MATEMATIČKI KLOKAN

6 100 000 sudionika u 87 država Europe, Amerike, Afrike, Australije i Azije
Četvrtak, 10. lipnja 2021. – trajanje 75 minuta
Natjecanje za Student (IV. razred SŠ)

S

* Natjecanje je pojedinačno. **Računala nisu dopuštena.** Svaki sudionik u natjecanju dobiva simboličan dar, a deset posto najboljih nagradu.
* **Svaki zadatak ima pet ponuđenih odgovora od kojih je samo jedan točan**.
* U prva četiri zadatka točno rješenje zadatka donosi 3 boda, u druga četiri 4 boda, a u treća četiri 5 bodova.
* Ako u zadatku nije odabran odgovor ili su zacrnjena dva ili više odgovora istoga zadatka, dobiva se 0 bodova.
* Za netočan odgovor ne dobivaju se bodovi, nego se oduzima četvrtina bodova predviđenih za taj zadatak.

Pitanja za 3 boda:

1. Koliko je cijelih brojeva u intervalu $\langle 20-\sqrt{21}, 20+\sqrt{21}\rangle$?

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

Rješenje: A
U zadanom intervalu bit će jednak broj cijelih brojeva kao u intervalu $\langle -\sqrt{21}, \sqrt{21}\rangle$. Budući da je $4<\sqrt{21}<5$, radi se o 9 brojeva: $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$.

2. Kocka brida duljine 1 prerezana je u dva sukladna kvadra. Koliko je oplošje jednoga od tih kvadara?

A) $\frac{3}{2}$ B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

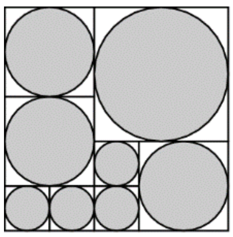
Rješenje: D
Takav kvadar ima bridove duljina $1, 1$ i $\frac{1}{2}$, pa je njegovo oplošje $2\cdot 1+4\cdot\frac{1}{2}=4$.

3. Ako je $x=\frac{\pi}{4}$, koji je od danih brojeva najveći?

A) x^4 B) x^2 C) x D) $\sqrt{x}$ E) $\sqrt[4]{x}$

Rješenje: E
Budući da je $0<x<1$, potencija je veća što je eksponent manji, tj. $x^4<x^2<x<x^{\frac{1}{2}}<x^{\frac{1}{4}}$.

4. Veliki kvadrat podijeljen je na manje kvadrate, kao na slici. Unutar svakoga od manjih kvadrata upisan je krug. Koji je dio površine velikoga kvadrata osjenčan?



A) $\frac{8\pi}{9}$ B) $\frac{13\pi}{16}$ C) $\frac{3}{\pi}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{\pi}{4}$

Rješenje: E

Primijetimo da je omjer površina kruga upisanog kvadratu stanice a i samog kvadrata $\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2\pi}{a^2}=\frac{\pi}{4}$, tj. ne ovisi o duljini stranice kvadrata. Stoga će i omjer osjenčane površine i površine velikog kvadrata na slici također biti $\frac{\pi}{4}$.

5. Pravokutan list papira ima dužinu x i širinu y, gdje je $x>y$. Od tog lista papira možemo fomirati valjak na dva različita načina. Koliki je omjer volumena višeg valjka i volumena nižeg valjka?

A) $y^2 : x^2$ B) $y : x$ C) $1 : 1$ D) $x : y$ E) $x^2 : y^2$

Rješenje: B
Jedna je stranica pravokutnika visina valjka, a druga je opseg njegove baze. Iz opsega baze računamo njen radijus. Za viši valjak to će biti $\frac{y}{2\pi}$, pa će njegov volumen iznositi $\left(\frac{y}{2\pi}\right)^2\pi x=\frac{y^2x}{4\pi}$. Radijus nižeg valjka duljine je $\frac{x}{2\pi}$, pa će njegov volumen biti jednak $\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\pi y=\frac{x^2y}{4\pi}$. Omjer ovih volumena je $\frac{y^2x}{4\pi}:\frac{x^2y}{4\pi}=y:x$.

6. Koliko je troznamenkastih brojeva sastavljenih od znamenaka 1, 3 i 5 djeljivo brojem 3? Ista se znamenka može koristiti više puta.

