

MATEMATIČKI KLOKAN

6 100 000 sudionika u 87 država Europe, Amerike, Afrike, Australije i Azije
Četvrtak, 10. lipnja 2021. – trajanje 75 minuta
Natjecanje za Junior (II. i III. razred SŠ)

J

- * Natjecanje je pojedinačno. **Računala nisu dopuštena.** Svaki sudionik u natjecanju dobiva simboličan dar, a deset posto najboljih nagradu.
- * **Svaki zadatak ima pet ponuđenih odgovora od kojih je samo jedan točan.**
- * U prva četiri zadatka točno rješenje zadatka donosi 3 boda, u druga četiri 4 boda, a u treća četiri 5 bodova.
- * Ako u zadatku nije odabran odgovor ili su zacrnjena dva ili više odgovora istoga zadatka, dobiva se 0 bodova.
- * Za netočan odgovor ne dobivaju se bodovi, nego se oduzima četvrtina bodova predviđenih za taj zadatak.

Pitanja za 3 boda:

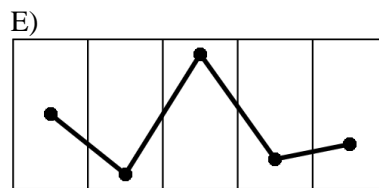
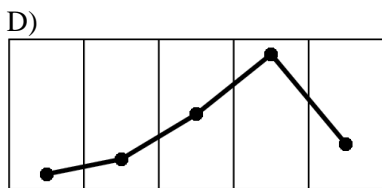
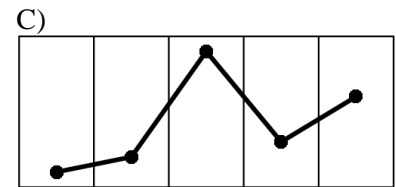
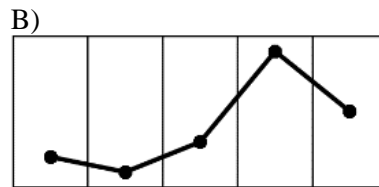
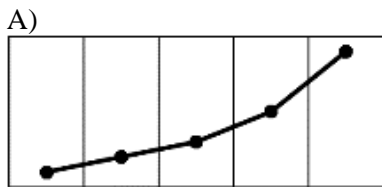
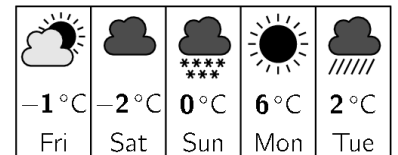
1. Svake se godine, trećega četvrtka u ožujku, obilježava Dan Klokana. Koji od danih datuma ne može biti Dan Klokana?

A) 17. 3. 2022. B) 16. 3. 2023. C) 14. 3. 2024. D) 20. 3. 2025. E) 19. 3. 2026.

Rješenje: C

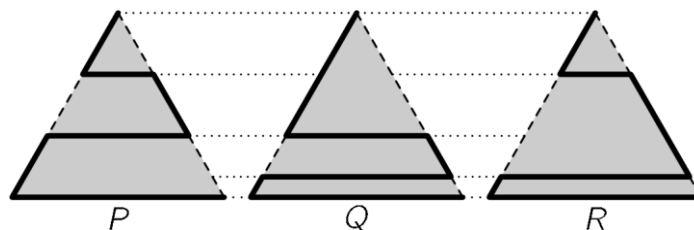
Treći četvrtak u mjesecu može najranije biti 15. dan u tome mjesecu.

2. Na svojoj mobilnoj aplikaciji Jana gleda prognozu vremena za sljedećih pet dana (na slici desno). Koji od danih dijagrama prikazuje maksimalne dnevne temperature za to razdoblje?



Rješenje: B

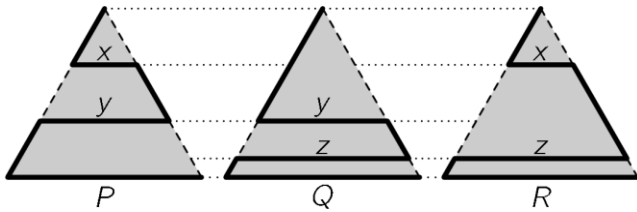
3. Na slici su tri sukladna jednakostranična trokuta. Koja je od danih izjava o duljinama P , Q i R istaknutih debelih linija istinita?



