





Nives Baranović
Filozofski fakultet u Splitu

Teškoće prijelaza sa (srednjo)školske na fakultetsku matematiku

On line predavanje

Zagreb, 17. prosinca 2021.
Stručna sekcija Hrvatskoga matematičkoga društva

Problemi prelaza kroz obrazovnu vertikalnu



Razina	Razdoblje		
Fakultet	1. – 3./5. godina		Promjena sredine, životno opredjeljenje ...
Srednja škola	1. – 4. razreda		Promjena razrednog okruženja, usmjerenje ...
Osnovna škola	5. – 8. razreda Predmetna nastava		Promjena s jednog na više učitelja ...
	1. – 4. razreda Primarno obrazovanje		

Ritam prijelaza iz škole na fakultet

- antropološki problem
- različiti aspekti proučavanja

- ❖ Društveni život
- ❖ Akademsko okruženje
- ❖ Specifičnosti predmeta (**priroda matematike**)

Nastava matematike (**diskursi**)

- ❖ **Školska**  **Diskurs 1**
- ❖ **fakultetska**  **Diskurs 2**

Specifične karakteristike matematike

Koncepti

- ❑ **Posebne riječi** sa posebnim značenjem
 - ❑ razlomak, površina, **funkcija**, derivacija, integral ...
- ❑ **Vizualni posrednici**
 - ❑ simboličke oznake, dijagrami, grafovi, slike ...

Procesi

- ❑ **Rutine**
 - ❑ proces **definiranja**, argumentiranja, dokazivanja ...
 - ❑ **proces rješavanja problema**
 - ❑ modeliranje
- ❑ **Način opisivanja** određenih situacija
 - ❑ **Čitanje/pisanje** simboličkih zapisa
 - ❑ npr. komutativnost: $a + b = b + a$

Ove karakteristike se razlikuju između školske i fakultetske matematike:
stvaraju se različiti diskursi, što može činiti teškoću u prijelazu

Nastava matematike: različiti diskursi

Školska:

- ❑ Empirijski pristup
- ❑ Instrumentalno razumijevanje
- ❑ Proceduralna fluentnost
- ❑ Prevladavaju zadaci s nižim kognitivnim zahtjevima

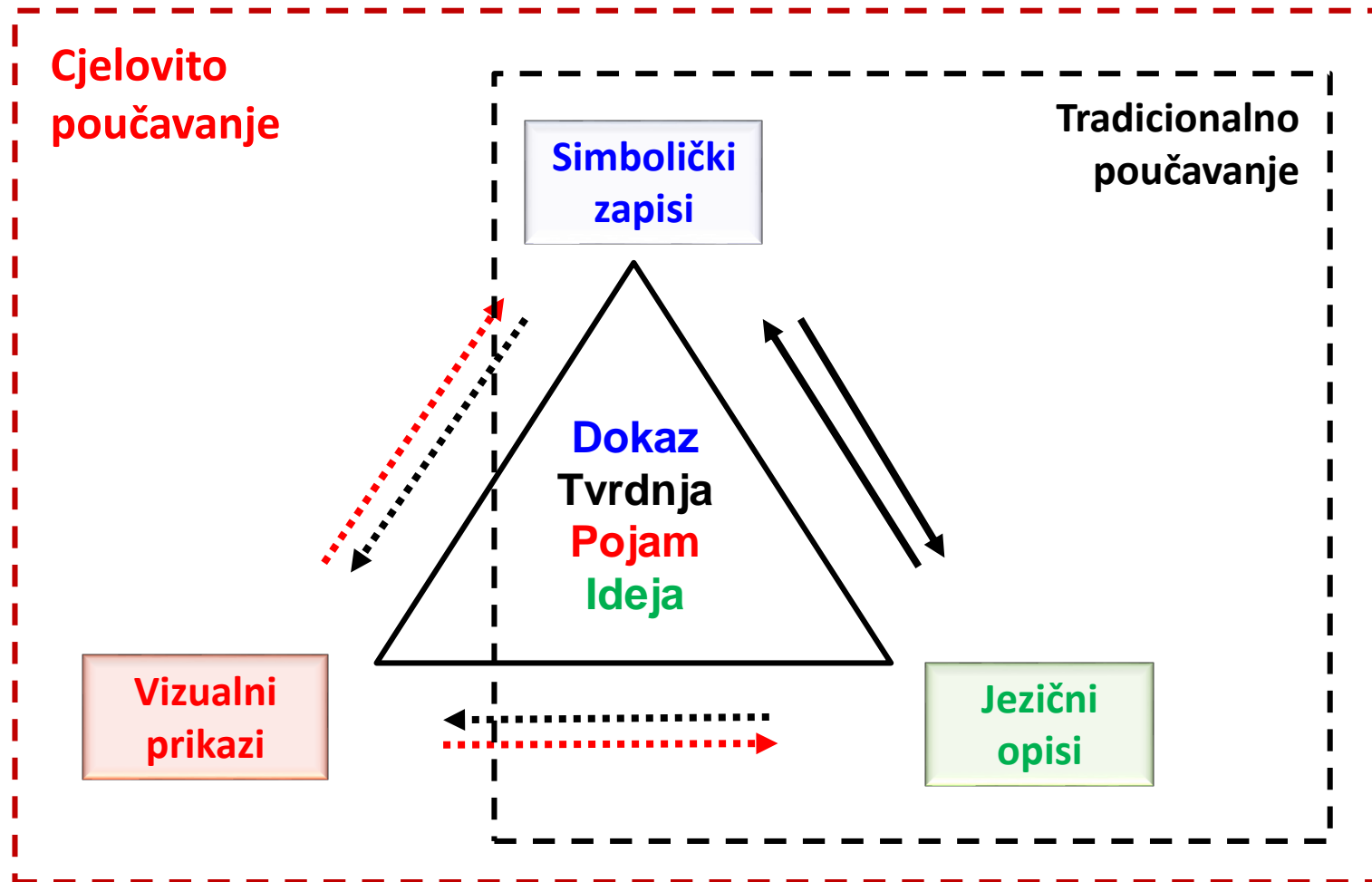
Fakultetska:

- ❑ Formalistički, apstraktni pristup
- ❑ Racionalno i konceptualno razumijevanje
- ❑ Argumentiranje veza i odnosa
- ❑ Prevladavaju „**neobičajeni zadaci**”



Prijelaz usporavaju **nerazriješeni**
kognitivni konflikti

Učenje i poučavanje matematike



Temelj
matematičke
pismenosti:

- ❖ usvajanje koncepata
- ❖ razvoj mišljenja
- ❖ stjecanje vještina
- ❖ ...

Razvoj matematičkog mišljenja

Učenjem matematike trebali bi se razvijati različiti oblici mišljenja

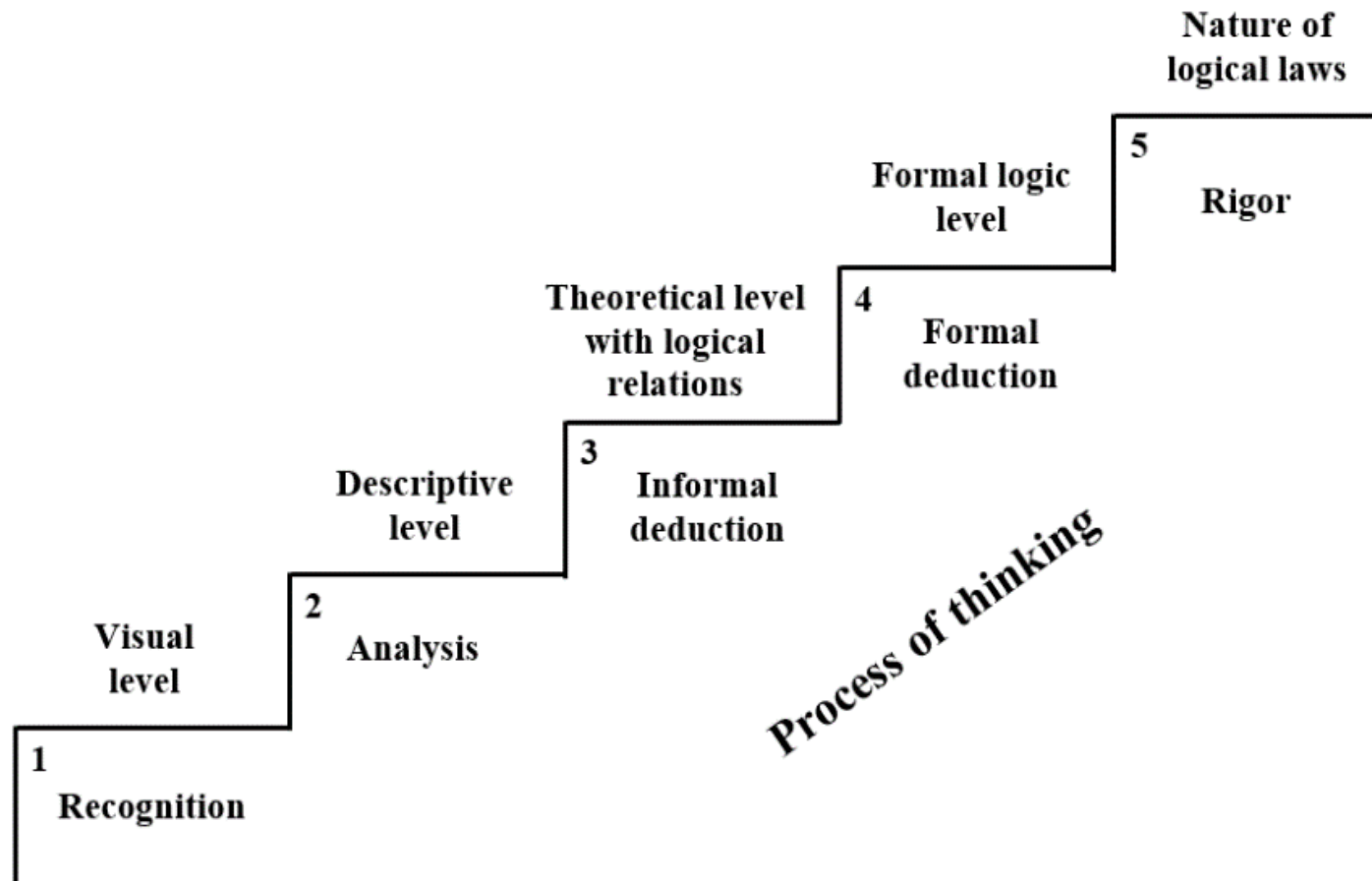
- ❑ **Vizualno**
- ❑ **Numeričko**
- ❑ **Algebarsko**
- ❑ **Funkcijsko**
- ❑ **Geometrijsko**
- ❑ **Itd.**

Kakvi su nam obrazovni ishodi?

