Hrvatsko matematičko društvo

Hrvatska matematička olimpijada za kadete

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

drugo kolo – srijeda, 23. lipnja 2021.

Rješenja zadataka za 4. razred

1. zadatak

Na jednoj polici u knjižari nalazi se šest matematičkih knjiga čije su cijene 62 kn, 63 kn, 66 kn, 68 kn, 69 kn i 71 kn. I Jure i Duje kupili su knjige s te police i pritom je Duje potrošio četiri puta više od Jure, a na polici je ostala samo jedna knjiga. Koje je knjige kupio svaki od njih i koliko je kuna za njih dao? Kolika je cijena neprodane knjige?

***Rješenje*:**

Sve knjige zajedno vrijede 399 kn.

Duje je potrošio četiri puta više od Jure, pa su zajedno platili pet puta više nego što je Jure platio svoje knjige. To znači da je ukupna cijena kupljenih knjiga višekratnik broja 5, što vrijedi samo ako je neprodana ostala knjiga od 69 kn.

Jure i Duje zajedno su platili 399 — 69 = 330 kn. Jure je platio 330 : 5 = 66 kn, a Duje 264 kn.

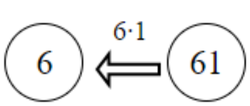
Duje je kupio knjige od 62, 63, 68 i 71 kn, a Jure od 66 kn.

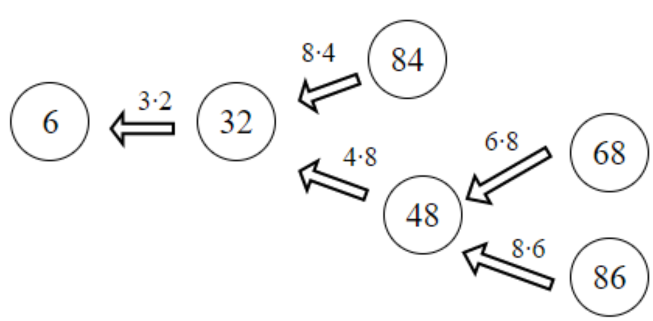
2. zadatak

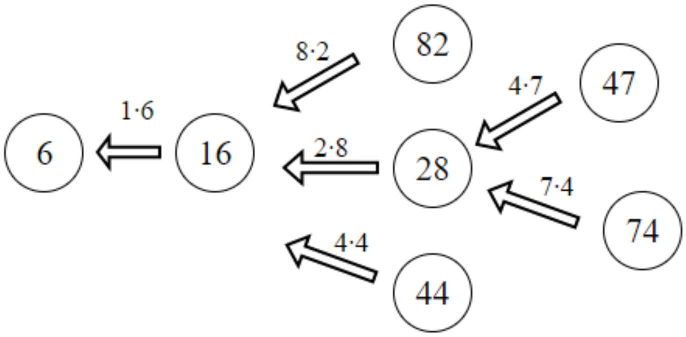
U lancu brojeva svaki je broj, nakon prvog, jednak umnošku znamenaka prethodnog broja, a lanac se nastavlja sve do jednoznamenkastog broja. Na primjer: $63 \rightarrow 18 \rightarrow 8$. U lancu mogu biti dva ili više brojeva. Odredi sve dvoznamenkaste brojeve koji mogu biti na početku lanca koji završava brojem 6.

***Rješenje*:**

Redom zapisujemo sve mogućnosti za prikaz broja 6 u obliku umnoška dvaju jednoznamenkastih brojeva, a onda to činimo za svaki dvoznamenkasti broj dok god možemo.







Ne postoje druge mogućnosti jer se brojevi navedeni na početku lanaca ne mogu prikazati kao umnošci dva jednoznamenkasta prirodna broja, što možemo utvrditi promatrajući tablicu množenja do 10 puta 10. Dakle, na početku lanca može biti jedan od sljedećih 13 brojeva: 16, 23, 28, 32, 44, 47, 48, 61, 68, 74, 82, 84 i 86.