A) $P < Q < R$ B) $P < R < Q$ C) $P < Q = R$ D) $P = R < Q$ E) $P = Q = R$

Rješenje: B

Dijelovi linija koji se nalaze na stranicama u sva su tri trokuta jednake duljine (iznose zbroj duljina dviju stranica). Stoga je dovoljno usporediti dijelove linija unutar trokuta.



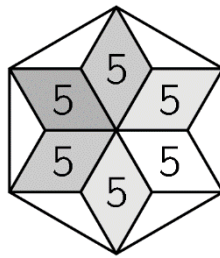
Označimo li te dijelove kao na slici lijevo, možemo primijetiti da vrijedi $x < y < z$, pa vrijedi i $x + y < x + z < y + z$. Zaključujemo da vrijedi $P < R < Q$.

4. Rezultat na poluvremenu rukometne utakmice bio je 9 : 14. Dakle, gosti su imali pet golova prednosti. Nakon trenerovih uputa tijekom poluvremena domaćini su dominirali cijelo drugo poluvrijeme i zabilježili dvostruko više golova od protivnika. Domaćini su pobijedili s razlikom od jednoga gola. Kojim je rezultatom utakmica završila?
- A) 20 : 19 B) 21 : 20 C) 22 : 21 D) 23 : 22 E) 24 : 23

Rješenje: B

Označimo li s x broj golova gostiju u drugom poluvremenu, znamo da su domaćini u istom poluvremenu zabilježili $2x$ golova te pobijedili s jednim golom razlike: $9 + 2x = 14 + x + 1$. Iz ove jednačbe slijedi da je $x = 6$, a rezultat utakmice 21 : 20.

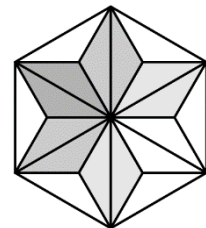
5. Šest sukladnih rombova, svaki površine 5 cm^2 , tvori zvijezdu. Vrhovi zvijezde povezani su dužinama te tvore pravilan šesterokut, kao na slici. Kolika je površina toga šesterokuta?



- A) 36 cm^2 B) 40 cm^2 C) 45 cm^2 D) 48 cm^2 E) 60 cm^2

Rješenje: C

Šesterokut možemo podijeliti na 18 sukladnih trokuta, kao na slici desno. Ti se trokuti podudaraju u dvije stranice (dvije stranice romba) i kutu između njih (120°) pa su sukladni po SKS poučku. Svaki od njih ima površinu 2.5 cm^2 pa je površina cijelog šesterokuta $18 \cdot 2.5 = 45 \text{ cm}^2$.

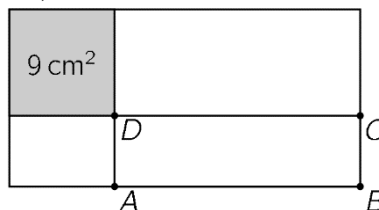


6. U jednom jazz sastavu Đuro svira saksofon, Sergej svira trubu, a Elena pjeva. Njih troje iste su dobi. Sastav čine još tri člana dobi 19, 20 i 21. Prosječna dob u sastavu je 21. Koliko godina ima Elena?
- A) 20 B) 21 C) 22 D) 23 E) 24

Rješenje: C

Označimo s d dob Đure, tj. Sergeja, tj. Elene. Prosječna dob tada je $\frac{3d+19+20+21}{6} = 21$. Slijedi da je $d = 22$.

7. Pravokutnik opsega 30 cm podijeljen je na četiri dijela jednom vertikalnom i jednom horizontalnom linijom. Jedan od dijelova je kvadrat površine 9 cm^2 , kao na slici. Koliko iznosi opseg pravokutnika $ABCD$?

