Hrvatsko matematičko društvo

Hrvatska matematička olimpijada za kadete

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

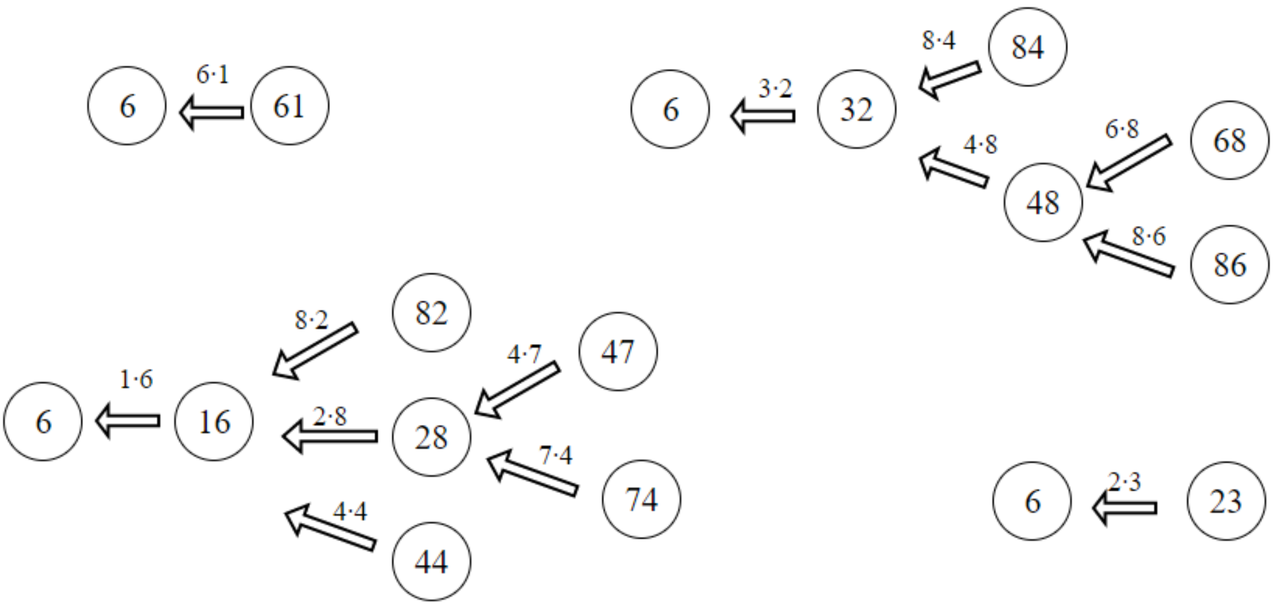
drugo kolo – srijeda, 23. lipnja 2021.

Rješenja zadataka za 5. razred

1. U lancu brojeva svaki je broj, nakon prvog, jednak umnošku znamenaka prethodnog broja, a lanac se nastavlja sve do jednoznamenkastog broja. Na primjer: $63 \rightarrow 18 \rightarrow 8$.
U lancu mogu biti dva ili više brojeva. Odredi sve dvoznamenkaste prirodne brojeve koji mogu biti na početku lanca koji završava brojem 6.

Rješenje:

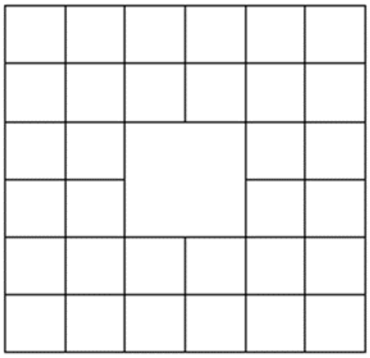
Redom zapisujemo sve mogućnosti za prikaz broja 6 u obliku umnoška dvaju jednoznamenkastih brojeva, a onda to činimo za svaki dvoznamenkasti broj dok god možemo.



Ne postoje druge mogućnosti jer se brojevi navedeni na početku lanaca ne mogu prikazati kao umnošci dva jednoznamenkasta prirodna broja, što možemo utvrditi promatrajući tablicu množenja do 10 puta 10.