3. zadatak

Ana, Dora, Branko, Cvitko i Fran zauzeli su u proljetnom polumaratonu prvih pet mjesta. Na pitanje koje je mjesto zauzeo koji trkač, petoro gledatelja dalo je ove odgovore:

1) Cvitko je stigao drugi, a Branko treći.
2) Fran je stigao treći, a Dora peta.
3) Ana je stigla četvrta, a Cvitko drugi.
4) Dora je stigla prva, a Fran drugi.
5) Branko je stigao prvi, a Ana četvrta.

U svakom odgovoru jedan je dio točan, a drugi netočan. Odredi poredak trkača prve petorke u proljetnom polumaratonu.

Prvo rješenje:

Razmotrimo sve mogućnosti za Anu:

- Ako je Ana stigla prva, tada bi prema 5. tvrdnji Branko stigao prvi, što je nemoguće jer ne mogu oboje biti prvi.
- Ako je Ana stigla druga, tada iz 1. tvrdnje zaključujemo da je Branko treći. Iz 2. tvrdnje tada zaključujemo da je Dora peta jer Fran ne može biti treći kad je Branko treći. Prema 4. tvrdnji Fran je drugi. Prema tome u 5. tvrdnji nijedan dio ne može biti točan, pa zaključujemo da Ana nije druga.
- Ako je Ana stigla treća, tada iz 1. tvrdnje zaključujemo da je Cvitko drugi. Prema 2. tvrdnji Dora je peta. Prema 3. tvrdnji Cvitko je drugi, što se podudara s prethodnim zaključkom. No, u 4. tvrdnji nijedan dio ne može biti točan, što znači da je nemoguće da je Ana treća.
- Ako je Ana stigla četvrta, tada prema 3. tvrdnji Cvitko nije drugi. Prema 1. tvrdnji zaključujemo da je Branko treći. Iz 2. tvrdnje slijedi da je Dora peta. Prema 4. tvrdnji Fran je drugi. Prema tome, Cvitko je prvi. Peta tvrdnja je u skladu sa svim zaključcima.
- Promotrimo još je li moguće rješenje u kojem je Ana peta. Tada je prema 2. tvrdnji Fran treći. Prema 3. tvrdnji Cvitko je drugi. Prema 4. tvrdnji Dora je prva. Tada u 5. tvrdnji nijedan dio ne može biti točan, što znači da je nemoguće da je Ana peta.

Jedino moguće rješenje je da je Cvitko prvi, Fran drugi, Branko treći, Ana četvrta i Dora peta.

Drugo rješenje:

Krenimo od pete tvrdnje jer se ona sastoji od dva dijela koja se ponavljaju i u drugim tvrdnjama. Prema uvjetima zadatka, jedan dio je točan, a drugi netočan. Dakle, ili je Branko stigao prvi ili je Ana stigla četvrta.

Ako je Branko stigao prvi, tada je prema prvoj tvrdnji Cvitko stigao drugi. No, prema četvrtoj tvrdnji Fran bi trebao biti drugi, što znači da ovaj slučaj nije moguće. Dakle, Ana je stigla četvrta, a Branko nije stigao prvi.

To možemo upisati u tablicu, pri čemu možemo i označiti da Ana nije zauzela nijedno mjesto osim četvrtog, a na četvrtom mjestu nije završio nitko osim Ane.

	1. mjesto	2. mjesto	3. mjesto	4. mjesto	5. mjesto
Ana	-	-	-	+	-
Dora				-	
Branko	-			-	
Cvitko				-	
Fran				-	

Prema trećoj tvrdnji Cvitko nije stigao drugi. Ako Cvitko nije stigao drugi, onda je prema prvoj tvrdnji Branko stigao treći. Označavamo da Branko nije zauzeo nijedno mjesto osim trećeg i treće mjesto nije zauzeo nitko osim Branka.

	1. mjesto	2. mjesto	3. mjesto	4. mjesto	5. mjesto
Ana	-	-	-	+	-
Dora			-	-	
Branko	-	-	+	-	-
Cvitko		-	-	-	
Fran			-	-	

Budući da Fran nije stigao treći, prema drugoj tvrdnji zaključujemo da je Dora stigla peta.

