj, a njegovi ga prijatelji pokušavaju pogoditi.
Ovo su njihovi pokušaji:

Boris: 218 Robert: 571 Marko: 732 Darko: 853

Grga im je rekao: „Jedan od vas je pogodio sve znamenke, a ostali samo po jednu, no nijedna od pogođenih znamenaka nije na pravom mjestu.“ Na to mu prijatelji kažu: „Na temelju ovih informacija ne možemo odrediti koji si broj zamislio jer postoji više takvih brojeva.“ Odredi zbroj svih tih mogućih brojeva.

Rezultat: 712

Rješenje.

Pretpostavimo da je Boris pogodio sve znamenke.
Tada znamenka 2 nije ni na mjestu stotica, ni na mjestu jedinica (jer Marko nije pogodio točno mjesto nijedne znamenke) pa mora biti na mjestu desetica**.**
Znamenka 1 nije ni na mjestu desetica, ni na mjestu jedinica (jer je Robert pretpostavio da je 1 na mjestu jedinica) pa mora biti na mjestu stotica.
Znamenka 8 nije ni na mjestu jedinica, ni na mjestu stotica (Darkova pretpostavka) pa mora biti na mjestu desetica. No, na mjestu desetica ne mogu biti dvije znamenke (2 i 8) pa je ovo nemoguće.
Boris nije pogodio sve tri znamenke.

Pretpostavimo da je Robert pogodio sve znamenke. Tada na sličan način zaključujemo da:
5 nije ni na mjestu stotica, ni na mjestu desetica pa mora biti na mjestu jedinica,
7 nije ni na mjestu desetica, ni na mjestu stotica pa mora biti na mjestu jedinica, a to je nemoguće.

Pretpostavimo da je Marko pogodio sve znamenke. Tada zaključujemo:
7 nije ni na mjestu stotica, ni na mjestu desetica pa mora biti na mjestu jedinica,
3 nije ni na mjestu desetica, ni na mjestu jedinica pa mora biti na mjestu stotica,
2 nije ni na mjestu jedinica, ni na mjestu stotica pa mora biti na mjestu desetica.
To je moguće samo ako je zamišljeni broj jednak 327.

Pretpostavimo da je Darko pogodio sve znamenke. Tada:
8 nije ni na mjestu stotica, ni na mjestu jedinica pa mora biti na mjestu desetica,
5 nije ni na mjestu desetica, ni na mjestu stotica pa mora biti na mjestu jedinica,
3 nije ni na mjestu jedinica, ni na mjestu desetica pa mora biti na mjestu stotica.
To je moguće samo ako je zamišljeni broj jednak 385.

Zbroj svih mogućih brojeva iznosi $327 + 385 = 712$.

5. Soba

Ana oboji sobu za 15 sati, Barbara za 10 sati, a Cvijeta dvostruko brže od Ane. Ana počne bojiti i boji sama sat i pol, onda joj se pridruži Barbara i boje zajedno dok pola sobe ne bude obojeno. Nakon toga im se pridruži i Cvijeta te sve tri boje dok cijela soba ne bude obojena. Koliko je ukupno minuta trajalo bojenje sobe?

Rezultat: 334

Rješenje.

Ana za 60 minuta oboji $\frac{1}{15}$ sobe, a za 90 minuta oboji $1.5 \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{10}$ sobe.

Ana i Barbara zajedno moraju obojiti $\frac{4}{10}$ sobe. One za 60 minuta zajedno oboje $\frac{1}{15} + \frac{1}{10} = \frac{1}{6}$ sobe, pa će $\frac{4}{10}$ sobe obojiti za $\frac{4}{10} : \frac{1}{6} = \frac{12}{5}$ sati, odnosno 144 minute.

Ana, Barbara i Cvijeta zajedno moraju obojiti pola sobe. One za 60 minuta zajedno oboje $\frac{1}{15} + \frac{1}{10} + \frac{2}{15} = \frac{3}{10}$ sobe, pa će $\frac{1}{2}$ sobe obojati za $\frac{1}{2} : \frac{3}{10} = \frac{5}{3}$ sati, odnosno 100 minuta.

Cijela soba je obojena za $90 + 144 + 100 = 334$ minute.

6. Žarulje

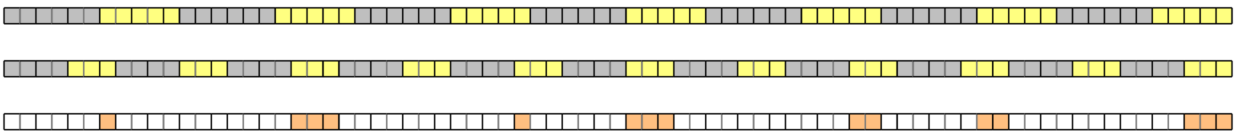
U sobi su dvije žarulje. Kada se uključi prekidač prve žarulje, ona zasvijetli tek nakon 6 s i svijetli 5 s, zatim opet ne svijetli 6 s i svijetli 5 s, i to se stalno ponavlja. Kada se uključi prekidač druge žarulje, ona zasvijetli nakon 4 s i svijetli 3 s, opet ne svijetli 4 s i svijetli 3 s, i to se stalno ponavlja. Linda je istovremeno uključila oba prekidača i nakon 2021 sekunde ih isključila. Koliko su sekundi za to vrijeme obje žarulje istovremeno svijetlile?