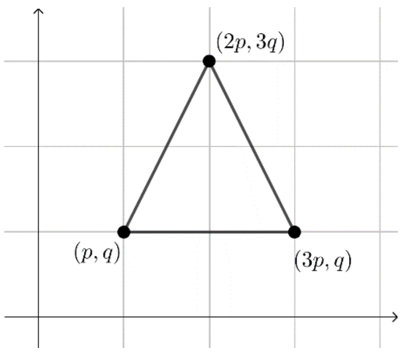
A) 3 B) 6 C) 9 D) 18 E) 27

Rješenje: C
Broj je djeljiv brojem 3 ako je zbroj njegovih znamenaka djeljiv brojem 3. Stoga u obzir dolaze sljedeće kombinacije znamenaka: 1,1,1; 3,3,3; 5,5,5; 1,3,5. Imamo po samo jednu permutaciju ako su sve tri znamenke jednake, to su troznamenkasti brojevi 111, 333 i 555. Ako se radi o znamenkama 1,3,5, onda postoji 6 permutacija. Ukupno ima 9 brojeva s opisanim svojstvom.

7. Kolika je površina trokuta kojemu su vrhovi u točkama s koordinatama (p,q), $(3p,q)$, $(2p,3q)$, gdje je $p>0$, $q>0$?

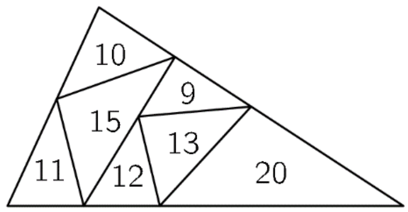
A) $\frac{pq}{2}$ B) pq C) $2pq$ D) $3pq$ E) $4pq$

Rješenje: C



Skiciramo li ovaj trokut u koordinatnom sustavu, lako je uočiti da je riječ o trokutu sa stranicom duljine $2p$ i visinom na tu stranicu duljine $2q$. Njegova površina onda je $\frac{2p\cdot 2q}{2}=2pq$.

8. Veliki trokut podijeljen je na manje trokute kao što je prikazano na slici. Broj unutar svakog malog trokuta predstavlja njegov opseg. Koliki je opseg velikoga trokuta?



A) 31 B) 34 C) 41 D) 62 E) Ništa od navedenog.

Rješenje: B
Opseg velikoga trokuta dobit ćemo zbrojimo li sve opsege malih trokuta kojima barem jedna stranica leži na stranicama velikog trokuta, te od tog zbroja oduzmemo opsege unutarnjih malih trokuta (onih kojima ni jedna stranica ne leži na stranicama velikoga trokuta): $9+10+11+12+20-13-15=34$.

Pitanja za 4 boda:

9. Koliki je dio djelitelja broja 7! neparan?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

Rješenje: D
Kako je $7! = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, on ima $(4+1)(2+1)(1+1)(1+1) = 60$ djelitelja. Njegovi neparni djelitelji su djelitelji broja $3^2 \cdot 5 \cdot 7$, pa njih ima $(2+1)(1+1)(1+1) = 12$. Dakle, $\frac{12}{60} = \frac{1}{5}$ djelitelja broja 7! je neparna.

10. Neka je $A = \langle 0,1\rangle \cup \langle 2,3\rangle$ i $B = \langle 1,2\rangle \cup \langle 3,4\rangle$. Čemu je jednak skup svih brojeva $a+b$, gdje je a element skupa A, a b element skupa B?

A) $\langle 1,7\rangle$ B) $\langle 1,5\rangle \cup \langle 5,7\rangle$ C) $\langle 1,3\rangle \cup \langle 3,7\rangle$ D) $\langle 1,3\rangle \cup \langle 3,5\rangle \cup \langle 5,7\rangle$ E) Niša od navedenog.

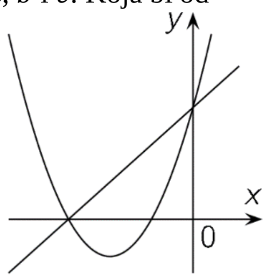
Rješenje: D
Zbrajamo li broj iz intervala $\langle x,y\rangle$ i broj iz intervala $\langle u,v\rangle$, gdje su x,y,u,v realni brojevi takvi da vrijedi $x<y<u<v$, dobit ćemo sve brojeve iz skupa $\langle x+u, y+v\rangle$.
Za dane skupove zbroj će biti iz unije intervala $\langle 1,3\rangle, \langle 3,5\rangle, \langle 3,5\rangle$ i $\langle 5,7\rangle$, tj. skup $\langle 1,3\rangle \cup \langle 3,5\rangle \cup \langle 5,7\rangle$.