	1. mjesto	2. mjesto	3. mjesto	4. mjesto	5. mjesto
Ana	-	-	-	+	-
Dora	-	-	-	-	+
Branko	-	-	+	-	-
Cvitko		-	-	-	-
Fran			-	-	-

Sada preostaje samo mogućnost da je Cvitko stigao prvi, a Fran drugi, što je u skladu s četvrtom tvrdnjom.

	1. mjesto	2. mjesto	3. mjesto	4. mjesto	5. mjesto
Ana	-	-	-	+	-
Dora	-	-	-	-	+
Branko	-	-	+	-	-
Cvitko	+	-	-	-	-
Fran	-	+	-	-	-

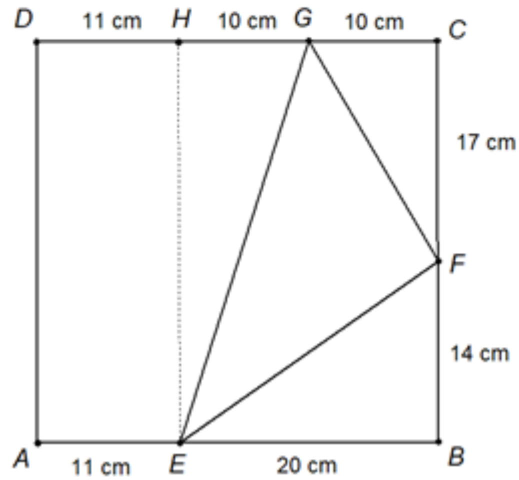
Pokazali smo da je moguć samo poredak: Cvitko, Fran, Branko, Ana, Dora.

4. zadatak

Neka je $ABCD$ kvadrat čije su stranice duljina 31 cm. Na stranici $\overline{AB}$ odabrana je točka E takva da je $|AE| =$ 11 cm, na stranici $\overline{BC}$ točka F takva da je $|BF| =$ 14 cm, a na stranici $\overline{CD}$ točka G takva da je $|CG| =$ 10 cm. Odredi površinu trokuta EFG.

Rješenje:

Površinu trokuta EFG dobijemo kada od površine pravokutnika ABCD oduzmemo površinu pravokutnika AEHD i površine triju pravokutnih trokuta EGH, EBF i FCG:



$$P_{EFG} = P_{ABCD} - (P_{AEHD} + P_{EGH} + P_{GFC} + P_{EBF}).$$

Budući da je površina pravokutnog trokuta jednaka polovini površine pravokutnika kojemu su stranice odgovarajuće stranice trokuta koje leže uz pravi kut, slijedi:

$P_{EFG} = 31 \cdot 31 - (11 \cdot 31 + 10 \cdot 31 : 2 + 10 \cdot 17 : 2 + 20 \cdot 14 : 2)$

$P_{EFG} = 961 - (341 + 155 + 85 + 140) = 961 - 721 = 240$

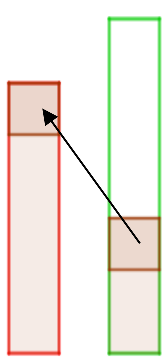
Dakle, površina trokuta EFG iznosi 240 cm^2

5. zadatak

U prvoj bačvi nalazi se 75 litara, u drugoj 34 litre, a u trećoj 21 litra vode, pri čemu niti jedna bačva nije puna. Ako bismo prvu bačvu napunili do vrha vodom iz druge bačve, tada bi preostala voda u drugoj bačvi zauzimala polovinu obujma druge bačve. No, ako bismo drugu bačvu napunili vodom iz treće bačve, tada bi preostala voda u trećoj bačvi zauzimala četvrtinu obujma treće bačve. Ako bismo pak treću bačvu napunili vodom iz prve bačve, tada bi preostala voda u prvoj bačvi zauzimala polovinu obujma prve bačve. Odredi obujam svake pojedine bačve.