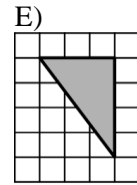
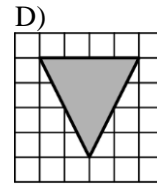
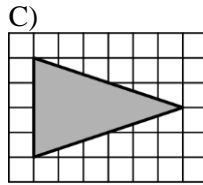
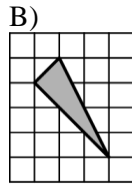
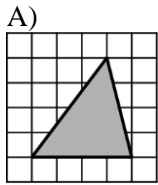
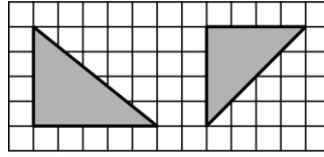


- A) 14 cm B) 16 cm C) 18 cm D) 21 cm E) 24 cm

Rješenje: C

Primijetimo da je zbroj opsega kvadrata i opsega pravokutnika $ABCD$ jednak opsegu velikoga pravokutnika. Kako je opseg kvadrata 12 cm, slijedi da opseg pravokutnika $ABCD$ iznosi $30 - 12 = 18$ cm.

8. Ada je u mreži nacrtala tri trokuta. Točno dva od njih imaju jednaku površinu, točno su dva od njih jednakokračna i točno su dva od njih pravokutna. Dva od njih prikazana su na slici. Koji bi od danih trokuta mogao biti treći?



Rješenje: D

Prikazana su dva trokuta različitih površina pa treći trokut mora imati jednaku površinu kao jedan od njih (10 ili 8). Prikazan je jedan jednakokračan trokut pa i treći trokut mora biti jednakokračan. Prikazana su dva pravokutna trokuta pa treći trokut ne može biti pravokutan. Sve uvjete zadovoljava samo trokut pod D.

Pitanja za 4 boda:

9. Tomo je imao deset prskalica iste veličine. Zapalio je jednu. Kada je preostala samo jedna desetina prve prskalice, zapalio je drugu prskalicu. Kada je preostala samo jedna desetina druge prskalice, zapalio je treću prskalicu, i tako dalje. Prskalice sagorijevaju istom brzinom cijelom svojom duljinom. Jedna prskalica sagori u 2 minute. Koliko je vremena trebalo da sagori svih 10 prskalica koje je Tomo zapalio?

- A) 18 min 20 s B) 18 min 12 s C) 18 min D) 17 min E) 16 min 40 s

Rješenje: B

Ako jedna prskalica sagori u 2 minute i sagorijeva istom brzinom cijelom svojom duljinom, onda $\frac{9}{10}$ sagori u 1.8 minuta. Tada zapalimo drugu prskalicu, pa nakon 1.8 minuta treću itd. do posljednje prskalice koja gori 2 minute. Ukupno će sagorijevanje svih deset prskalica trajati $9 \cdot 1.8 + 2 = 18.2$ minute, odnosno 18 minuta i 12 sekundi.

10. Alen prelazi osam stepenica penjući se po jednu ili dvije stepenice odjednom. Na šestoj je stepenici rupa pa na nju ne može stati. Na koliko načina Alen može doći do posljednje stepenice?

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Rješenje: C

Jedini način da Alen dođe od pete do osme stepenice je da prekorači s pete na sedmu stepenicu (dvije stepenice odjednom, kako ne bi stao na šestu stepenicu), a zatim sa sedme na osmu. Dovoljno je, dakle, prebrojiti broj načina da Alen dođe do pete stepenice.

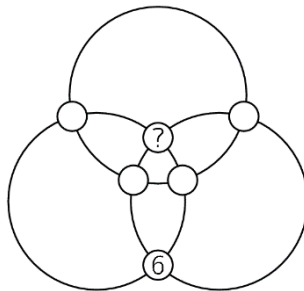
Ako se niti jednom ne popne dvije stepenice odjednom, na petu stepenicu može doći na samo jedan način.

Ako se samo jednom popne dvije stepenice odjednom, Alen se može popeti na četiri načina.

Ako se dva puta popne dvije stepenice odjednom, može to učiniti na tri načina.

Ukupno imamo osam načina za dolazak do posljednje stepenice.

11. Na slici su tri kružnice, a na njihovim su presjecima krugovi, kao na slici. U krugove su smješteni brojevi od 1 do 6 tako da je zbroj brojeva na svakoj od kružnica jednak. Na slici se vidi i gdje je smješten broj 6. Koji je broj smješten u krug s upitnikom?



- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Rješenje: A

Zbroj brojeva na sve tri kružnice je $2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 42$ jer će se svaki broj nalaziti na dvije od njih. Stoga zbroj brojeva na svakoj od kružnica iznosi $\frac{42}{3} = 14$. U kružnicama koje sadrže broj 6 nedostaje zbroj 8 kako bi ukupan zbroj bio 14. Koristeći tri od brojeva 1, 2, 3, 4 i 5, zbroj 8 možemo dobiti samo kao $1 + 2 + 5$ ili $1 + 3 + 4$. Budući da se broj 1 pojavio u oba zbroja, on mora biti na presjeku tih kružnica.

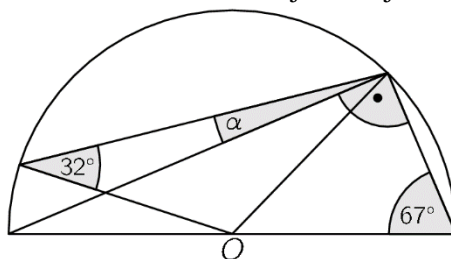
12. Broj 2021 daje ostatak 5 pri djeljenu brojem 6, brojem 7, brojem 8 i brojem 9. Koliko prirodnih brojeva manjih od 2021 ima isto to svojstvo?

- A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

Rješenje: A

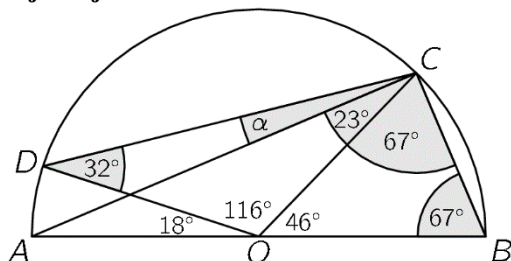
Ako je N broj s opisanim svojstvom, onda je broj $N - 5$ djeljiv brojevima 6, 7, 8 i 9. $NZV(6,7,8,9) = 504$. Traženi brojevi su: $0 + 5 = 5$, $504 + 5 = 509$, $2 \cdot 504 + 5 = 1013$ i $3 \cdot 504 + 5 = 1517$.

13. Na slici je prikazan polukrug sa središtem u točki O . Dane su mjere dvaju kutova. Koja je mjera kuta α ?



- A) 9° B) 11° C) 16° D) 17.5° E) 18°

Rješenje: A



Uvedimo oznake kao na slici lijevo. U pravokutnom trokutu ABC vrijedi: $\angle BAC = 90^\circ - 67^\circ = 23^\circ$. Trokut ODC je jednakokratan pa je $\angle DCO = 32^\circ$. Trokut AOC je jednakokratan pa je $\angle OAC = \angle ACO = 23^\circ$. Stoga je $\alpha = 32^\circ - 23^\circ = 9^\circ$.

14. Pet timova čeka početak jednog timskog natjecanja. Članovi svakog tima su ili samo djevojke ili samo dječaci. Brojevi članova pojedinog tima su 9, 15, 17, 19 i 21. Nakon što je s natjecanjem počeo prvi tim, broj djevojkica koje nisu započele natjecanje bio je tri puta veći od broja dječaka koji nisu započeli natjecanje. Koliko članova broji tim koji je prvi počeo s natjecanjem?

- A) 9 B) 15 C) 17 D) 19 E) 21

Rješenje: E

Ukupno se natječe 81 osoba. Kada prvi tim započne natjecanje, moguće je da je broj osoba koje nisu započele natjecanje $81 - 9 = 72$, $81 - 15 = 66$, $81 - 17 = 64$, $81 - 19 = 62$ ili $81 - 21 = 60$. Kako je broj djevojaka koje nisu započele natjecanje tri puta veći od broja dječaka koji nisu započeli natjecanje, to znači da je broj dječaka četvrtina broja osoba koje nisu započele natjecanje. Brojem 4 djeljivi su brojevi 72, 64 i 60 pa samo ti slučajevi dolaze u obzir. Dijeljenjem dobijemo da bi tim koji se sastoji samo od dječaka trebao brojiti $\frac{72}{4} = 18$, $\frac{64}{4} = 16$ ili $\frac{60}{4} = 15$ osoba. Od ovih brojeva samo se 15 podudara s brojem članova nekog od timova. Stoga je jedina mogućnost da je natjecanje započeo tim s 21 članom.