Dakle, na početku lanca može biti jedan od sljedećih 13 brojeva: 16, 23, 28, 32, 44, 47, 48, 61, 68, 74, 82, 84 i 86.

2. Koliko je pravokutnika na slici?



Prvo rješenje.

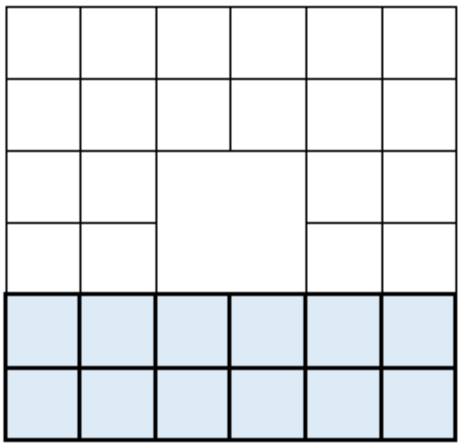
Pravokutnike možemo podijeliti u dvije skupine:

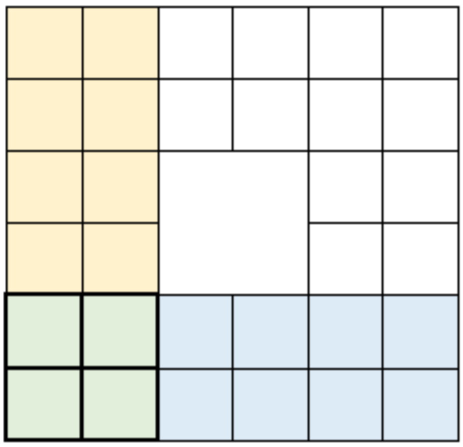
(i) pravokutnici koji obuhvaćaju središnji kvadrat,
(ii) pravokutnici koji ne obuhvaćaju središnji kvadrat.

Da bismo odredili broj pravokutnika koji obuhvaćaju središnji veći kvadrat uočimo da je svaki pravokutnik pravcima na kojima se nalaze njegove stranice. Da bi pravokutnik obuhvaćao središnji kvadrat stranice moramo odabrati između tri pravca iznad, ispod, lijevo i desno, pa je broj pravokutnika koji obuhvaćaju središnji kvadrat $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$.

Odredimo sada broj pravokutnika koji ne sadrže središnji kvadrat.

Svaki takav pravokutnik dio je mreže 6×2, kao plavi dio na lijevoj slici (postoje četiri takve mreže: ispod, iznad, lijevo i desno od središnjeg kvadrata). Broj pravokutnika u takvoj mreži možemo računati na sličan način kao gore. Za odabir gornje i donje stranice imamo tri mogućnosti – trebamo odabrati dva od tri pravca na kojima se one mogu nalaziti. Za lijevu i desnu stranicu imamo ukupno 21 mogućnost. To možemo vidjeti, na primjer, tako da prvo odaberemo jedan od 7 pravaca i onda još jedan od 6 pravaca, te uočimo da u pola tih odabira je pravac koji smo prvi odabrali lijevo od pravca kojeg smo drugog birali. Ukupan broj pravokutnika na plavoj mreži je $3 \cdot 21 = 63$.





Imamo četiri mreže, ali u broju $4 \cdot 63$ dvaput su pobrojani pravokutnici koji pripadaju dvjema takvim mrežama. To su pravokutnici koji pripadaju jednom od četiri presjeka dimenzija 2×2 (kao zeleni dio na desnoj slici). U svakom takvom presjeku ukupno je 9 pravokutnika.

