Hrvatsko matematičko društvo

Hrvatska matematička olimpijada za kadete

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

drugo kolo – srijeda, 23. lipnja 2021.

Rješenja zadataka za 6. razred

1. Ana, njena mama i baka slave rođendan 23. lipnja. Danas, 23. lipnja 2021. godine, zbroj njihovih godina iznosi 127. Kada je Ana imala 4 godine, baka je bila dvostruko starija od mame. Pred dvije godine, mama je bila trostruko starija od Ane. Koje je godine rođena Anina mama? Koliko će godina imati Ana kada ona i mama budu zajedno imale jednako godina koliko i baka? Koje će to godine biti?

Rješenje.

Ove godine Ana ima A godina, mama M godina, a baka B godina. Vrijedi $A + M + B = 127$.

Ana je prije x godina imala 4 godine. Stoga je $x = A - 4$.

Nadalje, prije x godina je mama imala $M - x$ godina, a baka $B - x$ godina. Prama uvjetu zadatka je

$$B - x = 2 \cdot (M - x)$$

$$B - (A - 4) = 2 \cdot (M - (A - 4))$$

$$B - A + 4 = 2M - 2A + 8$$

$$A + B - 2M = 4$$

Iz prve jednakost slijedi $A + B = 127 - M$, pa je

$$127 - M - 2M = 4$$

$$3M = 123$$

$$M = 41$$

Anina mama ima 41 godinu, odnosno rođena je 1980. godine.

Prije dvije godine je mama imala 39 godina i bila je trostruko starija od Ane. To znači da je Ana prije dvije godine imala $39 : 3 = 13$ godina, a sada ima 15 godina ($A = 15$).

Baka ima $127 - 41 - 15 = 71$ godinu ($B = 71$).

Za y godina će Ana i mama zajedno imati jednako godina koliko i baka. Vrijedi

$$15 + y + 41 + y = 71 + y$$

$$56 + y = 71$$

$$y = 15$$

Ana će imati 30 godina kada ona i mama budu zajedno imale jednako godina koliko i baka.

To će biti 2036. godine.

2. Pobjednik odbojkaške utakmice je ekipa koja prva osvoji 3 seta. Ako je konačan rezultat u setovima 3 : 0 ili 3 : 1, pobjednik osvaja 3 boda, a poraženi 0 bodova. Ako je konačni rezultat 3 : 2, pobjednik osvaja 2 boda, a poraženi 1 bod.
Na odbojkaškom turniru sudjelovale su četiri ekipe: A, B, C i D. Svaka je ekipa sa svakom odigrala po jednu utakmicu. Nakon što su odigrane sve utakmice, tablica je izgledala ovako:

ekipa	bodovi	osvojeni setovi	izgubljeni setovi
A	9	9	1
B	5	7	6
C	2	4	8
D	2	4	9

Odredi rezultate svih odigranih utakmica.

Rješenje.
Ekipa A ima 9 bodova, znači dobila je sve tri utakmice s 3:0 ili 3:1. Zbog broja osvojenih i broja izgubljenih setova znamo da je točno u jednoj utakmici izgubila jedan set.

	bodovi	setovi
A-B	3 - 0	3 : ...
A-C	3 - 0	3 : ...
A-D	3 - 0	3 : ...
B-C		
B-D		
C-D		

Ekipa B je osvojila 7 setova, a najviše jedan protiv ekipe A. Znači ekipa B je dobila utakmice protiv C i D, te osvojila jedan set u utakmici protiv A. Ostale ekipe su od A izgubile s 3:0 u setovima.

	bodovi	setovi
A-B	3 - 0	3 : 1
A-C	3 - 0	3 : 0
A-D	3 - 0	3 : 0
B-C		3 : ...
B-D		3 : ...
C-D		

Ekipa D je izgubila 9 setova, a to znači da je svaka utakmica završila pobjedom njenog protivnika. Utakmica između ekipa C i D završila je podjelom bodova 2-1, odnosno 3:2 u setovima, jer ekipa C ima samo 2 boda.

	bodovi	setovi
A-B	3 - 0	3 : 1
A-C	3 - 0	3 : 0
A-D	3 - 0	3 : 0
B-C		3 : ...
B-D		3 : ...
C-D	2 - 1	3 : 2

Sada vidimo da je ekipa C izgubila od ekipe B s 3:0 ili 3:1, i konačno zaključujemo:

	bodovi	setovi
A-B	3 - 0	3 : 1
A-C	3 - 0	3 : 0
A-D	3 - 0	3 : 0
B-C	3 - 0	3 : 1
B-D	2 - 1	3 : 2
C-D	2 - 1	3 : 2

3. Odredi najmanji prirodni broj n za koji je svaki od razlomaka

$$\frac{7}{n+9}, \frac{8}{n+10}, \frac{9}{n+11}, \dots, \frac{30}{n+32}, \frac{31}{n+33}$$

neskrativ.