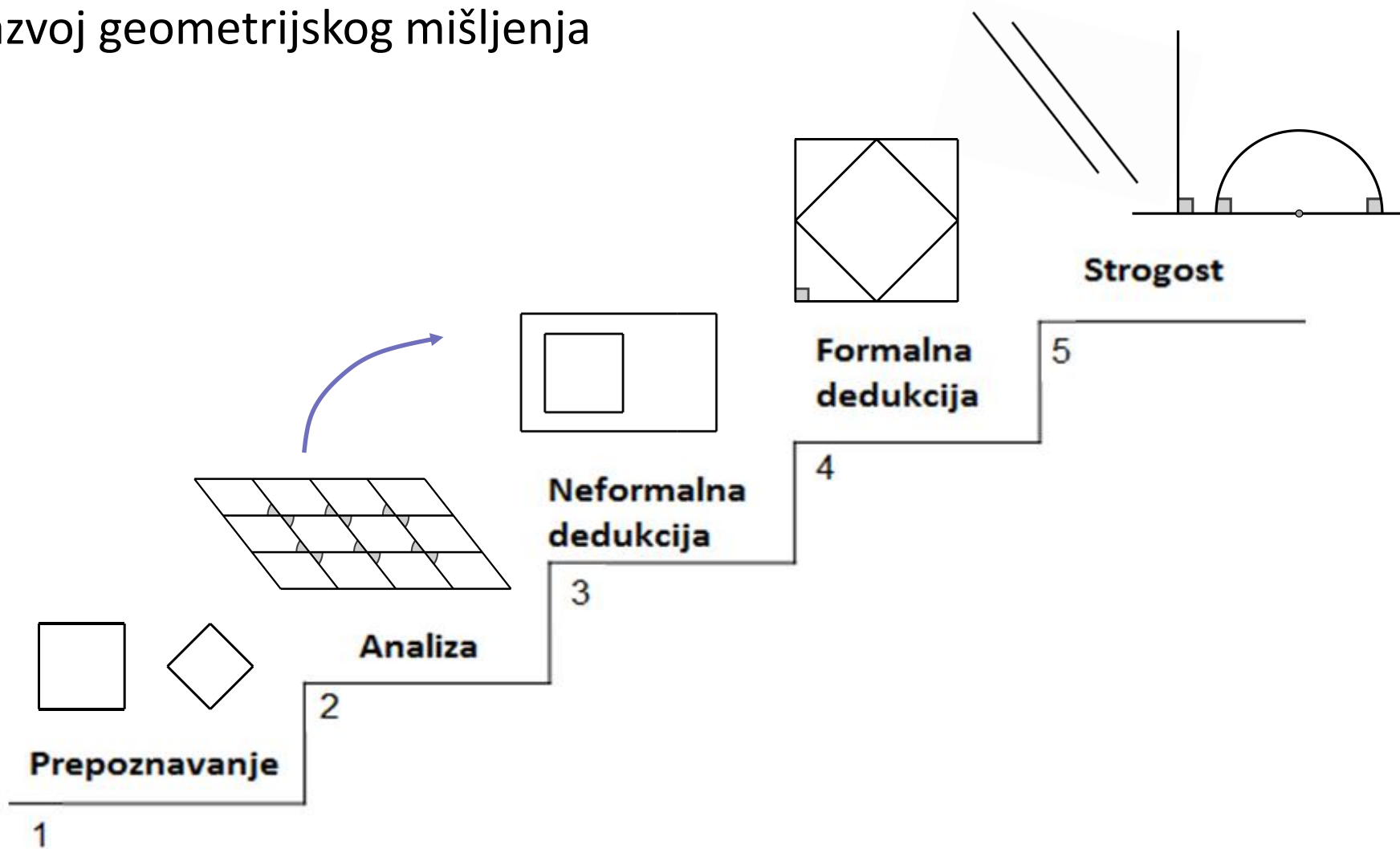
- **Zakržljale vizualne sposobnosti**
- **Teškoće s osnovnim računskim operacijama**
- **Provođenje procedura bez konceptualnog i procesnog razumijevanja**
- **Vrlo skromni, uglavnom šablonski, bez konceptualnog i procesnog razumijevanja**

Van Hielova teorija

Van Hielova teorija opisuje razvoj apstraktnog mišljenja kroz **pet razina**

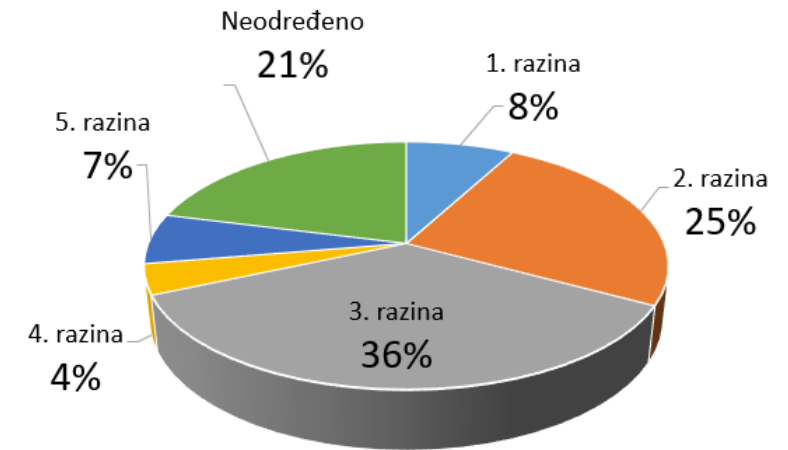
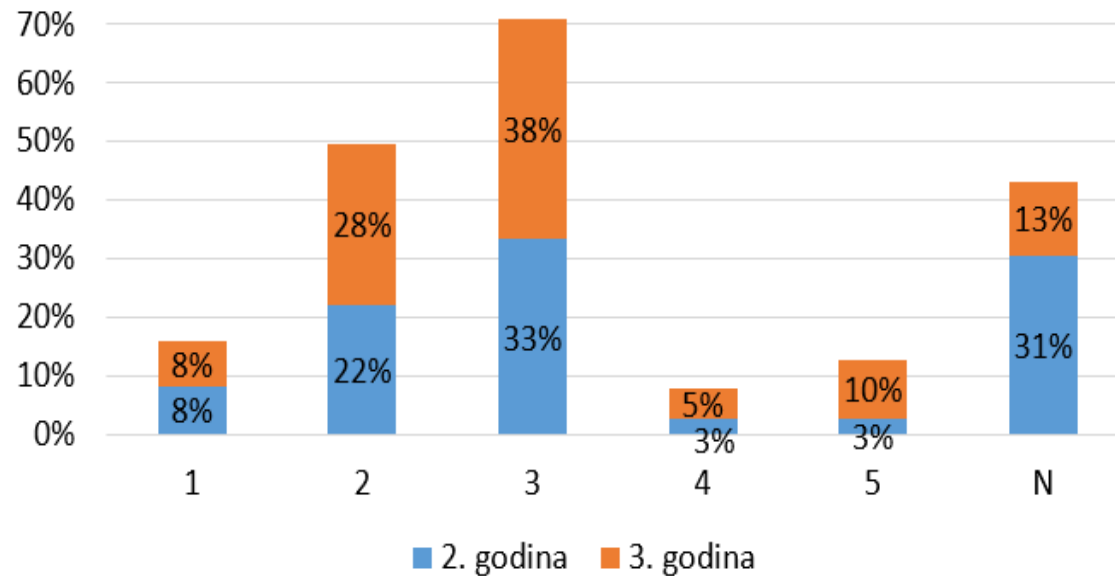


Primjer: Razvoj geometrijskog mišljenja



Testiranje na početku semestra – Matematika 2

N = 76



Sudjelovalo 76 od 87 redovito upisanih studenata 2018. godine;

- ☐ 36 od 39 sa 2. godine,
- ☐ 40 od 48 sa 3. godine.

Korišten je van Hielov test geometrije, preuzet uz dopuštenje iz rada Usiskin Zalman, Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry, CDASSG Project, 1982. by The University of Chicago.



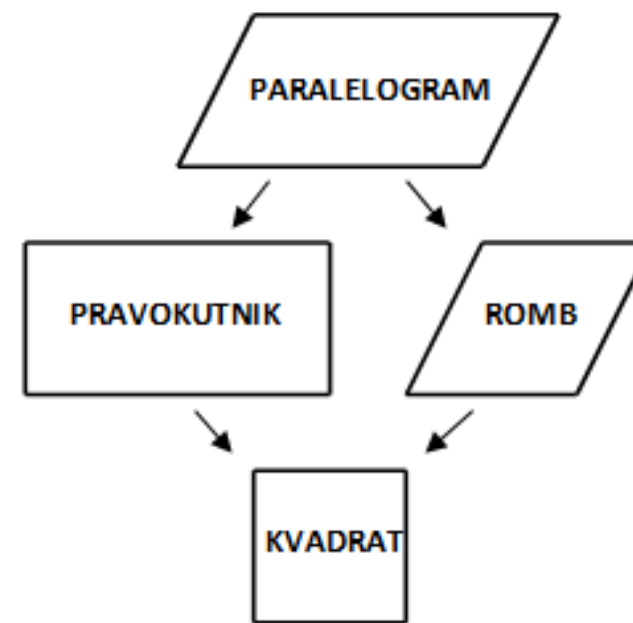
Nerazriješeni komunikacijsko - kognitivni konflikti

razni primjeri

Osvrt jednog studenta na učenje geometrije

Zatim sam došla na fakultet gdje me got dočekalo to gradivo. Moram priznati da mi nije bilo drugo. U meni je rastao neki zbunjujući kaos kada sam počela učiti da je kvadrat i pravokutnik, ali pravokutnik nije kvadrat. Znam da je u osnovnoj i srednjoj školi to uvijek bilo odvojeno i ako ih slučajno stavili u istu "ladicu" dobio bi 1. Bila sam prilično zbunjena

“... Zatim sam došla na fakultet gdje me ponovno dočekalo to gradivo (geometrija)... U meni je rastao neki zbunjujući kaos kad sam počela učiti da je kvadrat i pravokutnik, ali pravokutnik nije kvadrat. Znam da je u osnovnoj i srednjoj školi to uvijek bilo odvojeno i ako bi ih slučajno stavili u istu “ladicu” dobio bi 1. Bila sam prilično zbunjena...”



Primjer 1. Definiranje

Ako je definicija korektna zaokružite DA, ako nije korektna zaokružite NE:

- | | |
|--|------------------|
| <i>(a) Dužina je dio ravnine omeđen s dvije točke;</i> | 2/3 |
| <i>(b) Kut je omeđeni dio ravnine između dvaju polupravaca;</i> | 50% |
| <i>(c) Pravac je dužina bez kraja;</i> | 50% |
| <i>(d) Polupravac je pravac omeđen točkom s jedne strane.</i> | Skoro svi |
| <i>(e) Susjedni kutovi su kutovi kojima je zbroj 180°;</i> | Istina |

Primjer 2. Rad s tvrdnjama

Tvrdnju "**Rombu se može upisati kružnica.**" iskažite u obliku "**Ako je..., onda je...**". Zatim iskažite obrat tvrdnje. Ako smatrate da obrat nije istinit, navedite kontra primjer.

Iskazi studenata:

His je romb lik kojemu su sve četiri stranice jednake duljine onda je moguće upisati kružnicu unutar njega.

Ako je romb tangencijalan lik, odnosno ako mu je zbroj nasuprotnih stranica jednake duljine, onda mu se može upisati kružnica.

Rombu se može upisati kružnica jer simetralom katere obijemo središte, a nasuprotni kutovi su jednaki.

Primjer 2. (nastavak)

Tvrdnju "Rombu se može upisati kružnica." iskažite u obliku "Ako je..., onda je...". Zatim iskažite obrat tvrdnje. Ako smatrate da obrat nije istinit, navedite kontra primjer.

Obrati studenata:

Ako je lik romb onda mu se ne može upisati kružnica
Obrat je istinit

! Ako četv. nije romb onda mu se ne može upisati kružnica.
→ deltid (može)

Ako je upisana kružnica ne mora biti romb.