15. Pet je automobila sudjelovalo u utrci sa startnim pozicijama kao na slici.



Svaki put kada jedan automobil prestigne drugi, vozač dobije bod. Automobili su na cilj došli sljedećim redom:



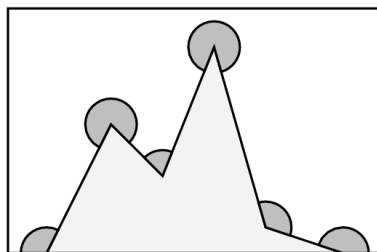
Koji je najmanji ukupan broj bodova mogao biti dodijeljen vozačima?

- A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

Rješenje: E

Da bi automobil II prešao u vodstvo, mora prestići barem 3 automobila (III, IV i V), čime osvaja 3 boda. Automobil IV mora prestići automobil V (1 bod). Automobil I zatim mora prestići automobile III i V (2 boda). Ovakav scenarij daje 6 kao najmanji ukupan broj bodova.

16. Odredi zbroj označenih šest kutova na slici.



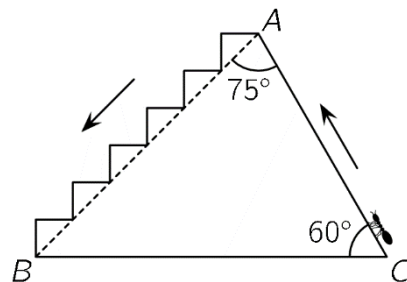
- A) 360° B) 900° C) 1080° D) 1120° E) 1440°

Rješenje: C

Označeni kutovi na slici, zajedno s četiri prava kuta pravokutnog okvira, čine deseterokut kojemu zbroj mjera unutarnjih kutova iznosi $(10 - 2) \cdot 180^\circ$. Oduzmemo li od tog broja $4 \cdot 90^\circ$, dobivamo traženi zbroj: 1080° .

Pitanja za 5 bodova:

17. Mrav se penje od točke C do točke A po dužini \overline{CA} i silazi od točke A do točke B po stepenicama, kao na slici. Koji je omjer duljine puta uspinjanja i duljine puta silaska?



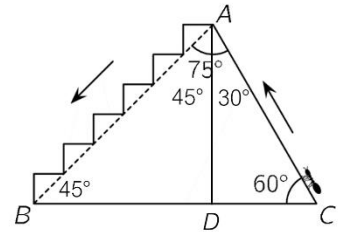
- A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Rješenje: E

Neka je \overline{AD} visina trokuta ABC iz vrha A . Ta visina kut kod vrha A dijeli na dva dijela mjera 45° i 30° . Dalje možemo zaključiti da je kut kod vrha B također 45° , tj. da je trokut ABD jednakokrčan te vrijedi $|AD| = |BD|$.

Projiciramo li put silaska mrava na visinu \overline{AD} , a zatim i na \overline{BD} , vidimo da je duljina toga puta jednaka $|AD| + |BD| = 2|AD|$. Duljina puta uspinjanja mrava je $|CA|$. Iz pravokutnog trokuta ADC sada imamo:

$$\frac{|CA|}{2|AD|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



18. Za brojeve a, b i c vrijedi $a + b + c = 0$ i $abc = 78$. Koliko iznosi vrijednost izraza $(a + b)(b + c)(c + a)$?
- A) -156 B) -39 C) 78 D) 156 E) Ništa od navedenog.

Rješenje: E

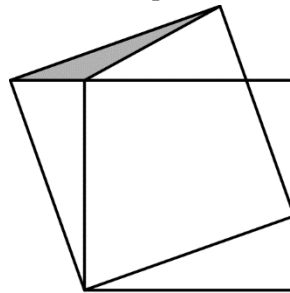
Kako je $a + b = -c, b + c = -a$ i $c + a = -b$, slijedi da je $(a + b)(b + c)(c + a) = -c \cdot (-a) \cdot (-b) = -abc = -78$.