11. Zapišemo li znamenke troznamenkastog broja obrnutim redoslijedom, dobit ćemo troznamenkast broj koji je za 99 veći od početnog. Koliko troznamenkastih brojeva ima ovo svojstvo?

A) 8 B) 64 C) 72 D) 80 E) 81

Rješenje: D
Iz uvjeta zadatka $\overline{zyx} = \overline{xyz} + 99$ slijedi da je
$100z + 10y + x = 100x + 10y + z + 99 \Rightarrow 99z = 99x + 99 \Rightarrow z = x + 1.$
Radi se o brojevima oblika: $1y2, 2y3, 3y4, 4y5, 5y6, 6y7, 7y8, 8y9$. Za svaki od tih osam oblika možemo znamenku y odabrati na 10 načina pa ukupno imamo 80 brojeva s traženim svojstvom.

12. Parabola na slici ima jednadžbu oblika $y = ax^2 + bx + c$ za neke različite realne brojeve a, b i c. Koja bi od danih jednadžbi mogla biti jednadžba pravca na slici?



A) $y = bx + c$ B) $y = cx + b$ C) $y = ax + b$ D) $y = ax + c$ E) $y = cx + a$

Rješenje: D
Uočimo da je odsječak na ordinati jednak i za parabolu i za pravac, pa jednadžba pravca mora biti $y = kx + c$. Ostaju nam za provjeriti odgovori pod A i D. Uočimo još da parabola i pravac dijele nultočku. Nultočka pravca $y = bx + c$ je $-\frac{c}{b}$. Uvrstimo li taj broj u jednadžbu parabole, dobivamo $ac^2 = 0$, što je istina ako je $a = 0$ ili $c = 0$. Iz slike je jasno da je $a > 0$ i $c > 0$ pa ovo rješenje nije moguće. Odgovor onda mora biti D.

13. U 5 x 5 kvadratu na slici upisani su svi prirodni brojevi od 1 do 25, no neki od brojeva nisu prikazani. Zbroj brojeva u svakome retku i u svakom stupcu jednak je. Koji se broj nalazi u ćeliji označenoj upitnikom?

	16		22	
20		21		2
	25		1	
24		5		6
	4		?	

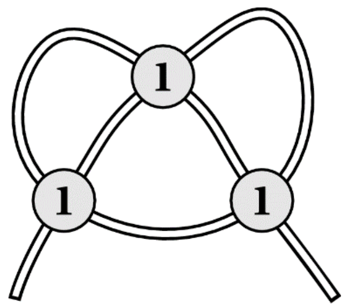
A) 8 B) 10 C) 12 D) 18 E) 23

Rješenje: B

		c		d	
		16		22	
b	20		21		2
		25		1	
a	24		5		6
		4		?	

Kako je zbroj brojeva u svakom retku i u svakom stupcu jednak, onda je zbroj stupaca a i b jednak zbroju stupaca c i d (vidi sliku). Primijetite da oba spomenuta zbroja dijele četiri pribrojnika (prekrižene ćelije na slici) pa će i bez njih zbrojevi ostati jednaki, tj. $(20+21+2)+(24+5+6)=(16+25+4)+(22+1+?)$, iz čega slijedi $?=10$.

14. Konop je položen na stol i djelomično prekriven kovanicama, kao na slici:



Jednako su vjerojatna oba moguća položaja konopa na tim mjestima:

 ili .

Kolika je vjerojatnost da će se konop zavezati u čvor kada povučemo njegove krajeve?