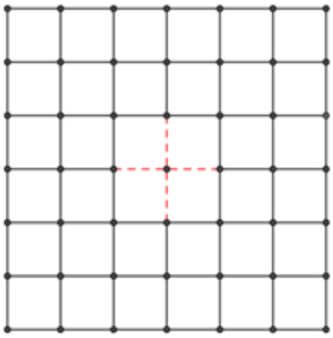
Dakle, ukupan broj pravokutnika koji ne obuhvaćaju središnji kvadrat je

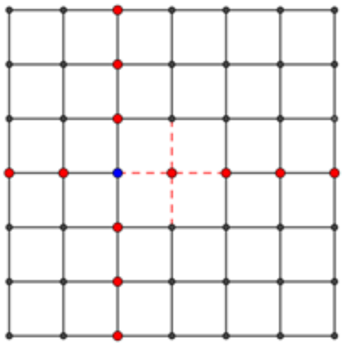
$$4 \cdot 63 - 4 \cdot 9 = 216,$$

a ukupan broj pravokutnika na danoj slici je $81 + 216 = 297$.

Drugo rješenje.

Nadopunimo mrežu pravokutnika s dvije (crvene isprekidane) linije u sredini. Na presjecima svih nacrtanih dužina ima 49 (7×7) točaka. Broj svih pravokutnika u ovoj nadopunjenoj mreži dobit ćemo ako prebrojimo sve moguće dijagonale (tj. parove nasuprotnih vrhova) tih pravokutnika.

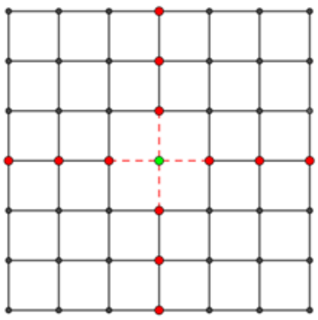


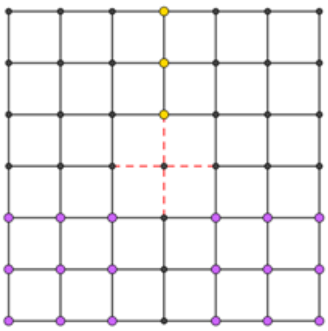


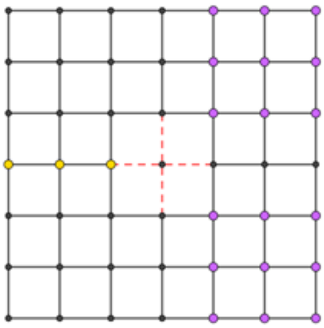
Izaberimo bilo koju točku u mreži (plava točka). Da bismo nacrtali dijagonalu pravokutnika kojoj je jedna krajnja točka izabrana točka, možemo birati bilo koju od 36 točaka koje nisu u istom stupcu i retku kao izabrana točka (crvene točke). Kako plavu točku možemo izabrati na 49 načina, dijagonalu možemo izabrati na $49 \cdot 36$ načina. No, svaki pravokutnik ima dvije dijagonale i kako smo svaku dijagonalu brojali dvaput, da bismo dobili broj pravokutnika taj broj moramo podijeliti s 4. Dakle, ukupno je $49 \cdot 36 : 4 = 441$ pravokutnik u ovako nadopunjenoj mreži.

Od tog broja treba oduzeti broj pravokutnika čija bar jedna stranica prolazi crvenim isprekidanim linijama.

Prebrojimo najprije one pravokutnike kojima je jedan vrh u sredini (u sjecištu crvenih isprekidanih linija). Nasuprotni vrh takvog pravokutnika možemo izabrati među $4 \cdot 9 = 36$ crnih točaka na slici. Dakle, takvih pravokutnika ima 36.







Nadalje, prebrojimo pravokutnike kojima jedna stranica sadrži vertikalnu crvenu isprekidanu liniju. Njihove dijagonale dobit ćemo spajajući bilo koju od žuto označenih točaka iznad te crvene linije s bilo kojom ljubičastom točkom u donjem dijelu mreže. Takvih dijagonala (i pravokutnika) ima $3 \cdot (9 + 9) = 3 \cdot 18 = 54$.

Na isti način ćemo prebrojiti one pravokutnike čija jedna stranica prolazi horizontalnom isprekidanom crvenom linijom. Njih također ima 54.