Nije tako da se rombu može upisati kružnica

Ako je kružnica onda se rombu može upisati.


OBRAT: Ako je zbroj duljina stranica četverokuta međusobno jednak,
onda se četverokutu (rombu) može upisati kružnica. ISTINIT

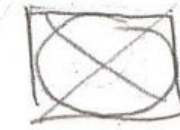
Primjer 2. (nastavak)

Tvrdnju “**Rombu se može upisati kružnica.**” iskažite u obliku “**Ako je..., onda je...**”. Zatim iskažite obrat tvrdnje. Ako smatrate da obrat nije istinit, navedite kontra primjer.

Kontra primjeri studenata:

⇒ Obrat ove tvrdnje nije istinit jer svako četverokutu udjenim upisemo kružnicu nije romb, npr. kvadrat



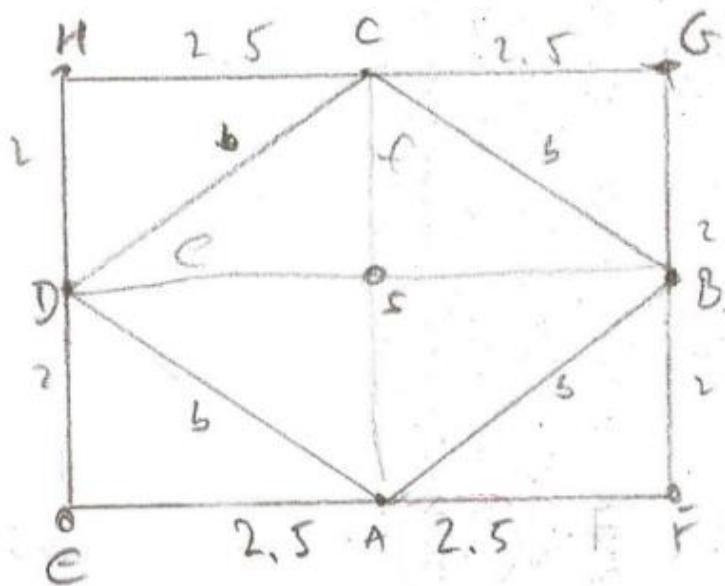
 kvadrat se može upisati kružnicu jer i kvadrat ima sve 4 str. jednake i diagonale dijagonalne

NIJE ISTINIT JER SE KRUŽNICA MOŽE UPISATI PRAVOKUTNIKU,

Primjer 3. Dokazivanje

Neka je EFGH paralelogram i neka su A, B, C, D polovišta njegovih stranica redom. Dokažite da je ABCD paralelogram.

Dokaz studenata:



ABCD je romb.

Ima sve četiri stranice jednake dužine
 $|AB| = |BC| = |CD| = |DA|$

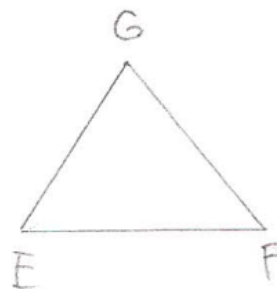
Ima 4 jednaka pravokutna trokuta

Dužine i braci dijagonala koji
raspolože su unutrašnje kutove

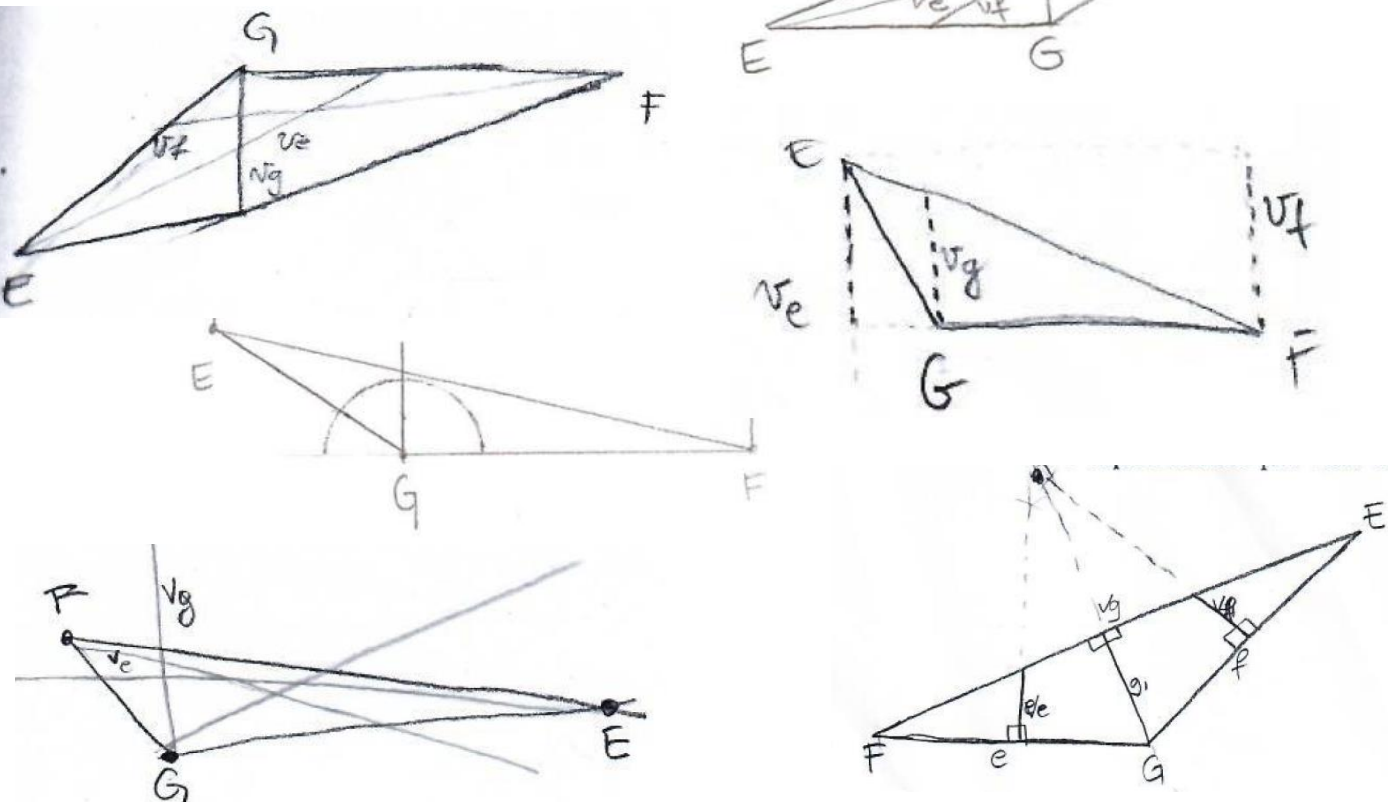
$\triangle EAD, \triangle AFB, \triangle BGC, \triangle CHD$

Primjer 4. Visina trokuta

Nacrtajte tupokutan trokut $\triangle EFG$ s tupim kutom pri vrhu G.
Zatim nacrtajte visine v_e , v_f i v_g tog trokuta.



Crteži studenata:



	T	N	Prazno
Trokut	39	11	2
Visine	5	43	4
Sve	4	46	2
	7.7%	88.5%	3.8%

Trokut	Visine	N = 52	%
1	1	4	7.7%
1	0	33	67.3%
1	-	2	
0	1	1	21.2%
0	0	10	
0	-		
-	-	2	3.8%

1 ili T – korektno; 0 ili N – nekorektno; - prazno

Primjer 5. Opseg jednakokračnog trokuta

Opseg jednakokračnog trokuta iznosi 44 cm.

Odredite duljine stranica tog trokuta, ako je duljina jedne stranice 14 cm.

	T	N	O
A: (14,15,15)	30	2	20
B: (16,14,14)	18	1	33
Sve	3		5
	7.7%	88.5%	3.8%

Rješenje A: (14,15,15)	Rješenje B: (16,14,14)	N = 52	%	
1	1	3	5.8%	korektno
1	0	1	51.9%	80.8% (samo 1 rješenje, A ili B)
1	-	26		
-	1	15	28.8%	
0	-	2	13.5%	Bez rješenja
-	-	5		
1 ili T – korektno; 0 ili N – nekorektno; - prazno				

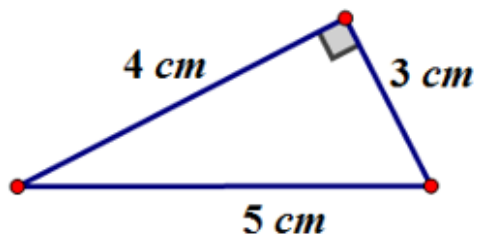
Nije razvijena **metoda razmatranja svih mogućnosti** – strategija koja se na prirodan način koristi u svakodnevnom životu.

Sliku (šiljastokutnog) trokuta crta 75% (39 od 52), a **upočne crta 25%** (13 od 52)

Primjer 6. Površina pravokutnog trokuta

Površina trokuta prikazanog na slici iznosi

- (a) 6 cm^2
- (b) 12 cm^2
- (c) 15 cm^2
- (d) 20 cm^2
- (e) 60 cm^2



Potreba da se iskoriste sve zadane mjere: najčešće zadavanje zadataka u udžbenicima.

	T	N	Prazno
Mjera	12	40	-
	23.1%	76.9%	-

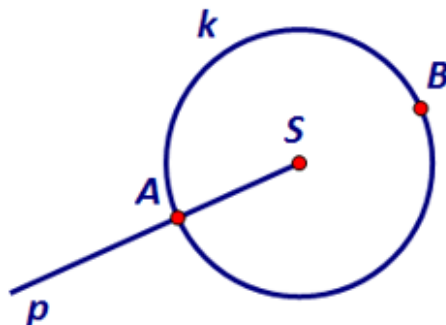
Odgovor		N = 52	%
(a)	korektno	12	23.1%
(b)	$4 \cdot 3$	1	9.6%
(c)	$5 \cdot 3$	2	
(d)	$4 \cdot 5$	2	
(e)	$3 \cdot 4 \cdot 5$	35	67.3%

Što predstavlja množenje (dvaju) triju brojeva?
Koja se mjerna jedinica dobiva množenjem triju brojeva?

Primjer 7. Pravac i kružnica

Na slici je dana kružnica k i pravac p . Njihov presjek je

- (a) točka A.
- (b) točke A i S.
- (c) točke A i B.
- (d) točke A, S i B.
- (e) dužina \overline{AS} .



Koncept kružnice i pojam presjeka je totalno promašeno.

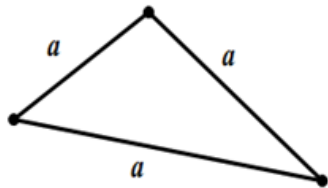
	T	N	Prazno
Mjera	5	46	1
	9.6%	88.5%	1.9%

Odgovor	koncept	N = 52	%
(a)	pravac	15	28.8%
(b)	središte	4	7.7%
(c)	korektno	5	9.6%
(d)	središte	7	13.5%
(e)	kružnica	20	38.5%

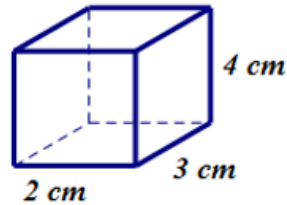
Točka **S u presjeku** – nerazumijevanje koncepta kružnice
 Točka **B nije u presjeku** – nerazumijevanje pojma pravca

Primjer 8. Procesi vizualizacije

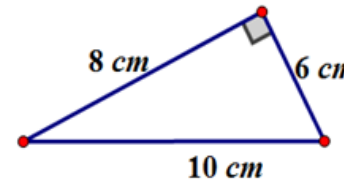
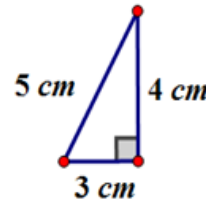
Ispod slike kratko opišite što slika prikazuje.