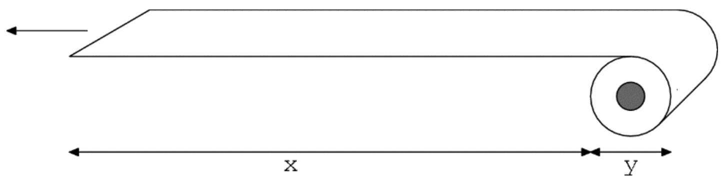
A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{3}{8}$

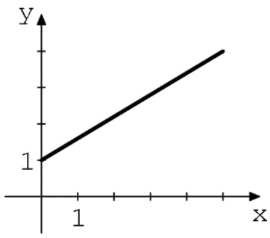
Rješenje: B

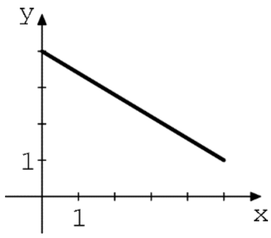
Ukupno imamo $2 \cdot 2 \cdot 2$ moguća položaja konopa. Da bismo povlačenjem konopa zavezali čvor, moramo imati jednu od dvije kombinacije:

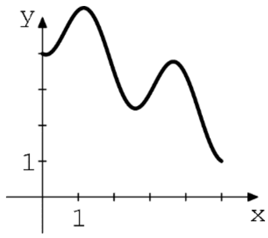
 ili . Tražena vjerojatnost je $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

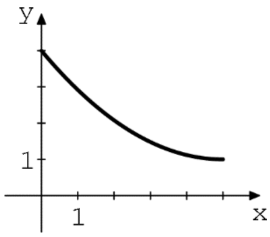
15. Nestašni psić zgrabi kraj role toaletnog papira i odšeće konstantnom brzinom. Koja od funkcija danih grafovima najbolje opisuje ovisnost debljine role papira, y, o duljini odmotanog dijela, x?

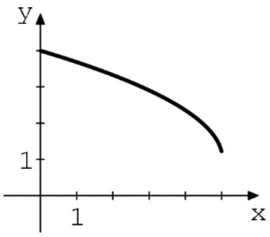


A) 

B) 

C) 

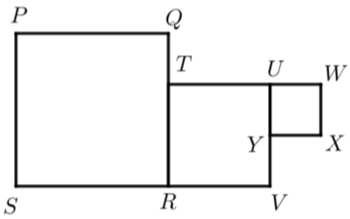
D) 

E) 

Rješenje: E

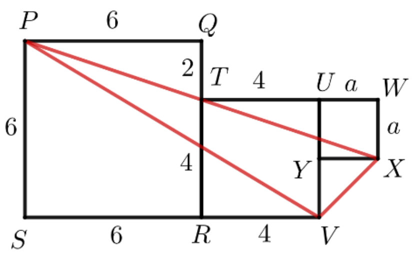
Kako se psić udaljava (x se povećava), tako se rola papira stanjuje (y se smanjuje) – funkcija je padajuća pa u obzir dolaze grafovi B, D i E. Nadalje, što je psić dalje od role, ona se sve brže stanjuje (što je x veći, to y brže pada) – to vidimo samo na grafu E.

16. Na slici su, jedan uz drugi, smještena tri kvadrata: $PQRS$, $TUVR$ i $UWXY$. Točke P, T i X su kolinearne. Površina kvadrata $PQRS$ iznosi 36, a površina kvadrata $TUVR$ iznosi 16. Kolika je površina trokuta PXV?



A) $14\frac{2}{3}$ B) $15\frac{1}{3}$ C) 16 D) $17\frac{2}{3}$ E) 18

Rješenje: C

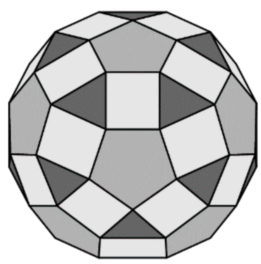


Iz njihovih površina možemo zaključiti da dva veća kvadrata imaju stranice duljina 6 i 4. Označimo stranicu najmanjeg kvadrata slovom a. Iz kolinearnosti točaka P, T i X slijedi sličnost trokuta PQT i TWX pa je $|PQ|:|QT| = |TW|:|WX|$, tj. $6:2 = (4+a):a$. Rješavanjem posljednje jednadžbe dobijemo $a = 2$.

Površinu trokuta PXV možemo, primjerice, izračunati tako da od zbroja površina triju kvadrata oduzmemo površine trokuta PQT, TWX, PVS i pribrojimo površinu trokuta YXV: $36 + 16 + 4 - 6 - 6 - 30 + 2 = 16$.