Na zadanoj slici ima ukupno $441 - 36 - 2 \cdot 54 = 297$ pravokutnika.

Napomena.

U rješenjima smo vidjeli dvije strategije prebrojavanja (prebrojavanje sa i bez središnjeg kvadrata, odnosno od svih mogućih pravokutnika na mreži 6×6 oduzimamo pravokutnike koji sijeku središnji kvadrat) i dva načina određivanja broja pravokutnika na mreži (pravci na kojima su stranice, odnosno dijagonale). Te ideje se mogu kombinirati i na drugačije načine.

Ako smo dovoljno pažljivi, možemo direktno prebrojati koliko je pravokutnika pojedinih dimenzija:

1×1	32	2×2	17	3×3	4	4×4	9	5×5	4
2×1	$2\cdot24$	2×3	$2\cdot10$	3×4	$2\cdot6$	4×5	$2\cdot6$	5×6	$2\cdot2$
3×1	$2\cdot16$	2×4	$2\cdot9$	3×5	$2\cdot4$	4×6	$2\cdot3$		
4×1	$2\cdot12$	2×5	$2\cdot6$	3×6	$2\cdot2$			6×6	1
5×1	$2\cdot8$	2×6	$2\cdot3$						
6×1	$2\cdot4$								

Ukupan broj pravokutnika je 297.

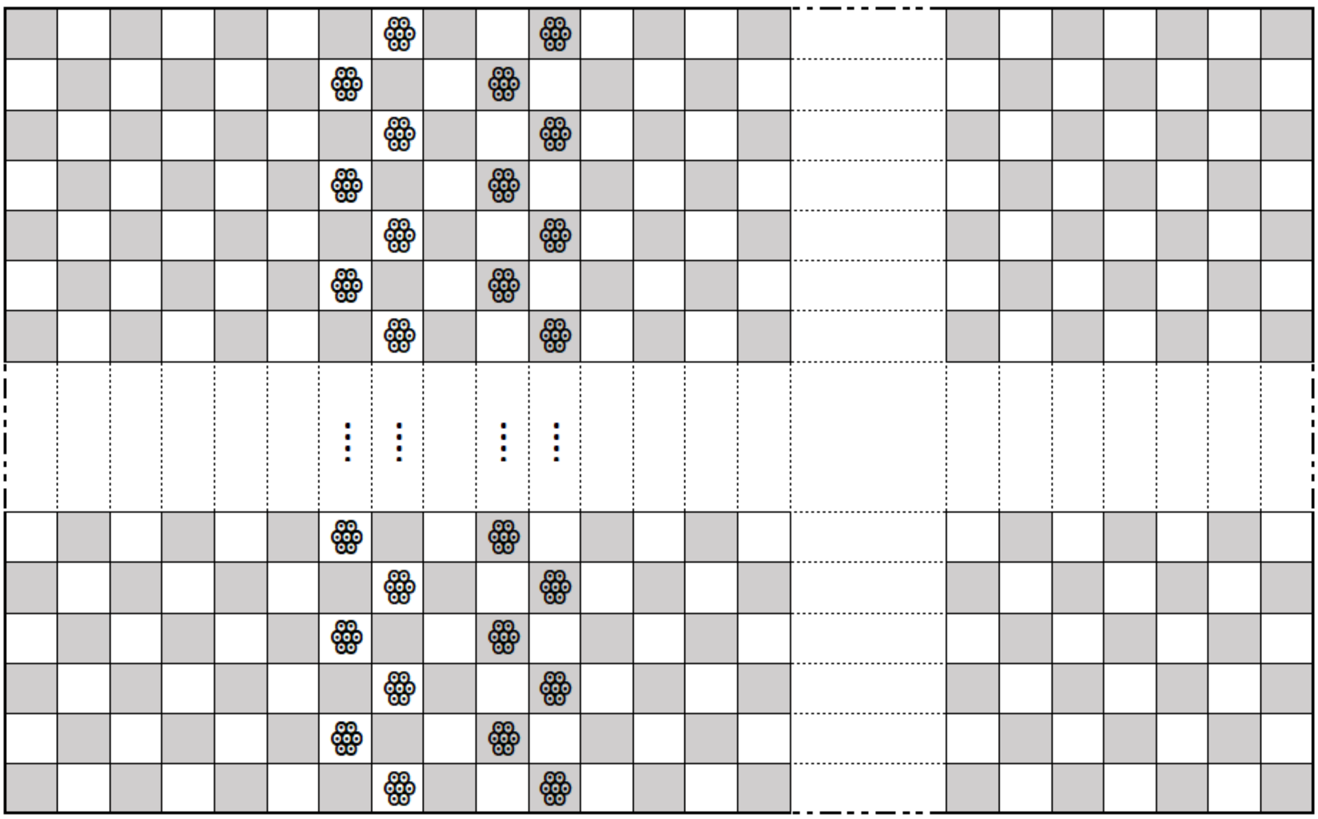
3. Polja ploče koja ima 25 redaka i 125 stupaca obojena su naizmjence crno i bijelo (poput polja na šahovskoj ploči), a na nju se postavljaju figure skakavca koje napadaju po posebnim pravilima. Skakavac koji se nalazi na bijelom polju napada sva bijela polja u istom retku i sva crna polja u istom stupcu, a skakavac koji se nalazi na crnom polju napada sva crna polja u istom retku i sva bijela polja u istom stupcu (čak i ako se između nalazi druga figura). Odredi najveći broj skakavaca koje je moguće smjestiti na ploču tako da se međusobno ne napadaju.