Rezultat: 392

Rješenje.

Svakih 11 sekundi prva će žarulja ponavljati period u kojem 6 sekundi neće svijetliti pa će 5 sekundi svijetliti. Druga će žarulja takav period ponavljati svakih 7 sekundi.

Kako je $V(11,7) = 77$, vremenski interval koji trebamo promatrati traje 77 sekundi.



U prva dva pravokutnika žutom su bojom predstavljene sekunde u kojima žarulje svijetle, a sivom sekunde u kojima žarulje ne svijetle. Prvi pravokutnik prikazuje stanje prve žarulje, a drugi druge. U trećem pravokutniku označene su sekunde kad obje žarulje svijetle istovremeno.

U promatranom periodu od 77 sekundi obje žarulje istovremeno svijetle 1 + 3 + 1 + 3 + 2 + 2 + 3 = 15 sekundi. Kako je $2021 = 26 \cdot 77 + 19$, takvih će perioda biti 26, a zatim preostaje još 19 sekundi. U tih 19 sekundi žarulje će istovremeno svijetliti 2 sekunde.

Obje žarulje istovremeno svijetle ukupno $26 \cdot 15 + 2 = 392$ sekunde.

7. Potencije

Neka je a znamenka jedinica broja 7^{456}, b znamenka jedinica broja 8^{567} i neka je c znamenka jedinica broja 9^{678}. Odredi broj $\overline{abc}$.

Rezultat: 121

Rješenje. Odredimo posljednju znamenku broja 7^{456}.

$7^1 = 7$
$7^2 = 7 \cdot 7 = 49$
$7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$
$7^4 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2401$

7^4 završava znamenkom 1, pa će znamenkom 1 završavati i $7^8, 7^{12}, 7^{16}, \dots$ jer je $1 \cdot 1 = 1$.
Kako je $456 = 114 \cdot 4$, i broj 7^{456} završava znamenkom 1. Dakle, $a = 1$.

Odredimo posljednju znamenku broja 8^{567}.

$8^1 = 8$
$8^2 = 8 \cdot 8 = 64$
$8^3 = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$
$8^4 = 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 4096$

8^4 završava znamenkom 6, pa će znamenkom 6 završavati i $8^8, 8^{12}, 8^{16}, \dots$ jer je $6 \cdot 6 = 36$.
Kako je $567 = 141 \cdot 4 + 3$, i kako broj $8^3 = 512$ završava znamenkom 2 zaključujemo da broj 8^{567} završava istom znamenkom kao i broj $6 \cdot 2 = 12$, dakle $b = 2$.

Konačno, odredimo posljednju znamenku broja 9^{678}.

$9^1 = 9$
$9^2 = 9 \cdot 9 = 81$

9^2 završava znamenkom 1, pa će znamenkom 1 završavati i $9^4, 9^6, 9^8, \dots$ jer je $1 \cdot 1 = 1$.
Kako je 678 paran broj, i 9^{678} završava znamenkom 1, dakle $c = 1$.

Traženi broj $\overline{abc}$ je 121.

8. Devetke

Zbrojimo li 199 međusobno različitih prirodnih brojeva čije su sve znamenke 9, a najveći od njih ima 199 znamenaka, dobivamo broj n. Odredi zbroj znamenaka broja n.

Rezultat: 207

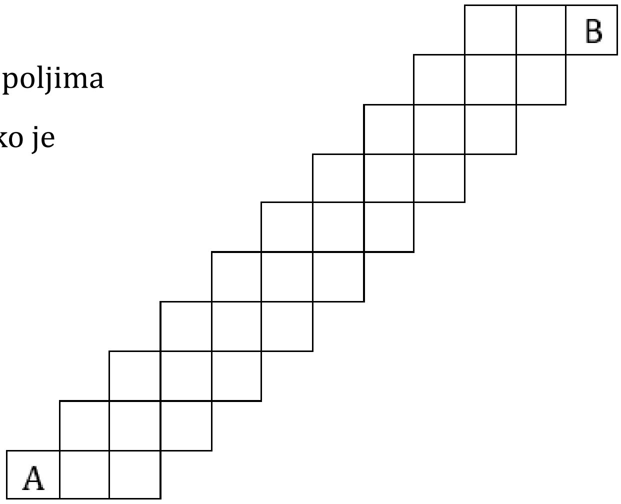
Rješenje. Uočimo da vrijedi

$$\begin{aligned} n &= 9 + 99 + 999 + \dots + 999\dots99 \\ &= (10-1) + (100-1) + (1000-1) + \cdots + (10000\dots0 - 1) \\ &= \left(10 + 100 + 1000 + \cdots + \underbrace{10000\dots0}_{200 \text{ znamenki}}\right) - 199 \\ &= \underbrace{1111\dots11110}_{200 \text{ znamenki}} - 199 = \underbrace{1111\dots10911}_{200 \text{ znamenki}} \end{aligned}$$

Zbroj znamenki broja n je $198 + 9 = 207$.