Pitanja za 5 bodova:

17. Dvanaest strana tijela prikazanog na slici pravilni su peterokuti. Ostale su strane ili kvadrati ili jednakostranični trokuti. Oko svakog peterokuta nalazi se 5 kvadrata, a oko svakog su trokuta 3 kvadrata. Ivo je napisao broj 1 na svaki trokut, broj 5 na svaki peterokut i broj -1 na svaki kvadrat. Koliki je zbroj svih napisanih brojeva?

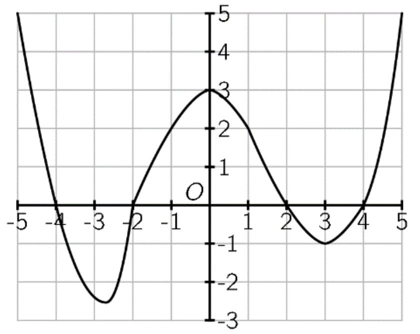


A) 20 B) 50 C) 60 D) 80 E) 120

Rješenje: B

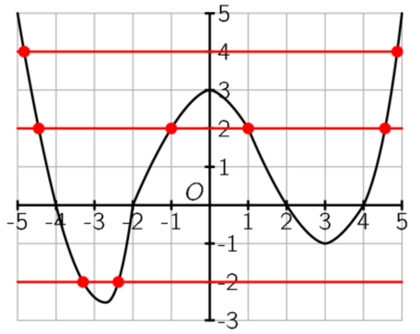
Oko svakog peterokuta nalazi se 5 kvadrata i 5 trokuta, no svaki kvadrat dijele dva peterokuta, a svaki trokut dijele tri peterokuta. Kvadrata na ovom tijelu stoga imamo $\frac{12\cdot 5}{2} = 30$, a trokuta imamo $\frac{12\cdot 5}{3} = 20$. Zbroj svih napisanih brojeva onda je $12 \cdot 5 + 30 \cdot (-1) + 20 \cdot 1 = 50$.

18. Na slici je graf funkcije $f\colon [-5,5] \to \mathbb{R}$. Koliko različitih rješenja ima jednadžba $f\big(f(x)\big) = 0$?



A) 2 B) 4 C) 6 D) 7 E) 8

Rješenje: E
Riješimo prvo grafički jednadžbu $f(x) = 0$. Rješenja (nultočke ove funkcije) su $-4, -2, 2, 4$. Dakle, ako želimo da vrijedi $f\big(f(x)\big) = 0$, onda treba vrijediti jedno od: $f(x) = -4$, $f(x) = -2$, $f(x) = 2$, $f(x) = 4$. Prebrojimo sada presjeke grafa funkcije f s pravcima $y = -4$, $y = -2$, $y = 2$ i $y = 4$. Vidimo da ih ima 8.



19. Na ploči su zapisani brojevi 1, 2, 7, 9, 10, 15 i 19. Dva igrača naizmjenice brišu po jedan broj sve dok na ploči ne ostane samo jedan broj. Zbroj brojeva koje je jedan od igrača obrisao dvostruko je veći od zbroja brojeva koje je drugi igrač izbrisao. Koji je broj ostao zapisan na ploči?

A) 7 B) 9 C) 10 D) 15 E) 19

Rješenje: B
Primijetimo da je zbroj brojeva koje su igrači obrisali djeljiv brojem 3 (oblika je $n + 2n = 3n$). Zbroj svih na početku zapisanih brojeva (63) također je djeljiv brojem 3. Znači da je i broj koji je ostao zapisan na ploči djeljiv brojem 3. To onda mora biti 9 ili 15. Broj 15 nije mogao ostati jer bi tada zbroj svih obrisanih brojeva bio $63 - 15 = 48$ pa bi zbroj brojeva koje je jedan igrač obrisao trebao biti 16, a onih koje je drugi igrač obrisao 32, što nije moguće postići s preostalim brojevima. Moguće je jedino da je broj 9 ostao zapisan na ploči. U tom slučaju jedno od rješenja jest da je jedan igrač obrisao brojeve 1, 2 i 15, a drugi 7, 10, 19.

20. Za funkciju f vrijedi $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ te je $f(1) = 2$. Odredi vrijednost izraza $\frac{f(2)}{f(1)} + \frac{f(3)}{f(2)} + \cdots + \frac{f(2021)}{f(2020)}$.

A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) 2 D) 2020 E) Ništa od navedenog.