19. Poredana je 2021 kugla. Kugle su numerirane brojevima od 1 do 2021. Svaka kugla jedne je od četiri boje: zelena, crvena, žuta ili plava. Među bilo kojih pet uzastopnih kugli nalazi se točno jedna crvena, točno jedna žuta i točno jedna plava kugla. Nakon svake crvene kugle slijedi žuta kugla. Kugle broj 2 i 20 zelene su boje. Koje je boje kugla broj 2021?
- A) Zelene. B) Crvene. C) Žute. D) Plave. E) Nemoguće je odrediti.

Rješenje: D

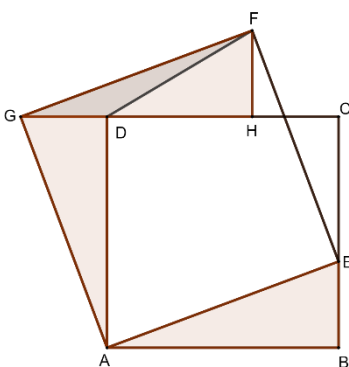
Kako se među svakih pet uzastopnih kugli nalazi točno jedna crvena, točno jedna žuta i točno jedna plava kugla, tu se moraju naći i dvije zelene kugle. Pogledamo li bilo kojih šest uzastopnih kugli, prethodna tvrdnja mora vrijediti za prvih 5 među njima i za posljednjih 5 među njima, iz čega slijedi da su 1. i 6. kugla u tome nizu jednake boje, odnosno redoslijed boja ponavlja se s periodom 5. Znamo da je kugla broj 2 zelene boje. Budući da je kugla broj 20 zelene boje, možemo zaključiti da je i kugla broj 5 zelene boje ($20 = 5 + 3 \cdot 5$). Kako nakon svake crvene kugle slijedi žuta kugla, zaključujemo da je kugla broj 3 crvene, a kugla broj 4 žute boje. Plave boje je onda kugla broj 1. Niz koji se ponavlja je: plava, zelena, crvena, žuta, zelena. Broj 2021 daje ostatak 1 pri dijeljenju brojem 5, stoga je kugla broj 2021 iste boje kao kugla broj 1 – plave.

20. Manji kvadrat na slici ima površinu 16, a sivi trokut ima površinu 1. Kolika je površina većeg kvadrata?



- A) 17 B) 18 C) 19 D) 20 E) 21

Rješenje: B



Pogledajmo sliku lijevo. Točka H nožište je okomice iz točke F na pravac GD . Trokuti ABE i ADG sukladni su prema poučku SSK ($|AB| = |AD|, |AE| = |AG|, \angle B = \angle D$). Nadalje, trokuti ABE i GHF sukladni su prema poučku KSK (svi odgovarajući kutovi jednake su mjere jer je riječ o kutovima s paralelnim kracima te je $|AE| = |GF|$).

Iz ovih sukladnosti zaključujemo da je $|BE| = |DG| = |HF|$. Znamo da površina trokuta GDF iznosi 1 pa imamo: $\frac{|DG| \cdot |HF|}{2} = 1 \Rightarrow |DG|^2 = 2$. Znamo i da manji kvadrat ima površinu 16, tj. $|AD|^2 = 16$. Sada primjenjujući Pitagorin poučak na trokut ADG imamo: $|AG|^2 = |DG|^2 + |AD|^2 = 2 + 16 = 18$, što je ujedno i površina kvadrata $AEFG$.

21. Brojevi a i b kvadrati su prirodnih brojeva. Razlika $a - b$ prost je broj. Koji bi od danih brojeva mogao biti b ?

A) 100

B) 144

C) 256

D) 900

E) 10000

Rješenje: D

Kako je $a = x^2$ i $b = y^2$ za neke prirodne brojeve x i y tako imamo $a - b = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. Da bi taj broj bio prost faktor, $x - y$ mora biti 1. Slijedi: $x = y + 1$. Onda je $a - b = x + y = 2y + 1$. Provjerom svih rješenja možemo vidjeti da će samo u slučaju kada je $b = 900$, tj. $y = 30$, broj $a - b = 2 \cdot 30 + 1 = 61$ biti prost.

22. U tablici na slici neke ćelije treba obojiti u crno. Brojevi uz tablicu govore koliko ćelija u pojedinom retku, odnosno stupcu treba biti crno. Na koliko je načina moguće obojiti ovu tablicu?