Rješenje:

Najprije primijetimo da u svakom retku mogu biti najviše dva skakavca, jedan na bijelom i jedan na crnom polju – kada bi u jednom retku bila tri skakavca, dva od njih bi morala biti na istobojnim poljima, pa bi se međusobno napadala.

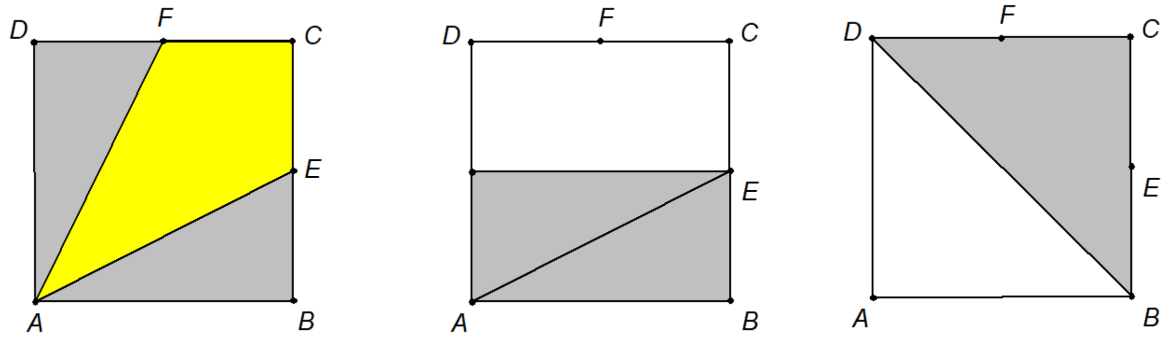
Ploča ima 25 redaka, stoga na njoj može biti najviše $2\cdot25 = 50$ skakavaca.