(a)



(b)



(c)

Najčešći opisi studenata:

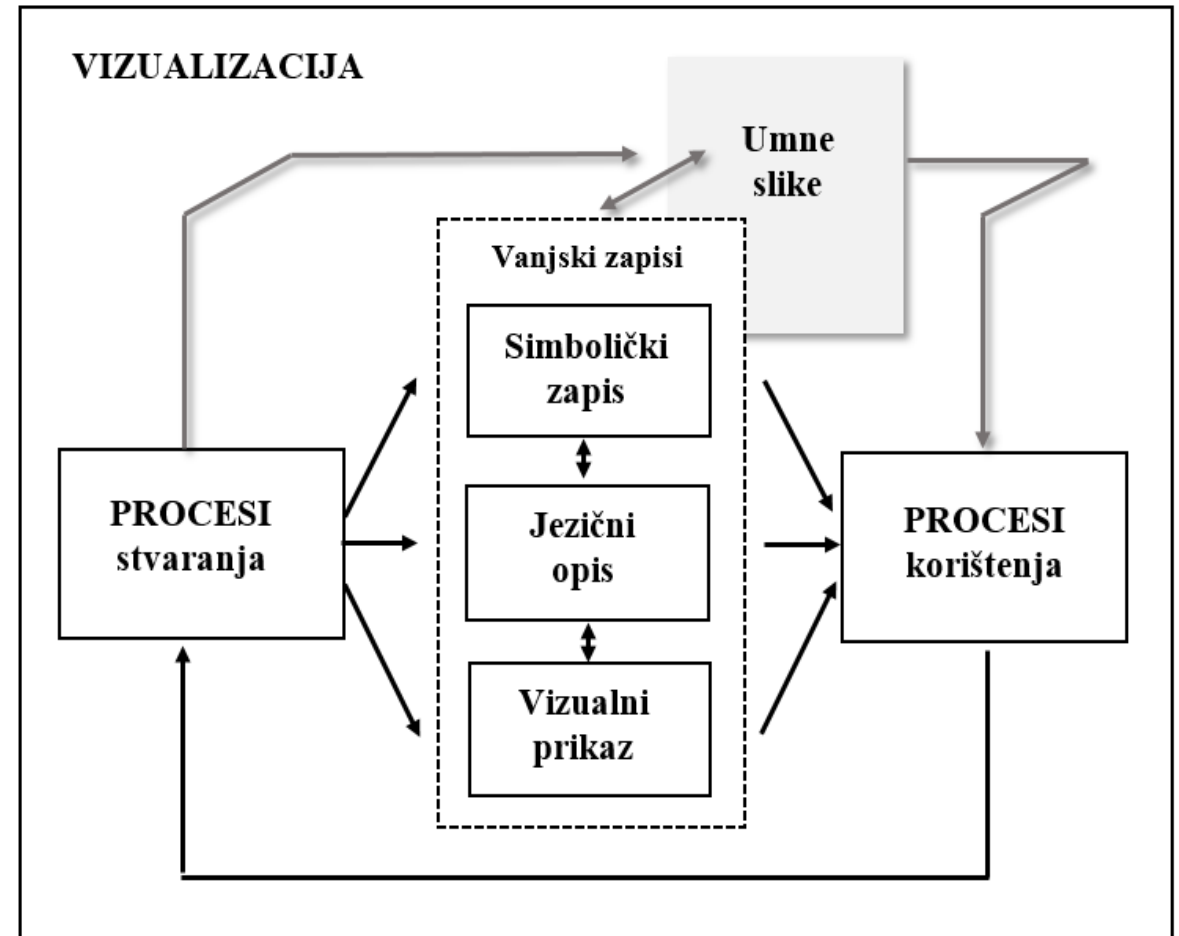
(a) Prikazan je **raznostranični** trokut sa stranicama **duljine a**.

(b) Prikazana je **kocka** kojoj su bridovi **različitih duljina**.

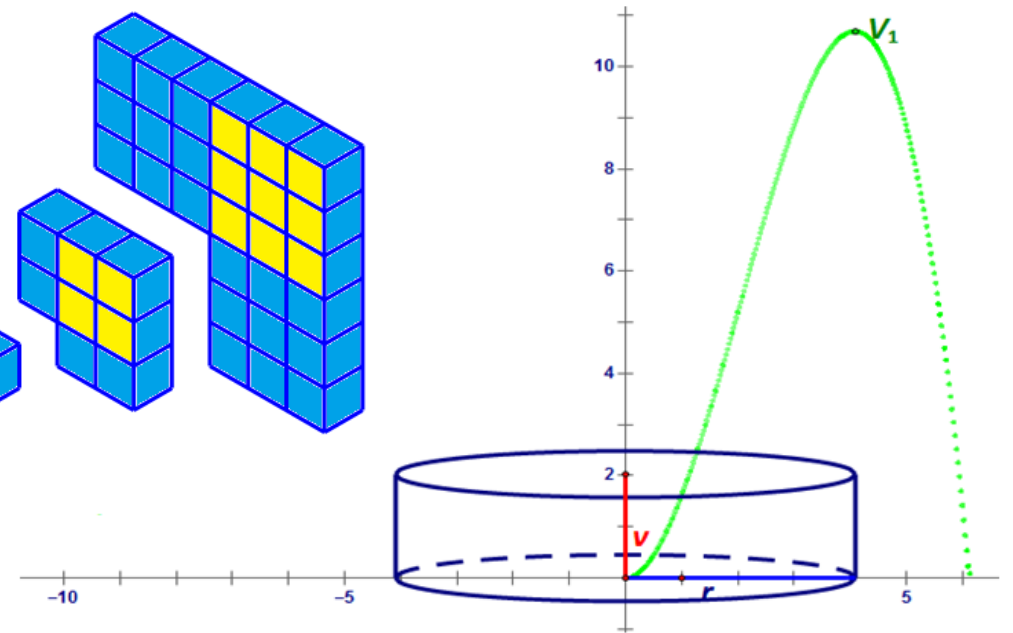
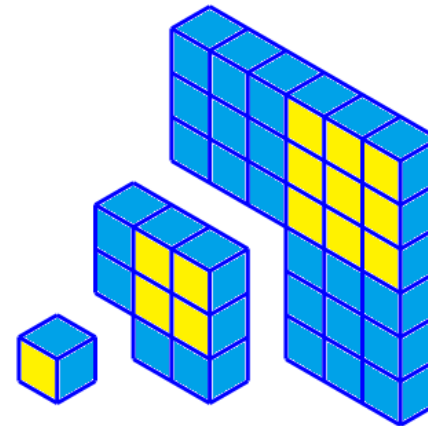
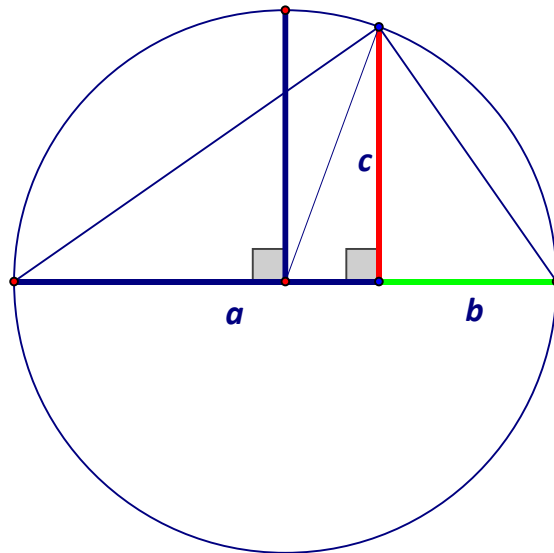
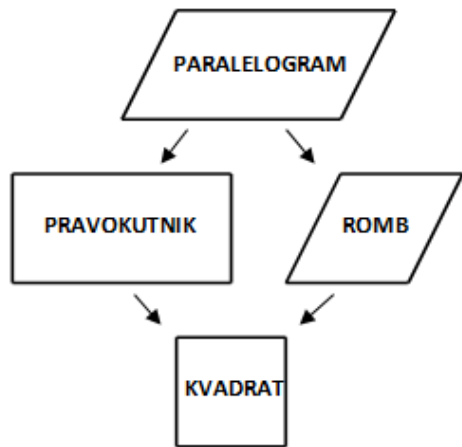
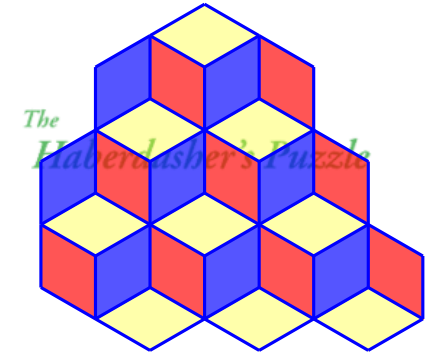
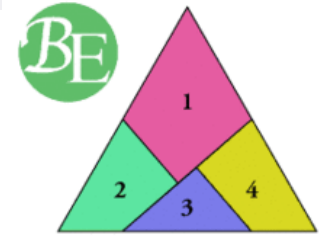
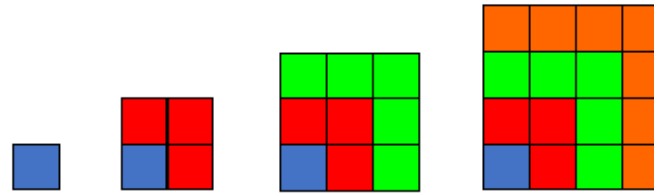
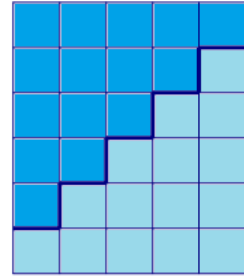
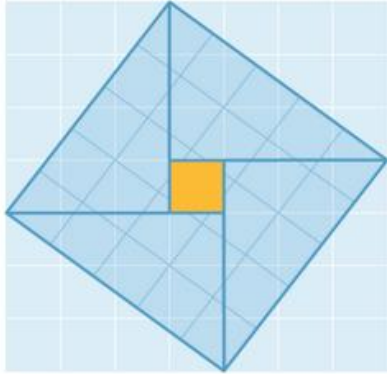
(c) Prikazan je pravokutan trokut – **1/4**
Prikazana su dva pravokutna trokuta – **2/3**
Prikazana su dva slična pravokutna trokuta – **osam studenata**.