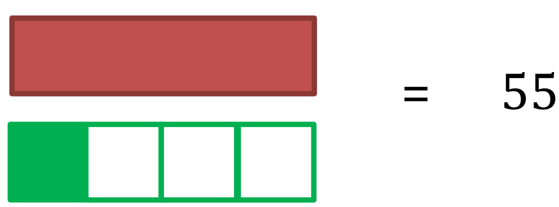
Rješenje:

Prikažimo grafički podatke iz zadatka. Plavim, crvenim i zelenim pravokutnikom prikažimo redom obujme prve, druge i treće bačve.

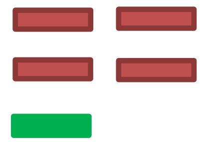


Ako bismo drugu bačvu napunili vodom iz treće bačve, tada bi preostala voda u trećoj bačvi zauzimala četvrtinu obujma treće bačve.

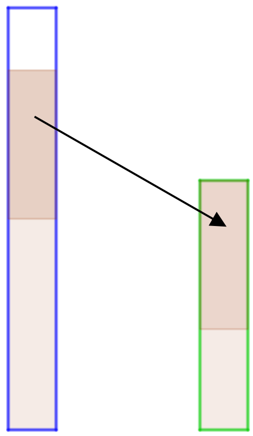
Može se zaključiti da ukupna količina vode iz druge i treće bačve, što iznosi 34 + 21 = 55 litara, zauzima cijelu drugu bačvu i još četvrtinu treće bačve, tj.



Ako se količine učetverostruče dobivamo:

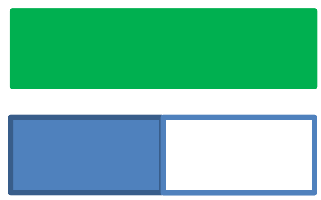


= 220



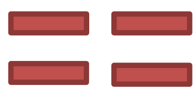
Ako bismo pak treću bačvu napunili vodom iz prve bačve, tada bi preostala voda u prvoj bačvi zauzimala polovicu obujma prve bačve.

Može se zaključiti da ukupna količina vode iz prve i treće bačve, što iznosi 75 + 21 = 96 litara, zauzima cijelu treću bačvu i još pola prve bačve:



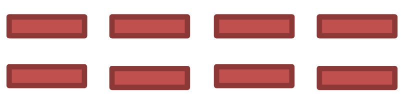
= 96

Iz ovoga zaključujemo da su četiri crvena pravokutnika za 220 – 96, tj. za 124 veća od polovice plavog pravokutnika:

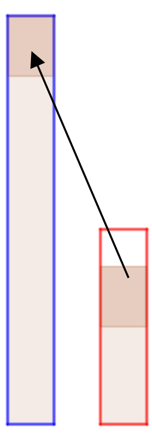


= 124 + 

Udvostruče li se sve količine, zaključujemo da je 8 crvenih pravokutnika za 248 veće od jednog plavog:

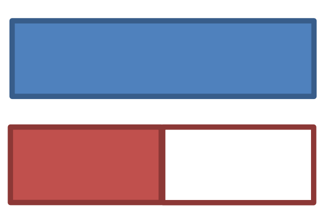


= 248 + 



Kad se prvu bačvu napuni do vrha iz druge bačve, tada bi preostala voda u drugoj bačvi zauzimala polovicu obujma druge bačve.

Može se zaključiti da ukupna količina vode iz prve i druge bačve, što iznosi 75 + 34 = 109 litara, zauzima cijelu prvu bačvu i još pola druge bačve



= 109

Sada zaključujemo da osam crvenih i još pola crvene bačve ima ukupni obujam 109 + 248, što iznosi 357 litara. Udvostručimo li količine, dobivamo da 17 crvenih bačava ima obujam 714 litara.
Prema tome, u crvenoj, tj. drugoj bačvi je 714 : 17 = 42 litara vode.
Prema prvoj slici zaključujemo da je u plavoj, tj. prvoj bačvi 109 – 21 = 88 litara vode.
Prema trećoj slici zaključujemo da je u zelenoj, tj. trećoj bačvi 96 – 44 = 52 litre vode.