Rješenje.
Dani razlomci su neskrativi točno onda kada su neskrativi njima recipročni razlomci

$$\frac{n+9}{7}, \frac{n+10}{8}, \frac{n+11}{9}, \dots, \frac{n+32}{30}, \frac{n+33}{31}$$

odnosno (umanjeni za 1)

$$\frac{n+2}{7}, \frac{n+2}{8}, \frac{n+2}{9}, \dots, \frac{n+2}{30}, \frac{n+2}{31}.$$

Svi ovi razlomci su neskrativi točno onda kada je $n+2$ relativno prost sa svim brojevima $7, 8, 9, \dots, 30, 31$.

Očito $n+2$ nije broj manji od 32, a niti 32, 33, 34, 35 ili 36 jer ti brojevi imaju zajedničke djelitelje s nekim od brojeva $7, 8, 9, \dots, 30, 31$. Dakle, najmanji takav $n+2$ je broj 37, odnosno $n = 35$.

4. Točka D je polovište stranice $\overline{BC}$ trokuta ABC, a točka E odabrana je na stranici $\overline{AC}$ tako da vrijedi $|\angle ADB| = |\angle CDE|$. Koji lik ima veći opseg – četverokut $ABDE$ ili trokut ADC? Dokaži svoju tvrdnju!

Rješenje.

Da bi bili zadovoljeni uvjeti zadatka, mora biti $|AC| > |AB|$.

Opseg četverokuta $ABDE$ iznosi

$$|AB| + |BD| + |DE| + |EA|,$$

dok je opseg trokuta ADC jednak

$$|AD| + |DC| + |CA|.$$

Pokažimo da je

$$|AD| + |DC| + |CA| > |AB| + |BD| + |DE| + |EA|.$$

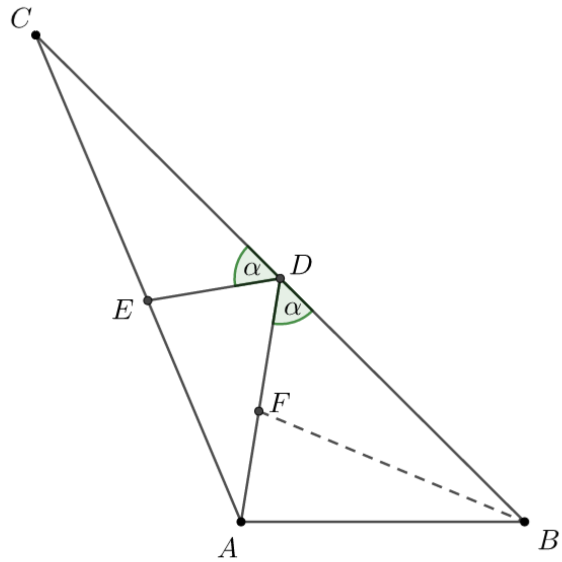
Iz uvjeta zadatka je

$$|CA| = |CE| + |EA| \quad \text{i}$$
$$|BD| = |DC|,$$

pa je razlika opsega trokuta ADC i opsega četverokuta $ABDE$ jednaka

$$\begin{aligned}
&(|AD| + |DC| + |CA|) - (|AB| + |BD| + |DE| + |EA|) = \\
&\qquad = (|AD| + |DC| + |CE| + |EA|) - (|AB| + |DC| + |DE| + |EA|) \\
&\qquad = (|AD| + |CE|) - (|AB| + |DE|).
\end{aligned}$$

Neka je F točka na dužini $\overline{AD}$ takva da je $|DF| = |DE|$.



Tada je $\Delta BDF \cong \Delta CED$ prema teoremu S-K-S jer je

$|BD| = |DC|$, $|\angle ADB| = |\angle CDE|$, $|DF| = |DE|$.

Prema tome je $|BF| = |CE|$.

Slijedi

$$\begin{aligned}
|AD| + |CE| &= |AD| + |BF| = |AF| + |FD| + |BF| \\
&= |AF| + |DE| + |BF|,
\end{aligned}$$

pa je

$(|AD| + |CE|) - (|AB| + |DE|) = |AF| + |BF| - |AB| > 0,$

zbog nejednakosti trokuta u trokutu ABF.

Dakle, veći je opseg trokuta ADC.

5. U šeširu je 11 papirića s brojevima $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ (po jedan sa svakim brojem). Svaki od jedanaest učenika uzima po jedan papirić. Nakon toga se abecednim redom javljaju i izgovaraju rečenicu "do sada je barem k učenika izreklo laž", pri čemu je k broj na izvučenom papiriću. Koliko najviše od tih 11 izjava može biti istinito?

Rješenje.

Ako je izjava nekog učenika koji je izvukao $k \geq 6$ istinita, onda je prije tog učenika barem 6 njih dalo lažnu izjavu pa je najviše $11 - 6 = 5$ učenika dalo istinitu izjavu.

Ako su sve izjave učenika koji su izvukli $k \geq 6$ lažne, najviše je 6 istinitih izjava.

Pokažimo da je moguće poredati brojeve na način da bude točno 6 istinitih izjava.

Neka su učenici abecednim redom izvukli sljedeće brojeve:

$$0, 10, 1, 9, 2, 8, 3, 7, 4, 6, 5.$$

Tada su istinitu izjavu dali prvi, treći, peti, sedmi, deveti i jedanaesti učenik, a ostali su lagali.

Dakle, najviše može biti 6 istinitih izjava.