Rješenje: E

Uočimo da vrijedi $f(x+1) = f(x) \cdot f(1)$, tj. $\frac{f(x+1)}{f(x)} = f(1) = 2$. Iz toga slijedi:

$\frac{f(2)}{f(1)} + \frac{f(3)}{f(2)} + \cdots + \frac{f(2021)}{f(2020)} = 2 + 2 + \cdots + 2 = 2020 \cdot 2 = 4040.$

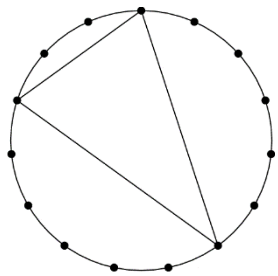
21. Svako od četiri kućanstva A, B, C i D ima jednog ljubimca. Ljubimci su pas, mačka, miš i zec. Točno jedna od sljedećih izjava je točna: *– Ljubimac u kućanstvu A nije zec. – Ljubimac u kućanstvu B nije mačka. – Ljubimac u kućanstvu C nije zec. – Ljubimac u kućanstvu D nije pas. – Ljubimac u kućanstvu A nije miš.*
Koji ljubimac živi u kućanstvu A?

A) pas B) mačka C) miš D) zec E) Ne možemo sa sigurnošću znati.

Rješenje: C

Izjave – *Ljubimac u kućanstvu A nije zec* i – *Ljubimac u kućanstvu A nije miš* ne mogu biti obje netočne jer bi to značilo da su u kućanstvu A dva ljubimca, zec i miš. Jedna od njih stoga mora biti točna. Kada bi izjava – *Ljubimac u kućanstvu A nije miš* bila točna, to bi značilo da izjave – *Ljubimac u kućanstvu A nije zec* i – *Ljubimac u kućanstvu C nije zec* nisu točne, što bi značilo da se zec nalazi i u kućanstvu A i u kućanstvu C, što nije moguće. Zaključujemo da je točna izjava – *Ljubimac u kućanstvu A nije zec*, iz čega zaključujemo da u kućanstvu A živi miš, u kućanstvu B mačka, u kućanstvu C zec, a u kućanstvu D pas.

22. Na kružnici je 15 točaka koje dijele kružnicu na 15 sukladnih lukova. Bilo koje tri od tih točaka tvore trokut. Koliko se različitih trokuta može nacrtati (istima smatramo sukladne trokute)?



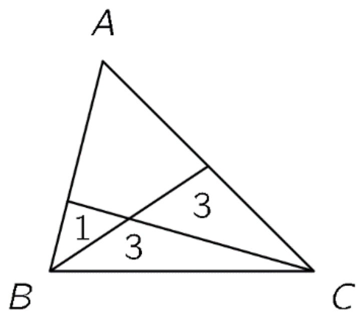
A) 19 B) 91 C) 46 D) 455 E) 23

Rješenje: A

Kružnica je podijeljena na 15 jednakih lukova, a svakome od njih pripada središnji kut mjere $\frac{360°}{15} = 24°$. Kutovi svakog od promatranih trokuta obodni su kutovi nad jednim ili više takvih lukova. Njihova mjera onda je ili $12°$ ili višekratnik od $12°$. Dakle, za svaki od promatranih trokuta postoje prirodni brojevi p, q i r takvi da vrijedi $12p + 12q + 12r = 180$, tj. $p + q + r = 15$. Prebrojimo li načine kako se broj 15 može zapisati kao zbroj triju prirodnih brojeva, prebrojili smo i tražene trokute. Sustavnim raspisivanjem vidimo da takvih rastava ima 19:

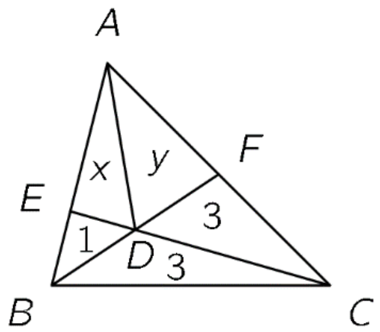
$1+1+13, 1+2+12, 1+3+11, \ldots, 1+7+7,$
$2+2+11, 2+3+10, \ldots, 2+6+7,$
$3+3+9, \ldots, 3+6+6,$
$4+4+7, 4+5+6, 5+5+5.$

23. Trokut ABC podijeljen je dvjema dužinama na četiri dijela, kao na slici. Površine manjih trokuta su 1, 3 i 3. Kolika je površina početnog trokuta?