				2
				0
				2
				1
2	0	2	1	

A) 1

B) 2

C) 3

D) 5

E) Više od 5.

Rješenje: D

Za početak prekrizimo ćelije u retcima i stupcima uz koje je broj 0 (označeni X na slici desno). Njih nećemo bojiti u crno. Pogledajmo zatim retke i stupce uz koje je broj 1. Njih možemo obojiti na 5 načina (prvi red donje slike). U tim retcima/stupcima više ni jednu ćeliju ne smijemo obojiti u crno (drugi red donje slike). Prateći na kraju retke/stupce u kojima trebaju biti po dvije ćelije obojene u crno (počevši od onih u kojima obje moguće ćelije moraju biti obojene), vidimo da za svaki od prethodnih pet slučajeva imamo jedinstveno rješenje (treći red donje slike).

	X			2
X	X	X	X	0
	X			2
	X			1
2	0	2	1	

	X			2
X	X	X	X	0
	X			2
	X			1
2	0	2	1	

	X			2
X	X	X	X	0
	X			2
	X			1
2	0	2	1	

	X			2
X	X	X	X	0
	X			2
	X			1
2	0	2	1	

	X			2
X	X	X	X	0
	X			2
	X			1
2	0	2	1	

	X			2
X	X	X	X	0
	X			2
	X			1
2	0	2	1	

	X			2
X	X	X	X	0
	X			2
	X			1
2	0	2	1	

	X			2
X	X	X	X	0
	X			2
	X			1
2	0	2	1	

	X			2
X	X	X	X	0
	X			2
	X			1
2	0	2	1	

	X			2
X	X	X	X	0
	X			2
	X			1
2	0	2	1	

	X			2
X	X	X	X	0
	X			2
	X			1
2	0	2	1	

	X			2
X	X	X	X	0
	X			2
	X			1
2	0	2	1	

	X			2
X	X	X	X	0
	X			2
	X			1
2	0	2	1	

	X			2
X	X	X	X	0
	X			2
	X			1
2	0	2	1	

	X			2
X	X	X	X	0
	X			2
	X			1
2	0	2	1	

	X			2
X	X	X	X	0
	X			2
	X			1
2	0	2	1	

	X			2
X	X	X	X	0
	X			2
	X			1
2	0	2	1	

	X			2
X	X	X	X	0
	X			2
	X			1
2	0	2	1	

	X			2
X	X	X	X	0
	X			2
	X			1
2	0	2	1	

	X			2
X	X	X	X	0
	X			2
	X			1
2	0	2	1	

	X			2
X	X	X	X	0
	X			2
	X			1
2	0	2	1	

	X			2
X	X	X	X	0
	X			2
	X			1
2	0	2	1	

	X			2
X	X	X	X	0
	X			2
	X			1
2	0	2	1	

	X			2
X	X	X	X	0
	X			2
	X			1
2	0	2	1	

	X			2
X	X	X	X	0
	X			2
	X			1
2	0	2	1	

	X			2
X	X	X	X	0
	X			2
	X			1
2	0	2	1	

	X			2
X	X	X	X	0
	X			2
	X			1
2	0	2	1	

	X			2
X	X	X	X	0
	X			2
	X			1
2	0	2	1	

	X			2
X	X	X	X	0
	X			2
	X			1
2	0	2	1	

23. Koliko ima peteroznamenastih prirodnih brojeva kojima je umnožak znamenaka jednak 1000?

A) 10

B) 20

C) 30

D) 40

E) 60

Rješenje: D

Rastavimo li broj 1000 na proste faktore, imamo $1000 = 2^3 \cdot 5^3$. Vidimo da tri znamenke traženoga broja moraju biti 5, a preostale dvije u umnošku trebaju dati 8. Te dvije znamenke mogu biti 1 i 8 ili 2 i 4. Razmotrimo slučaj kada je broj sastavljen od znamenaka 1, 8, 5, 5, 5. Položaj znamenke 1 možemo odabrati na 5 načina, a zatim položaj znamenke 8 na 4 načina – time je broj potpuno određen pa imamo $5 \cdot 4 = 20$ takvih brojeva. Analogno, imamo 20 peteroznamenastih brojeva koji se sastoje od znamenaka 2, 4, 5, 5, 5. Ukupno, peteroznamenastih prirodnih brojeva kojima je umnožak znamenaka jednak 1000 ima 40.