9. Žaba

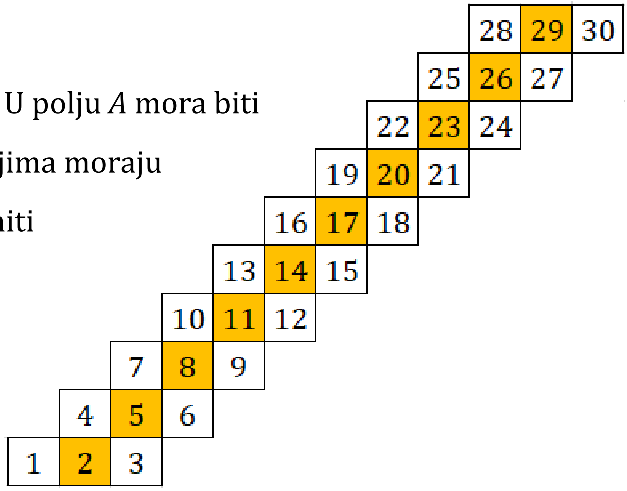
Žaba se skokovima udesno i prema gore kreće po poljima prikazanim na slici, od polja A do polja B. Na koliko je načina moguće u ta polja upisati brojeve od 1 do 30 (po jedan broj u svako polje) tako da žaba pri svakom skoku prelazi na polje s većim brojem?



Rezultat: 512

Rješenje.

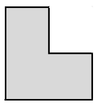
Desna slika prikazuje jedan mogući raspored brojeva. U polju A mora biti broj 1, a u polju B broj 30. Uočimo da i u obojenim poljima moraju biti upravo napisani brojevi. Jedino je moguće zamijeniti položaje po dva broja koji su po veličini između brojeva na obojenim poljima: brojeve 3 i 4, brojeve 6 i 7… te 27 i 28.



Takvih parova brojeva (odnosno polja) ima 9, pa postoji ukupno imamo ukupno $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^9 = 512$ načina za upisivanje brojeva u sva polja tako da bude ispunjen zadani uvjet.

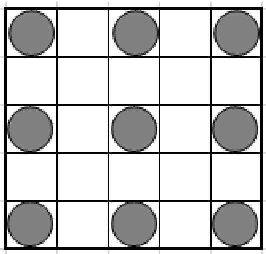
15	11	37	11	15
11	21	40	21	11
37	40	26	40	37
11	21	40	21	11
15	11	37	11	15

10. Triomino

Osam triomino pločica oblika  postavlja se na ploču dimenzija 5×5 tako da svaka prekriva tri polja, a međusobno se ne preklapaju. Pritom jedno polje ostaje neprekriveno. Koliki je zbroj brojeva na svim poljima ploče koja mogu ostati neprekrivena?

Rezultat: 234

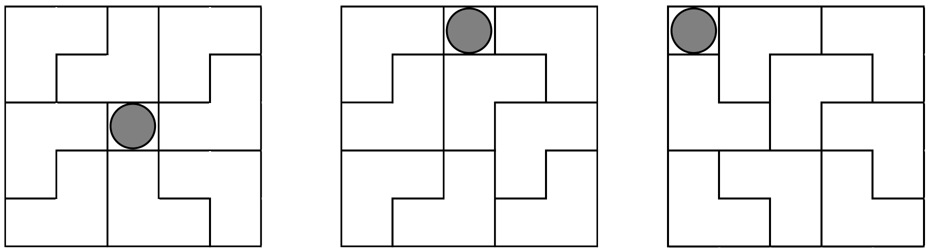
Rješenje. Osam triomino pločica danog oblika prekriva 24 polja, a točno jedno ostaje nepokriveno. Pokazat ćemo da nepokrivena mogu ostati samo polja označena na slici.



Pojedina triomino pločica ne može pokriti dva od njih, pa 8 triomino pločica ne može pokriti svih 9 polja. To znači da će uvijek jedno od tih polja ostati nepokriveno.

To ujedno znači da će pri svakom rasporedu osam triomina na ploči, sva ostala polja biti prekrivena.

Još treba provjeriti može li svako od označenih devet polja ostati nepokriveno.



Ploče možemo i rotirati, pa ovi primjeri pokazuju da je triomine moguće rasporediti tako da nepokriveno ostane središnje polje (u koje je upisan broj 26), bilo koje od četiri srednja polja uz rub ploče (u kojima je broj 37), kao i bilo koje od četiri polja u uglu (u kojima je broj 15).

Dakle, nepokriveno može ostati svako od 9 polja označenih na prvoj slici (i samo ta polja).

Zbroj brojeva na njima je $26 + 4 \cdot 37 + 4 \cdot 15 = 234$.