Razvoj sposobnosti vizualizacije i vizualnog mišljenja

Definicija: Vizualizacija je **sposobnost, proces i proizvod stvaranja, interpretiranja, korištenja** i promišljanja o slikama, crtežima, dijagramima, u našim mislima, na papiru ili s tehnološkim alatima, s ciljem prikazivanja i komuniciranja informacija, razmišljanja o idejama te razvijanja do tada nepoznatih ideja i unapređivanje razumijevanja. (Arcavi 1999, str. 56)



Matematičke poruke kroz neke vizualne prikaze

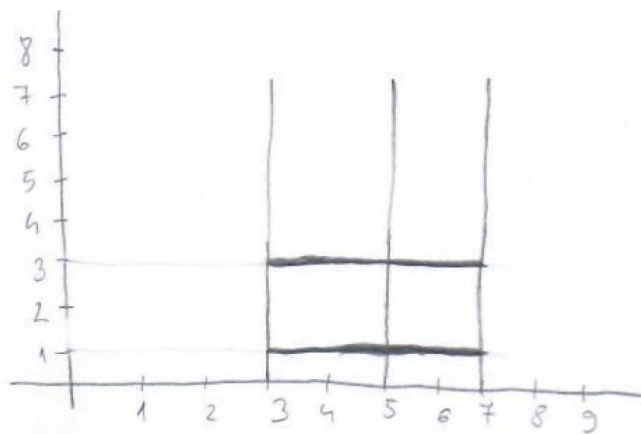


Čitanje/pisanje simboličkih zapisa – nevolje sa skupovima

Zadani su skupovi $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x \leq 8\}$ i $B = \{x \in \mathbb{N} : x = 2k - 1, k < 5\}$. Odredite elemente skupova A i B , zatim skup $A \times B$ prikažite u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini te opišite što taj skup geometrijski predstavlja.

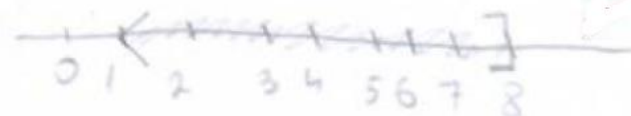
$$A = \{3, 5, 7\}$$

$$B = \{1, 3\}$$

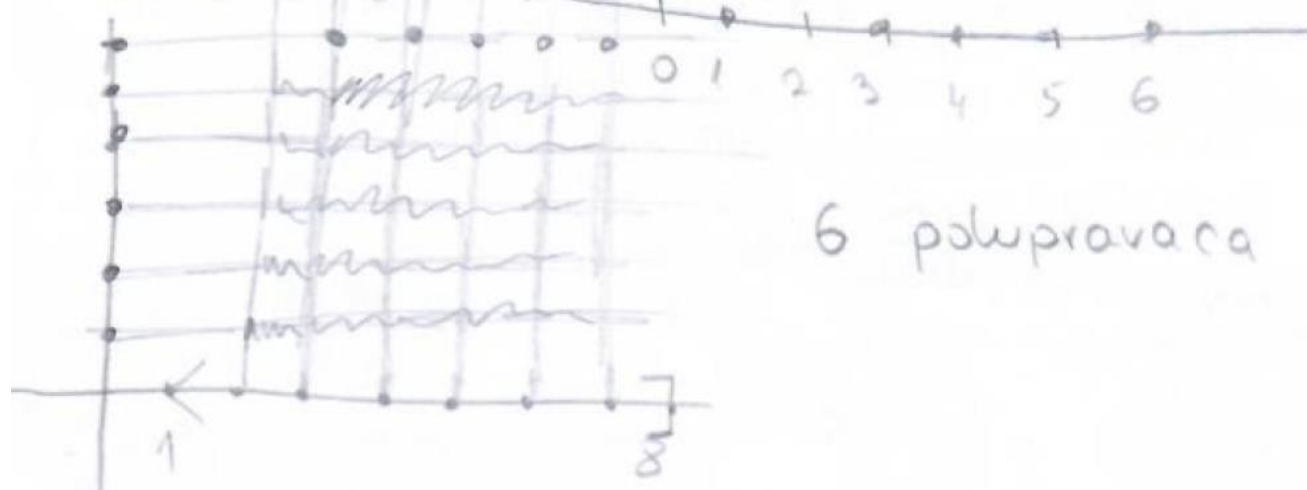


2 paralelne duzine

$$A =]1, 8]$$

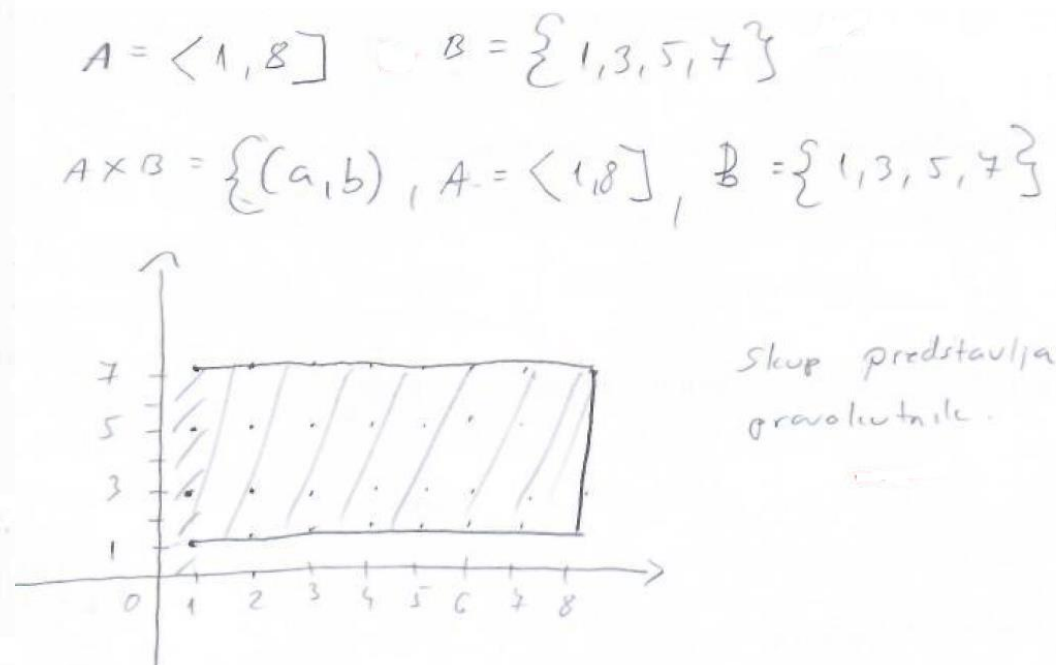
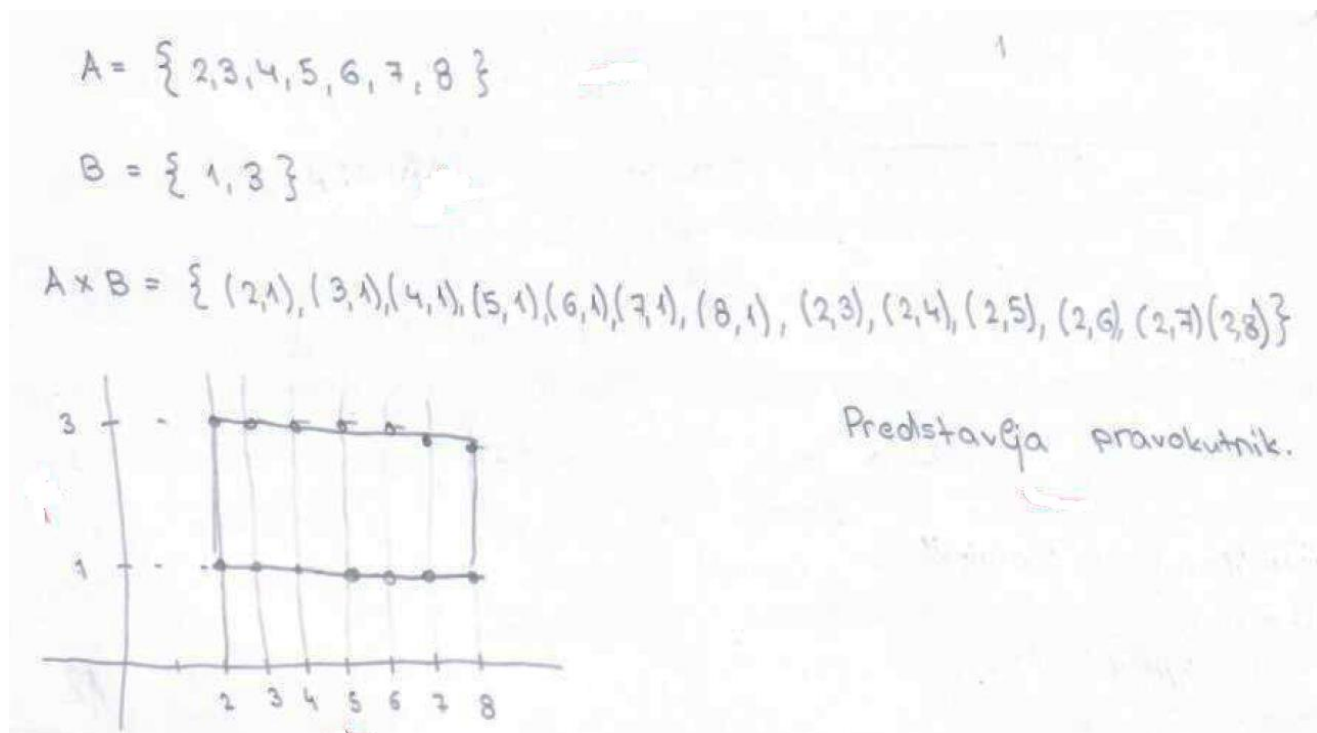


$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$



Čitanje/pisanje simboličkih zapisa – nevolje sa skupovima (2)

Zadani su skupovi $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x \leq 8\}$ i $B = \{x \in \mathbb{N} : x = 2k - 1, k < 5\}$. Odredite elemente skupova A i B , zatim skup $A \times B$ prikažite u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini te opišite što taj skup geometrijski predstavlja.



Čitanje/pisanje simboličkih zapisa – nevolje sa skupovima (3)

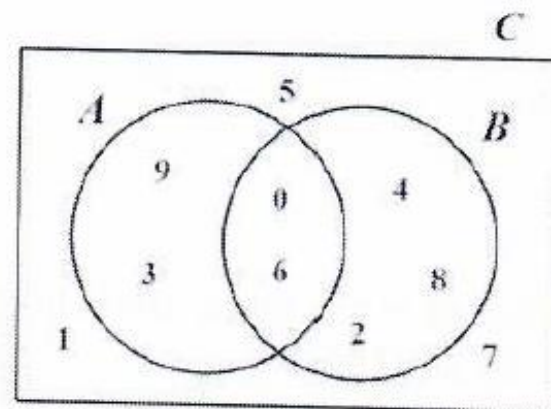
Na slici su prikazana tri skupa iz \mathbb{N}_0 :

A – skup svih jednoznamenkastih višekratnika broja 3.

B – skup svih jednoznamenkastih višekratnika broja 2.

C – skup svih jednoznamenkastih brojeva.