Zadatak će biti riješen ako pokažemo da je zaista moguće smjestiti 50 skakavaca na ploču na traženi način. U pojedinom stupcu svi skakavci moraju biti na poljima iste boje. Na slici je prikazan jedan mogući raspored 50 skakavaca koji se međusobno ne napadaju:

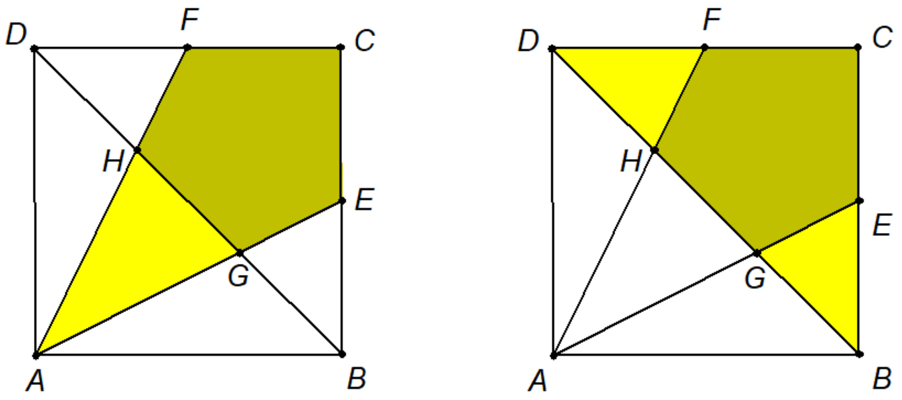


4. Neka je $ABCD$ kvadrat, a točke E i F redom polovišta stranica $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$. Dijagonala $\overline{BD}$ tog kvadrata siječe dužine $\overline{AE}$ i $\overline{AF}$ redom u točkama G i H. Dokaži da je površina peterokuta $CFHGE$ jednaka zbroju površina trokuta ABG i AHD.

Rješenje: Promotrimo slike.



Četverokut $AECF$ i trokut BCD imaju jednake površine jer su im površine jednake polovini površine kvadrata $ABCD$.



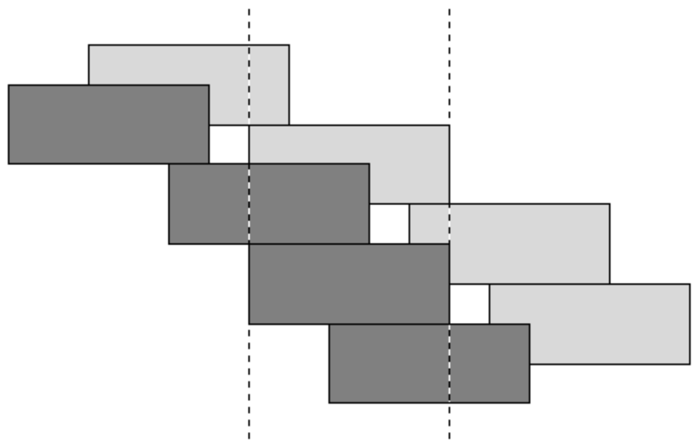
Presjek četverokuta $AECF$ i trokuta BCD, tj. njihov zajednički dio je peterokut $GECFH$.

Prema tome, slijedi $P(AGH) = P(BEG) + P(DHF)$,

a odatle i $P(GECFH) = P(ABG) + P(AHD)$, što je i trebalo dokazati.

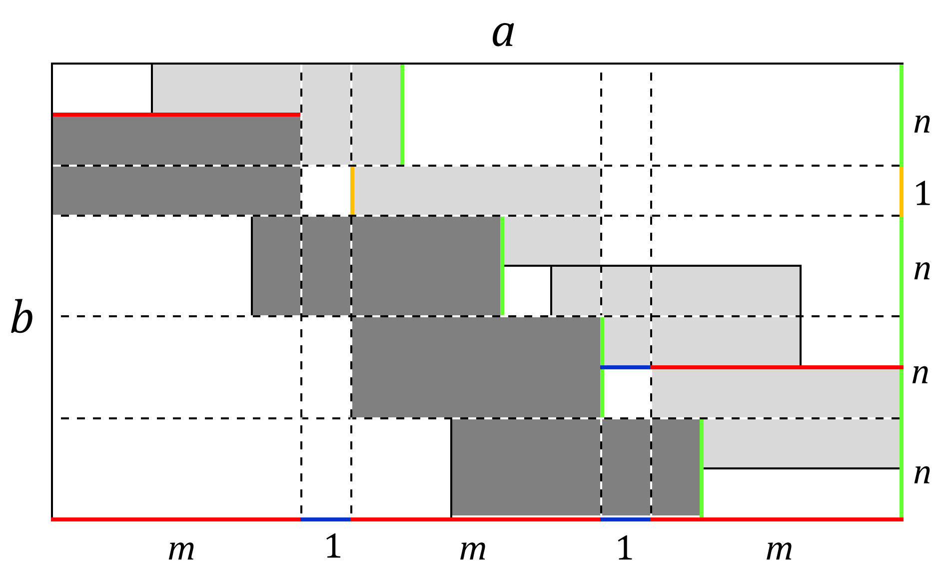
5. Četiri svijetlo siva i četiri tamno siva papira oblika pravokutnika imaju stranice istih duljina koje su, izražene u centimetrima, prirodni brojevi. Papiri su postavljeni na stol jedan do drugog tako da se svaki dodiruje s jednim ili dva susjedna papira iste boje duž dijela svoje dulje stranice. Na taj način nastali svijetlo sivi i tamno sivi lik djelomično su preklopljeni i pritom:

- na tri su mjesta između tih likova praznine oblika kvadrata površine 1 cm^2,
- drugi svijetlo sivi i treći tamno sivi papir postavljeni su tako da im kraće stranice pripadaju istim pravcima.



Najmanji pravokutnik koji možemo opisati oko tako postavljenih papira, a da mu stranice budu paralelne stranicama papira, ima opseg 200 cm. Koliko je mogućih dimenzija papira? Odredi najveću moguću površinu pojedinog papira.

Rješenje: Neka su a i b duljine stranica najmanjeg opisanog pravokutnika, a m i n duljine stranica sivog papira, $m > n$.



Promatrajući crveno i plavo označene dužine na slici vidimo da vrijedi $3m + 2 = a$,

a promatrajući zeleno i žuto označene dužine uočavamo da je $4n + 1 = b$.

Zbrajanjem tih jednakosti dobije se:

$$3m + 4n + 3 = a + b$$

Kako je opseg jednak 200 cm, vrijedi $a + b = 100$, te dobivamo:

$$3m + 4n = 97.$$

Odredimo sve parove prirodnih brojeva m, n za koje je $m > n$ koji zadovoljavaju ovu jednadžbu.

Iz $3m > 3n$ slijedi $97 = 3m + 4n > 7n$, pa je $n < 14$ (jer je $14 \cdot 7 = 98 > 97$).

Analogno, zbog $4n < 4m$ slijedi $97 = 3m + 4n < 7m$, pa je $m > 13$ (jer je $13 \cdot 7 = 91 < 97$).

Također, vrijedi $3m < 97$ pa je $m < 33$ (jer je je $33 \cdot 3 = 99 > 97$).

Zato je dovoljno provjeriti dobiju li se rješenja za $n = 1,2,3, \dots, 12, 13$,

odnosno za $m = 14, 15, 16, \dots, 31, 32$, no možemo dodatno eliminirati nemoguće slučajeve.

Broj $4n$ je paran broj pa $3m$ mora biti neparan da bi njihov zbroj bio neparan (97). To znači da je m neparan broj. Preostaju nam mogućnosti $m = 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31$.

Prikažimo ih u tablici:

m	$3m$	$4n = 97 - 3m$	n	$m \cdot n$
15	45	52	13	195
17	51	46		
19	57	40	10	190
21	63	34		
23	69	28	7	161
25	75	22		
27	81	16	4	108
29	87	10		
31	93	4	1	31

U nekim slučajevima ne dobivamo rješenje jer broj $97 - 3m$ nije djeljiv s 4.

Zaključujemo da su moguće duljine stranica papira (m, n):

$$(15, 13), (19, 10), (23, 7), (27, 4) \text{ i } (31, 1).$$

Različitih mogućnosti ima pet, no ako su dimenzije (31, 1), onda nema preklapanja.

Najveća moguća površina papira je $15 \cdot 13 = 195 \text{ cm}^2$.