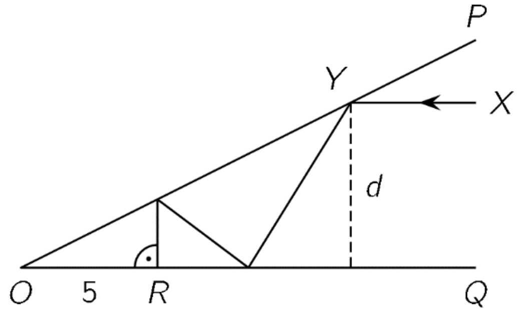
A) 12 B) 12.5 C) 13 D) 13.5 E) 14

Rješenje: A



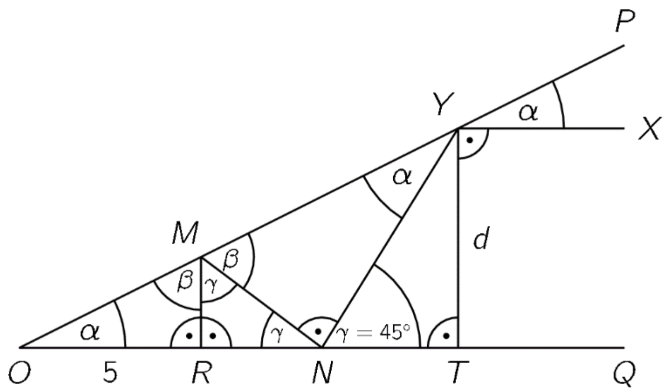
Označimo s x i y površine preostalih dvaju manjih trokuta. Iz dva trokuta površine 3 možemo zaključiti da je $|BD| = |DF|$ (jer imaju i jednaku visinu). Onda i trokuti ADB i AFD imaju jednaku površinu, tj. $y = x + 1$.
Slično, kako trokuti EDB i DCB dijele visinu, iz njihovih površina možemo zaključiti da vrijedi $3|ED| = |DC|$. Onda i trokut ACD ima tri puta veću površinu od trokuta ADE, tj. $y + 3 = 3x$.
Rješenje dobivenog sustava jednadžbi je $x = 2, y = 3$. Početni trokut ima površinu $2 + 3 + 1 + 3 + 3 = 12$.

24. Dva su ravna zrcala OP i OQ postavljena pod šiljastim kutom. Zraka svjetlosti XY paralelna s QO, na udaljenosti d cm od njega, upada na zrcalo OP u točki Y, kao na slici. Zraka se odbije pa upada na zrcalo OQ, opet se odbije do zrcala OP, pa se i treći put odbije i upada na zrcalo OQ pod pravim kutom, u točki R. Udaljenost $|OR|$ je 5 cm. Kolika je udaljenost d?



A) 4 B) 4.5 C) 5 D) 5.5 E) 6

Rješenje: C



Označimo kut pod kojim su postavljena zrcala α. Onda zraka pod istim tim kutom upada prvi put na ogledao OP. Označimo s β i γ kutove pod kojima zraka nakon toga upada na zrcala, kao na slici. Znamo da zraka upada i odbija se pod istim kutom. Trokuti ORM i YNM su slični pa je $\gamma = 45°$. Zbog tog znamo da vrijedi $|MN| = \sqrt{2}|MR|$ i $|NY| = \sqrt{2}|TY|$. Opet zbog sličnosti trokuta ORM i YNM imamo $\frac{|MR|}{5} = \frac{|MN|}{|NY|} = \frac{\sqrt{2}|MR|}{\sqrt{2}|TY|}$, iz čega slijedi da je $|TY| = 5$, tj. $d = 5$.

Rezultati natjecanja najbolje plasiranih učenika bit će objavljeni 12. srpnja 2021. godine na mrežnoj stranici HMD-a.
Primjedbe učenika na plasman primaju se isključivo elektronskim putem na e-mail klokan@math.hr do 19. srpnja 2021. u 23:59.
Nagrade najboljim učenicima dodjeljivat će se u prvom tjednu nastave nove školske godine 2021./2022.
Obavijesti se mogu dobiti na mrežnim stranicama HMD-a – **http://www.matematika.hr/klokan/2021/.**