Odredite elemente sljedećih skupova te ih opišite riječima u danom kontekstu :



$$A \setminus B = \{4, 8, 2, 0, 6\}$$

$$B \setminus A = \{9, 3, 0, 6\}$$

$$A = \{9, 3\}$$

$$B = \{4, 8, 2\}$$

$$C = \{\{A\}, \{B\}, 1, 5, 7, 0, 6\}$$

$$A \cup B = \{0, 6\}$$

$$A \cap B = \{\emptyset\}$$

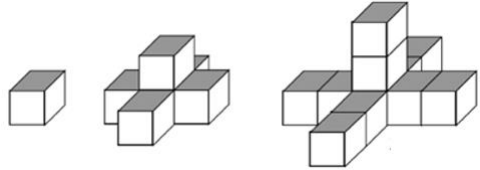
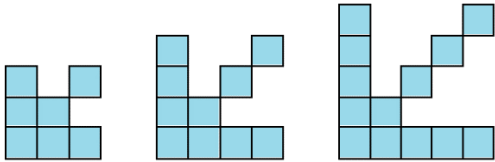
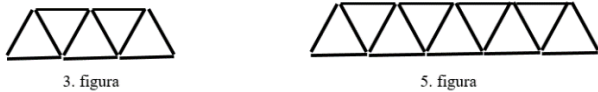
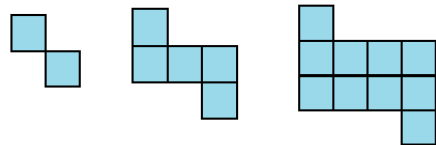
$$(A \cup B)^C \text{ u odnosu na skup } C: \{9, 3, 0, 6, 4, 2, 2\} \quad (A \cap B)^C \text{ u odnosu na skup } C: \{$$

Razvoj algebarskog mišljenja: na primjeru rastućeg (geometrijskog) uzorka



n	K	Pravilo 1	Pravilo 2	Pravilo 3
1	1	1	1	$1 = 1$
2	4	$4 = 1 + 1 \cdot 3$	$4 = 1 + 1 + 1 \cdot 2$	$2 + 2 = 2 + 1 \cdot 2$
3	7	$7 = 1 + 2 \cdot 3$	$7 = 1 + 2 + 2 \cdot 2$	$3 + 4 = 3 + 2 \cdot 2$
4	10	$10 = 1 + 3 \cdot 3$	$10 = 1 + 3 + 3 \cdot 2$	$4 + 6 = 4 + 3 \cdot 2$
5	13	$13 = 1 + 4 \cdot 3$	$13 = 1 + 4 + 4 \cdot 2$	$5 + 8 = 5 + 4 \cdot 2$
...				
10		$28 = 1 + 9 \cdot 3$	$28 = 1 + 9 + 9 \cdot 2$	$28 = 10 + 9 \cdot 2$
n		$1 + (n - 1) \cdot 3$	$1 + (n - 1) + (n - 1) \cdot 2$	$n + (n - 1) \cdot 2$

Rezultati jednog istraživanja u SŠ...

Zad.	Uzorak	Opće pravilo	Uspjeh
1		Broj kocaka: $3n + 4$	4.4% (2 od 45)
2		Broj kvadrata: $5n - 4$	4.8% (2 od 42)
3		Broj štapića: $4n - 1$	29.9% (12 od 43)
4		Broj kvadrata: $n^2 + 1$	2.5% (1 od 40)

Studenti na MA1,
studen 2021:

Zad 2	Opće pravilo	N = 31
Točno	3	9.7%
Netočno	3	9.7%
Rekurzija	3	9.7%
Prazno	22	70.9%

Inicijalno testiranje: Algebra i funkcije 1. dio

Studenti učiteljskog studija upisani na MA1

3. studenog 2021.

sudjelovalo **N = 33**

Razvoj funkcijskog mišljenja prema van Hiele modelu

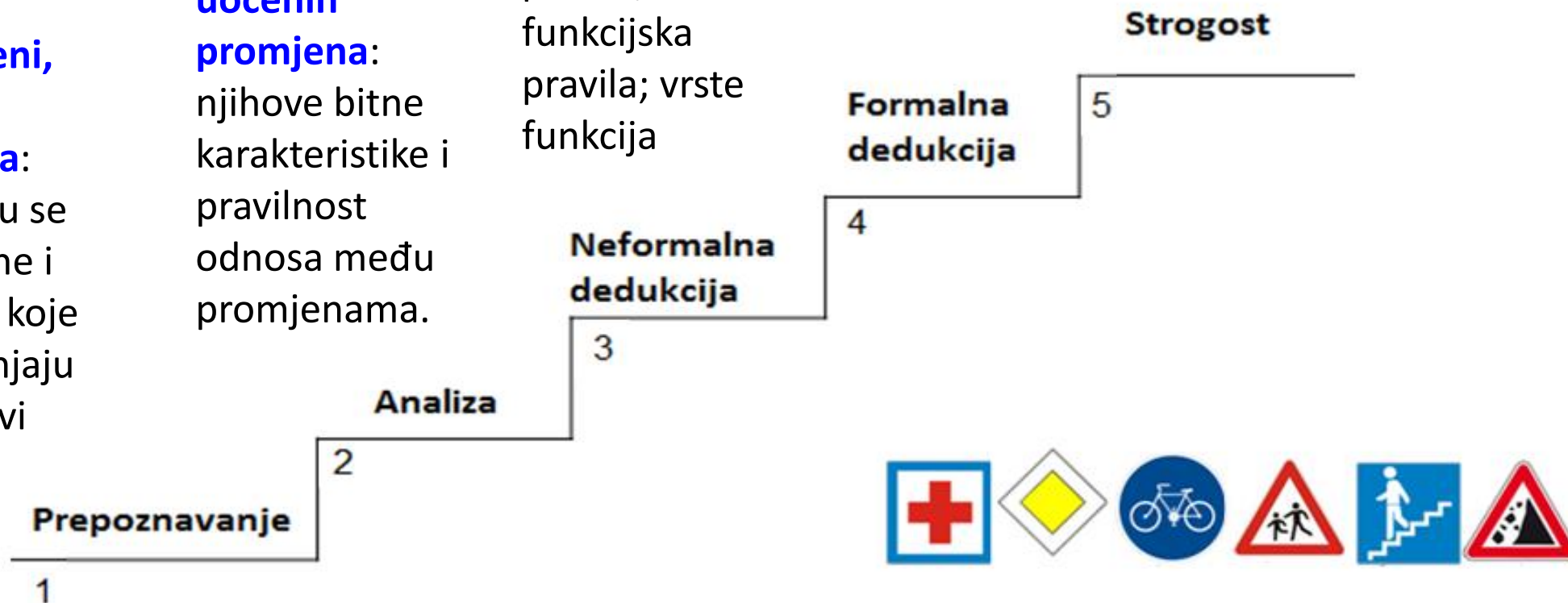
Fenomeni, pojave, objekata:
uočavaju se promjene i veličine koje se mijenjaju te njihovi odnosi.

Analiziraju se svojstva uočenih promjena:
njihove bitne karakteristike i pravilnost odnosa među promjenama.

Uspostavljanje veza: različiti simbolički zapisi, grafički prikazi, funkcijska pravila; vrste funkcija

Svojstava funkcija i druge funkcije:
limesi, derivacije, integrali...

Matematička analiza:
realna, kompleksna

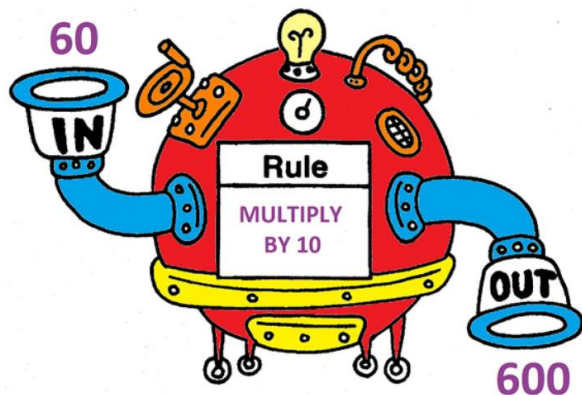


Koncept funkcije

Formalna definicija

(interakcija između elemenata dvaju skupova prema određenom pravilu)

- Funkcija je uređena trojka (X, Y, f)
- X i Y su neprazni skupovi
- f je pravilo po kojem se **svakom elementu x** iz X pridružuje **točno jedan y** iz Y .
- Nezavisne** veličine x
- Zavisne** veličine $y = f(x)$



Na **što se sve** formalna definicija **odnosi** (svi različiti načini interpretiranja i primjene)

- Skupovi X i Y : sve vrste promjenjivih objekata ili pojava
- Pravilo f : veze između promjenjivih objekata ili između pojava; procesi (pravila, obrasci, zakoni) kojima se određeni objekt ili pojava transformira u drugi objekt ili pojavu.

Slika koncepta

(svi vizualni prikazi, umne slike, svojstva, veze ...koje osoba stječe kroz iskustvo, stavove, uvjerenja, obrasce mišljenja itd. te veže uz određeni koncept)

Primjer: Regulacija prometa na cesti (**Pojava**)

Uočavanje objekata:

- ❖ Različiti znakovi
- ❖ Znakovi su različitih oblika: okrugli, trokutasti...
- ❖ Na znakovima se koriste različite boje: plava, crvena...

Uočavanje veza:

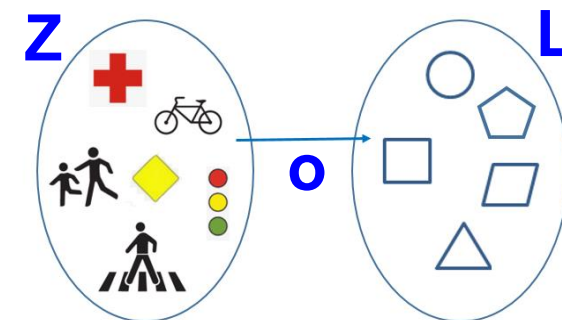
- ❖ okruglo znači **naredbu**,
- ❖ trokutasto znači upozorenje na neku **opasnost**,
- ❖ pravokutno znači **obavijesti** itd.

Uočavanje pravilnosti:

- ❖ **Svaki prometni znak** oblikovan je **samo jednim likom** s točno određenom ulogom: obavijest, naredba/zabrana ili opasnost...
- ❖ Različiti prometni znakovi mogu biti istog oblika (sve obavijesti su pravokutnog oblika)
- ❖ Postoje geometrijski oblici koji se ne koriste za prometne znakove (npr. romb, peterokut itd.).



Pridruživanje je **funkcija** iz skupa znakova u skup oblika.



Simbolički zapis:

- ❖ skup svih prometnih znakova - **Z**
- ❖ skup svih geometrijskih oblika - **L**
- ❖ funkcija oblikovanja - **o**.

$$o: Z \rightarrow L$$

$$o(\text{znak}) = \text{lik}$$

Proces rješavanja problema



(1) Razumijevanje problema



(2) Stvaranje plana rješavanja



(4) Osvrt



(3) Realizacija plana

Proces rješavanja nije linearan.
Potrebna je stalna izmjena faza.

Naši učenici najčešće provode plan koji nemaju i ne zamaraju su dobivenim ishodom.

Prema knjizi: *Kako ću riješiti matematički zadatak?*

G. Polya, 1966.

Zadatak 1. Odredite broj kojemu je trostruka vrijednost umanjena za 5 jednaka polovini vrijednosti broja uvećanog za 20.

Faza razumijevanja:

Broj kojeg treba odrediti označimo s a .

Trostruka vrijednost broja
umanjena za 5:

$$3a - 5$$

Polovina vrijednosti
broja uvećanog za 20:

$$\frac{1}{2}(a + 20) \quad \text{ili} \quad \frac{a + 20}{2}$$

Faza planiranja: Na temelju opisanog postavljamo jednakost: $3a - 5 = \frac{1}{2}(a + 20)$

Izvršavanje plana:

$$3a - 5 = \frac{1}{2}(a + 20) \quad / \cdot 2$$

$$6a - 10 = a + 20$$

$$6a - a = 20 + 10$$

$$5a = 30 \quad / : 5$$

$$a = 6$$

Osvrt: Traženi broj je broj 6.