24. Tri su djevojke igrale igru u kojoj je svaka od njih zapisala 10 riječi. Za riječ koju je samo jedna djevojka navela ona bi osvojila 3 boda. Za riječ koju su točno dvije djevojke navele, one bi osvojile po 1 bod. Za riječi koje su sve tri djevojke navele, nisu se dobivali bodovi. Kada je svaka djevojka zbrojila svoje bodove, primijetile su da sve tri imaju različit broj bodova. Sandra je imala najmanje, 19 bodova. Jasna je imala najviše bodova. Koliko?
- A) 20 B) 21 C) 23 D) 24 E) 25

Rješenje: E

Jedina dva načina za dobiti 19 bodova na opisani način su: $19 = 5 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 0$ i $19 = 6 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0$ (to zaključujemo isprobavanjem slučajeva s 3 boda: ako imamo 4 riječi za koje osvajamo 3 boda, nemamo dovoljno riječi za osvojiti ukupno 19 bodova: $4 \cdot 3 + 6 \cdot 1 = 18 < 19$; ako pak imamo 7 riječi po 3 boda, već imamo previše ukupnih bodova: $3 \cdot 7 = 21 > 19$).

U slučaju $19 = 6 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0$ Sandra je napisala tri riječi iste kao ostale igračice. Ostale igračice stoga mogu osvojiti najviše $7 \cdot 3 = 21$ bod. S jednom od njih Sandra dijeli jednu riječ pa ta igračica može imati najviše $6 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 19$ bodova. Kako sve tri igračice imaju različit ukupan broj bodova, taj broj mora biti manji od 19, što je u suprotnosti s činjenicom da je Sandra osvojila najmanje bodova. Ovaj slučaj stoga nije moguć.

U slučaju $19 = 5 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 0$ ostale igračice osvajaju bodove za 9 svojih riječi. Mogućnosti za Jasnine bodove su:

- a) $9 \cdot 3 + 0 \cdot 1 = 27$, no u tom bi slučaju treća igračica četiri riječi dijelila sa Sandrom pa bi broj njenih bodova bio $5 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 19$, što nije moguće jer se poklapa sa Sandrinim brojem bodova.
- b) $8 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 25$. U tom slučaju imamo
- b1) treća igračica dijeli tri riječi sa Sandrom pa bi broj njenih bodova bio $6 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 21$, što je **prihvaljivo**,
- b2) treća igračica jednu bi riječ dijelila s Jasnom, a četiri sa Sandrom pa bi imala $4 \cdot 3 + 5 \cdot 1 = 17$, što nije moguće jer je manje od 19.
- c) $7 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 23$. U tom slučaju imamo
- c1) treća igračica dijeli dvije riječi sa Sandrom pa bi broj njenih bodova bio $7 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 23$, što nije moguće jer se poklapa s Jasninim brojem bodova,
- c2) treća igračica dijeli jednu riječ s Jasnom i tri riječi sa Sandrom pa bi broj njenih bodova bio $5 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 19$, što nije moguće jer se poklapa sa Sandrinim brojem bodova,
- c3) treća igračica dijeli dvije riječi s Jasnom i četiri riječi sa Sandrom pa bi broj njenih bodova bio $3 \cdot 3 + 6 \cdot 1 = 15$, što nije moguće jer je manje od 19.

U svim ostalim slučajevima Jasna bi imala manje bodova od treće igračice. Vidimo da je jedini mogući slučaj da Jasna ima 25 bodova.

Rezultati natjecanja najbolje plasiranih učenika bit će objavljeni 12. srpnja 2021. godine na mrežnoj stranici HMD-a.

Primjedbe učenika na plasman primaju se isključivo elektronskim putem na e-mail klokan@math.hr do 19. srpnja 2021. u 23:59.

Nagrade najboljim učenicima dodjeljivat će se u prvom tjednu nastave nove školske godine 2021./2022.

Obavijesti se mogu dobiti na mrežnim stranicama HMD-a – <http://www.matematika.hr/klokan/2021/>.