Njegova trostruka vrijednost je 18. Ta vrijednost umanjena za 5 je 13.

Broj uvećan za 20 je 26. Polovina te vrijednosti 13.

Jednakost je ispunjena.

Odredite broj kojemu je trostruka vrijednost umanjena za 5 jednaka polovini vrijednosti broja uvećanog za 20.

$$3x - 5 = \frac{x}{2} + 20 \quad | \cdot 2$$
$$6x - 10 = x + 20$$
$$5x = 30$$
$$x = 6$$

$$3x - 5 = \frac{x}{2} + 20 \quad | \cdot 2$$
$$6x - 10 = x + 40$$
$$5x = 30 \quad | : 5$$
$$x = 6$$

$$3x - 5 = \frac{x}{2} + 20 \quad | \cdot 2$$
$$6x - 10 = x + 20$$
$$6x - x = 10 + 20$$
$$5x = 30$$
$$x = 6$$

Kroz **pogrešan proces**
do točnog rješenja.

Odredite broj kojemu je trostruka vrijednost umanjena za 5 jednaka polovini vrijednosti broja uvećanog za 20.

$$\begin{aligned} X=? \\ 3x-5 &= \frac{1x+20}{2} \cdot 2 \\ 2(3x-5) &= x+40 \\ 6x-10 &= x+40 \\ 6x-x &= 40+10 \\ 5x &= 50 \quad /:5 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Provjera: $3 \cdot 10 - 5 = \frac{1 \cdot 10 + 20}{2}$

$$\begin{aligned} 30 - 5 &= 5 + 20 \\ 25 &= 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x-5 &= \frac{x}{2} + 20 \quad / \cdot 2 \\ 6x-10 &= x+40 \\ 6x-x &= 40+10 \\ 5x &= 50 \quad /:5 \\ \underline{x} &= \underline{10} \end{aligned}$$

Korektan proces rješavanja jednadžbe (rješenje potvrđeno i provjerom), ali **jednadžba ne odgovara** uvjetima zadatka.

Odredite broj kojemu je trostruka vrijednost umanjena za 5 jednaka polovini vrijednosti broja uvećanog za 20.

$$\begin{aligned}3 \cdot x - 5 &= \frac{x}{2} + 20 \quad | \cdot 2 \\6x - 10 &= x + 40 \\5x &= 50 \\x &= 10 \quad //\end{aligned}$$

Kroz **pogrešan proces** do tačnog rješenja postavljene jednađbe.

$$\begin{aligned}3x - 5 &= 0.5x + 20 \\3x - 0.5x &= 20 + 5 \\2.5x &= 25 \quad | : 2.5 \\x &= 10\end{aligned}$$

Kroz vješti računanje decimalnim brojevima do tačnog rješenja postavljene jednađbe.

Zadatak 2. Sin ima 4, a otac 32 godine. Koliko će godina imati sin kada otac bude od njega stariji 3 puta?

Godine sina	Godine oca	Odnos
4	32	$32 = 8 \cdot 4$
5	33	
6	34	
7	35	$35 = 5 \cdot 7$
8	36	
9	37	
10	38	
11	39	
12	40	
13	41	
14	42	$42 = 3 \cdot 14$

Metoda tablice

- ❖ Tablica je pregledna, sistematična
- ❖ Može se pratiti proces rasta, proučavati odnos
- ❖ Može se odrediti i broj godina unutar kojeg se mijenja odnos
- ❖ ...

Rezultati studenata		
Rad	N = 31	%
Korektan proces	15	48,39%
Korektno rješenje	18	58,06%
Radi osvrt	2	6,45%
Nema rješenje	10	32,26%

Proces kod nekih nedovršen. **Većina koristi jednadžbe!**

Nitko ne koristi tablicu.

Samo jedan student koristi sustavan popis.

Zadatak se pokazao kao **dobra podloga za raspravu o različitim strategijama rješavanja.**

Sin ima 4, a otac 32 godine. Koliko će godina imati sin kada otac bude od njega stariji 3 puta?

The image shows a handwritten solution on grid paper. It consists of two columns of calculations. The first column is labeled 'SIN' and the second 'OTAC'. The calculations show the age of the son and father at each year from 1 to 10. At the end, the son's age is multiplied by 3, and the result is compared to the father's age at that time to find the solution.

SIN	OTAC
4 + 1 = 5	32 + 1 = 33
4 + 2 = 6	32 + 2 = 34
4 + 3 = 7	32 + 3 = 35
4 + 4 = 8	32 + 4 = 36
4 + 5 = 9	32 + 5 = 37
4 + 6 = 10	32 + 6 = 38
4 + 7 = 11	32 + 7 = 39
4 + 8 = 12	32 + 8 = 40
4 + 9 = 13	32 + 9 = 41
4 + 10 = 14	32 + 10 = 42

Handwritten note: Sin će imati 14 godina

Handwritten calculation: $14 \times 3 = 42$

Metoda listi

- ❖ Ispisivanje postupnog zbrajanja
- ❖ Prikladna u slučaju manjeg broja zbrajanja.

Sin ima 4, a otac 32 godine. Koliko će godina imati sin kada otac bude od njega stariji 3 puta?

SIN	OTAC
4 + 1 = 5	32 + 1 = 33
4 + 2 = 6	32 + 2 = 34
4 + 3 = 7	32 + 3 = 35
4 + 4 = 8	32 + 4 = 36
4 + 5 = 9	32 + 5 = 37
4 + 6 = 10	32 + 6 = 38
4 + 7 = 11	32 + 7 = 39
4 + 8 = 12	32 + 8 = 40
4 + 9 = 13	32 + 9 = 41
4 + 10 = 14	32 + 10 = 42

Sin će imati 14 godina.
14 godina

Samo korektno rješenje bez procesa.

sin 4
otac 32
3puta stariji
 $sin = 14 \cdot 3 = 42$
otac = 42
sin će imati 14 g

Provjera ili proces?

Metoda listi

- ❖ Ispisivanje postupnog zbrajanja
- ❖ Prikladna u slučaju manjeg broja zbrajanja.

Sin ima 4, a otac 32 godine. Koliko će godina imati sin kada otac bude od njega stariji 3 puta?

Razlika u
godinama

The image shows handwritten work on grid paper. It starts with the given information: $sin = 4 = y$ and $otac = 32 = x$. A green box highlights the calculation $32 - 4 = 28$. To the right, it asks $y = ?$ and sets up the equation $y = x \cdot 3$. A red box highlights the incorrect calculation $x = 32 \cdot 3$. Below this, another box shows $x = 96$ labeled 'otac'. Finally, it calculates $y = 96 - 28$ and boxes the result $y = 68$ labeled 'sin'.

Što znači
 $32 \cdot 3$?

Vrlo **konfuzan proces**:

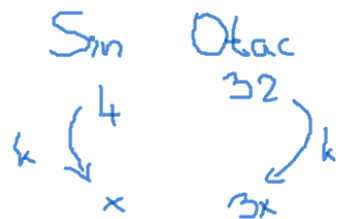
- Nekorektno korištenje znaka jednakosti (=)
- Nekorektno postavljen odnos između y i x
- Nekorektno računanje godina oca

Sin ima 4, a otac 32 godine. Koliko će godina imati sin kada otac bude od njega stariji 3 puta?

$$\begin{aligned}
 4 + 32 &= x + 3x \\
 -4x &= -36 \quad | \cdot (-1) \\
 4x &= 36 \quad | : 4 \\
 x &= 9
 \end{aligned}$$

**Nekorektno postavljena
jednakost**

Proces korektan



$$\begin{aligned}
 4 + 32 + 2k &= x + 3x \\
 36 + 2k &= 4x \\
 36 + 2x - 8 &= 4x \\
 28 &= 2x \\
 x &= 14
 \end{aligned}$$

$k = x - 4$

Diagram illustrating the relationship between the son's age (Sin) and the father's age (Otac) over time k . The son's age starts at 4 and increases to x . The father's age starts at 32 and increases to $3x$. The time k is indicated by arrows pointing from the initial ages to the final ages.

$$\begin{aligned}
 4 + k &= x & 32 + k &= 3x \\
 k &= x - 4 & k &= 3x - 32 \\
 x - 4 &= 3x - 32 \\
 28 &= 2x \\
 x &= 14
 \end{aligned}$$

Sin ima 4, a otac 32 godine. Koliko će godina imati sin kada otac bude od njega stariji 3 puta?

$$\begin{aligned}32 + x &= 3(4 + x) \\32 + x &= 12 + 3x \\-3x + x &= -32 + 12 \\-2x &= -20 / (-2) \\x &= 10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}② \quad \text{SIN} \\ \frac{4+x}{-} &= \frac{x+32}{3} \quad | \cdot 3 \\12 + 3x &= x + 32 \\2x &= 20 / :2 \\x &= 10 \\ \hline \text{SIN} &= 14 \text{ godina} \\ \text{OTAC} &= 42 \text{ god}\end{aligned}$$

Jednadžba (jednakost) korektno postavljena, ali nije naznačeno što predstavlja nepoznanica x

$x = 10$ jest rješenje jednadžbe, ali nije odgovor na postavljeno pitanje

Sin ima 4, a otac 32 godine. Koliko će godina imati sin kada otac bude od njega stariji 3 puta?

2.

$$32 : 4 = 8$$

otac = $3 \sin$

~~otac = $\sin + 28$~~

otac = $\sin + 28$ | $\cdot 3$

$$3 \text{ otac} = 3 \sin + 84$$

$$3 \cdot (3 \sin) = 3 \sin + 84$$

$$9 \sin = 3 \sin + 84$$

$$9 \sin - 3 \sin = 84$$

$$6 \sin = 84 \quad | :6$$

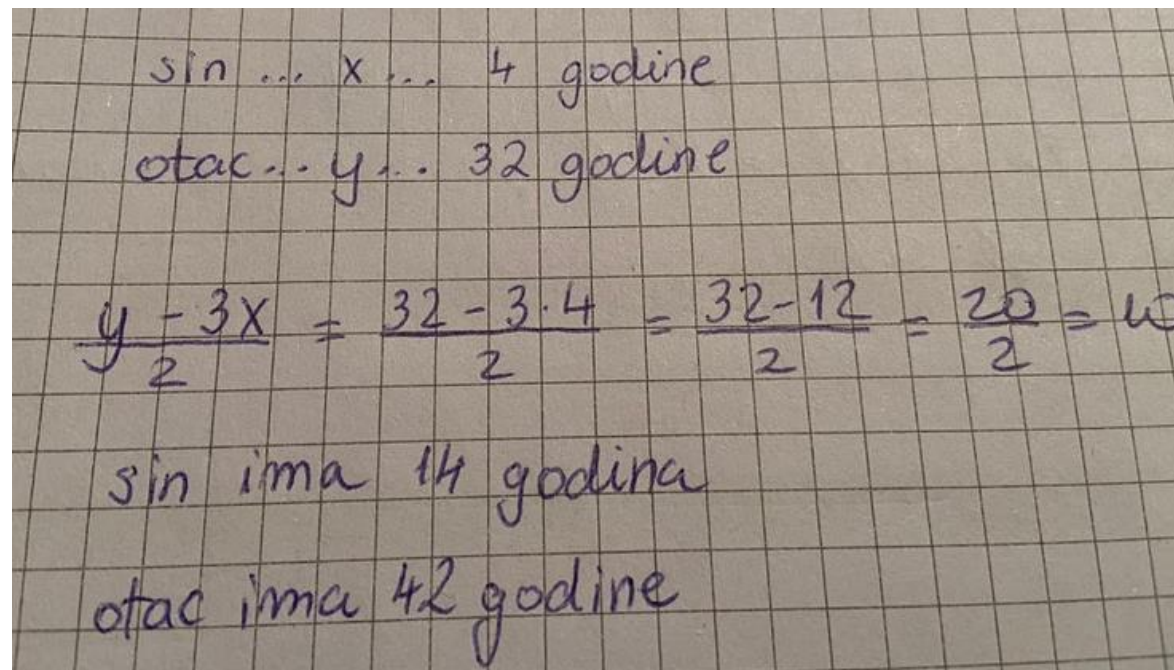
$$\sin = 14$$

$$\text{otac} = 42$$

$$42 - 14 = 28 \checkmark$$

- Korektno je uspostavljen odnos između godina oca i sina ($o = 3s$)
- Korektno je postavljena jednačba koja uključuje razliku u godinama ($o = s + 28$)
- Proces rješavanja je korektan (metoda supstitucije)
- Odgovor na postavljeno pitanje dan je korištenjem nepoznanice u računu
- Izvršena je provjera putem razlike u godinama

Za raspravu...



sin ... x ... 4 godine
otac ... y ... 32 godine

$$\frac{y - 3x}{2} = \frac{32 - 3 \cdot 4}{2} = \frac{32 - 12}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

sin ima 14 godina
otac ima 42 godine

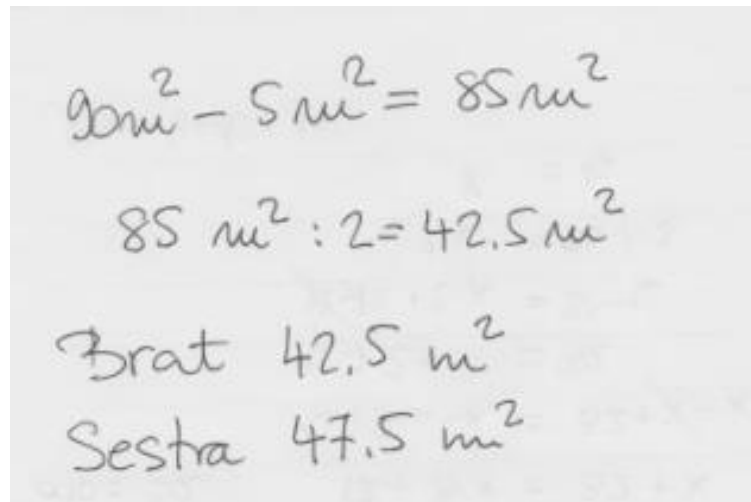
Je li ovaj proces korektan?

Ako je odgovor DA, obrazložiti zašto DA.

Ako je odgovor NE, obrazložiti zašto NE.

Zadatak 3.

Brat i sestra dogovorili su ravnopravnu podjelu kata obiteljske kuće od 90m^2 . Međutim, pregradni nosivi zid na katu ne dijeli prostor na dva jednaka dijela. Svejedno, oni su ipak odlučili da ga neće rušiti jer bi time imali trošak rušenja i zidanja novog zida. Bratu je pripao dio koji je 5m^2 manji od dijela koji je pripao sestri. Kako bi podjela bila pravedna, sestra je bratu ustupila dio zemljišta (200m^2) na drugoj lokaciji. Odredite koliko je kvadratnih metara kuće pripalo bratu, a koliko sestri.



Handwritten solution showing the calculation of the area for each sibling:

$$90\text{m}^2 - 5\text{m}^2 = 85\text{m}^2$$
$$85\text{m}^2 : 2 = 42.5\text{m}^2$$

Brat 42.5m^2
Sestra 47.5m^2

Podjela zemljišta

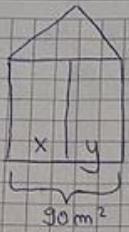
Rezultati studenata		
Rad	N = 31	%
Korektan proces	9	29,03%
Korektno rješenje	11	35,48%
Radi osvrt	7	22,58%
Nema rješenje	14	45,16%

Proces uglavnom djelomično točan ili nedovršen.
Problem s razumijevanjem zadatka

Dodatni uvjeti u zadatku – podloga za raspravu: ne moraju se uvijek koristiti svi podaci za određivanje konačnog rješenja.

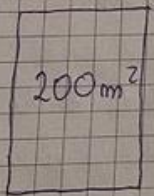
Podjela zemljišta

KUĆA


$$\begin{aligned}x + y &= 90 \text{ m}^2 \\x &= y - 5 \text{ m}^2\end{aligned}$$

$$y = ?$$
$$y - 5 \text{ m}^2 + y = 90 \text{ m}^2$$
$$2y = 90 \text{ m}^2 + 5 \text{ m}^2 \quad /: 2$$
$$y = \frac{95 \text{ m}^2}{2}$$
$$y = 47,5 \text{ m}^2$$
$$47,5 \text{ m}^2 + x = 90 \text{ m}^2$$
$$x = 90 \text{ m}^2 - 47,5 \text{ m}^2$$
$$x = 42,5 \text{ m}^2$$

ZEMLJIŠTE


$$\begin{aligned}x + y &= 200 \text{ m}^2 \\x &= y - 5 \text{ m}^2\end{aligned}$$

$$y = ?$$
$$y - 5 \text{ m}^2 + y = 200 \text{ m}^2$$
$$2y = 205 \text{ m}^2 \quad /: 2$$
$$y = 102,5 \text{ m}^2$$
$$102,5 \text{ m}^2 + x = 200 \text{ m}^2$$
$$x = 200 \text{ m}^2 - 102,5 \text{ m}^2$$
$$x = 97,5 \text{ m}^2$$

BRAT: $102,5 \text{ m}^2 + 47,5 \text{ m}^2 = 145 \text{ m}^2$

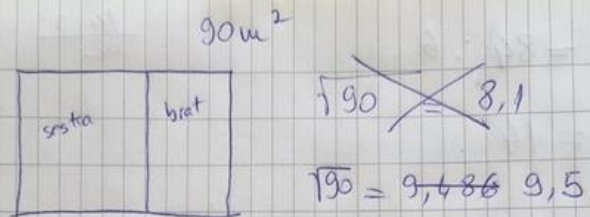
SESTRA: $97,5 \text{ m}^2 + 47,5 \text{ m}^2 = 145 \text{ m}^2$

	KUĆA		ZEMLJA		
BRAT	$42,5 \text{ m}^2$	+	$102,5 \text{ m}^2$	=	145 m^2
SESTRA	$47,5 \text{ m}^2$	+	$97,5 \text{ m}^2$	=	145 m^2

Podjela kvadrata u kući je korektno izvršena, ali i **zemljište se dijeli na dva dijela.**

Podjela zemljišta

5.



90 m^2

$\sqrt{90} \neq 8,1$

$\sqrt{90} = 9,486 \approx 9,5$

$90 \text{ m}^2 : 2 = 45 \text{ m}^2$

$\text{sestra} = 5 \text{ m}^2 + \frac{1}{2} 90 \text{ m}^2$

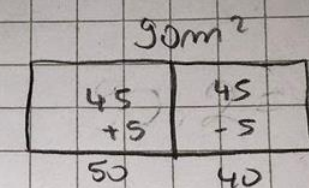
$\text{brat} = \frac{1}{2} 90 \text{ m}^2 - 5 \text{ m}^2$

$\text{sestra} = 5 \text{ m}^2 + 45 \text{ m}^2 = 50 \text{ m}^2$

$\text{brat} = 45 \text{ m}^2 - 5 \text{ m}^2 = 40 \text{ m}^2$

$B + S = 90 \text{ m}^2$

$B = S - 10 \text{ m}^2$



$S - 10 + S = 90$

$2S = 100 : 2$

$S = 50 \text{ m}^2$

$B = 40 \text{ m}^2$

Nekorektna podjela kvadrata u kući - 50 i 40 se ne razlikuju za 5 (što je uvjet u opisanoj situaciji) već za 10.

Podjela zemljišta

$$\begin{array}{r} x + y = 90 \\ x + 5 = y \\ \hline 2x + 5 = 90 \\ 2x = 85 \\ x = 42.5 \text{ cm} \end{array}$$
$$\begin{array}{r} y = x + 5 \\ y = 42.5 + 5 \\ y = 47.5 \text{ cm} \end{array}$$

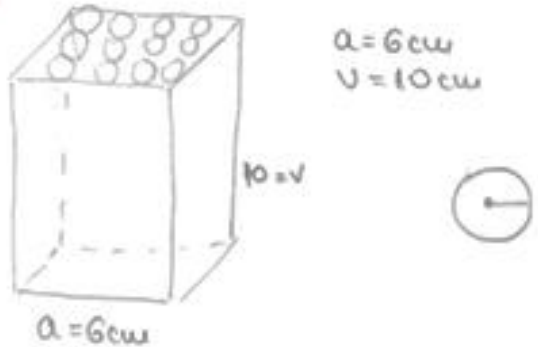
Korektno, ali nedovršeno promišljanje...

- ❖ Na početku istaknuti što koja nepoznanica predstavlja
- ❖ Na kraju treba interpretirati dobiveni rezultat i dati odgovor na postavljeno pitanje.
- ❖ Konačan rezultat, ali i sve zapisano potrebno je provjeriti.

Zadatak 4.

Odredite koliko se željeznih kugli promjera 3cm može najviše zapakirati u kutiju oblika pravilne četverostrane prizme osnovnog brida duljine 6cm i visine 10cm.

Kada bi sve kugle pretopili i oblikovali jednu novu kuglu, bi li nju mogli smjestiti u tu kutiju? Obrazložiti.



$a = 6\text{cm}$
 $v = 10\text{cm}$

$2r_k = 3$
 $r = 1,5\text{cm}$
 $V = \frac{4}{3}r^3\pi$
 $V = \frac{4}{3} \cdot 1,5^3\pi$
 $V = 14,13\text{cm}^3$

$O = 4r^2\pi$
 $O = 4 \cdot 1,5^2\pi$
 $O = 9\pi = 28,26\text{cm}^2$

$d = a\sqrt{2}$
 $d = 6\sqrt{2}$
 $d = 8,48$

$V = a^2 \cdot v$
 $V = 6^2 \cdot 10$
 $V = 360\text{cm}^3$

$O = 2a^2 + 4av$
 $O = 2 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6 \cdot 10$
 $O = 72 + 240$
 $O = 312\text{cm}^2$

$V_d = \frac{V_P}{V_k} = \frac{360}{14,13} = 25,47$

Formulu zna odabrati, proceduru zna provesti, ali nema razumijevanja...

Zaključne misli...

Svatko od nas u svom tijeku vremena treba oslušivati teškoće svojih učenika/studenata, otkrivati njihove moguće uzroke i tražiti prikladna rješenja.

Tome koristi razmjena iskustva jer nikad jedna osoba ne može sveobuhvatno sagledati svu problematiku, posebno što se okolnosti mijenjaju, a time i svi mi.

Svakako, dio odgovornosti ostaje i na učenicima/studentima jer oni sami trebaju brinuti o rezultatima svoga rada.

Hvala na pozornosti :-)

nives@ffst.hr