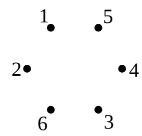
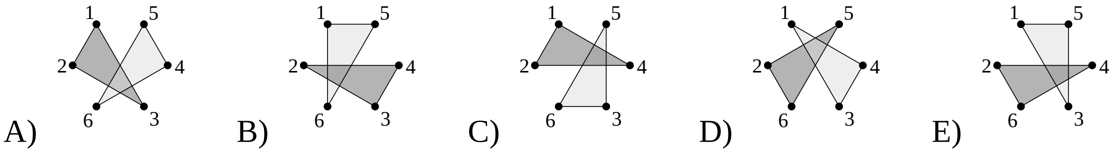
MATEMATIČKI KLOKAN B 2022.

RJEŠENJA ZADATAKA

Pitanja za 3 boda:

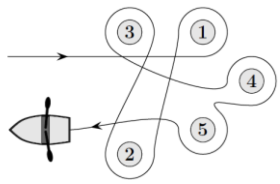


1. Šest točaka označeno je brojevima kao na slici. Jan je nacrtao dva trokuta; jedan spajajući točke označene parnim, a drugi spajajući točke označene neparnim brojevima. Potom je osjenčao te trokute; jedan tamnosivo, a drugi svijetlosivo. Koja od pet mogućnosti predstavlja Janovu sliku?



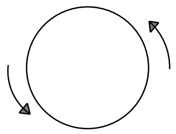
Rješenje: E
Neparni su brojevi 1, 3 i 5, a parni 2, 4 i 6. Spajajući ih na opisani način, dobije se oblik E).

2. Korina je veslala oko pet plutača, kao što je prikazano na slici. Oko kojih je plutača veslala u smjeru obrnutom od smjera kazaljke na satu?

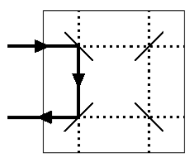


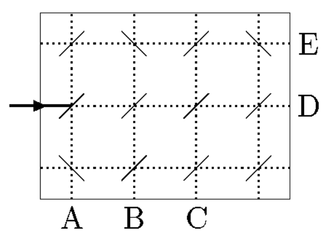
A) 1 i 4 B) 2, 3 i 5 C) 2 i 3 D) 1, 4 i 5 E) 1 i 3

Rješenje: E
Kad vesla oko plutače u smjeru obrnutom od kretanja kazaljke na satu, plutača se nalazi s njezine lijeve strane. To je u slučaju plutače 1 i 3, dakle rješenje je E).



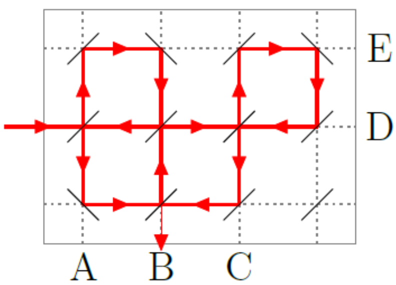
3. Laserske zrake odbijaju se od zrcala na način kako je prikazano na manjoj slici. Na kojem će polju završiti zraka prikazana na većoj slici?



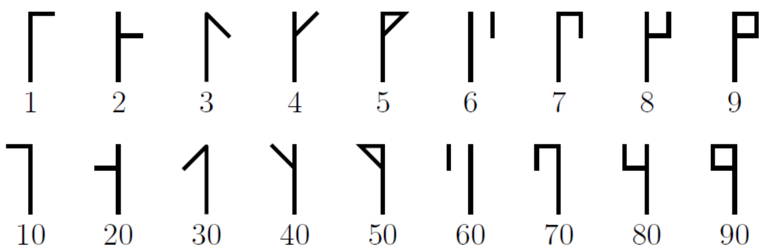


A) A B) B C) C D) D E) E

Rješenje: B
Prikažimo odbijanja laserske zrake od zrcala na danoj slici na način prikazan u zadatku.
Zraka će završiti na polju B.



4. *Cistercitski brojevi* korišteni su početkom 13. stoljeća. Svaki se cijeli broj od 1 do 99 može prikazati jednim simbolom koji je formiran pomoću dva osnovna prikazana simbola.



Simbol za broj 24 izgleda ovako: , za broj 81 ovako: , a za broj 93 ovako: . Kako izgleda simbol za broj 45?

A)  B)  C)  D)  E) 

Rješenje: D

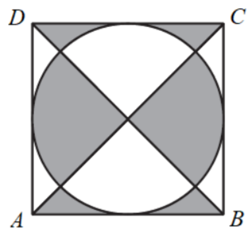
Budući da je 45 = 40 + 5, simbol je spoj simbola za 40 i 5, tj. simbol D) .

5. Pikule se prodaju u paketima od po 5, 10 ili 25 komada. Hrvoje je kupio točno 95 pikula. Koliko je najmanje paketa morao kupiti?

A) 4 B) 5 C) 7 D) 8 E) 10

Rješenje: B

Za najmanji mogući broj paketa potrebno je kupiti što je više moguće paketa s najvećim brojem pikula. Budući da je 95 = 25 + 25 + 25 + 10 + 10, Hrvoje je morao kupiti najmanje 5 paketa pikula.

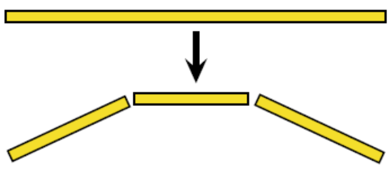


6. Na slici je kvadrat duljina stranica 10 cm. Kolika je površina osjenčanog dijela?

A) 40 cm^2 B) 45 cm^2 C) 50 cm^2 D) 55 cm^2 E) 60 cm^2

Rješenje: C
Ako kvadrat *ABCD* presavijemo po dijagonali, svaki se bijeli dio u potpunosti podudara s jednim osjenčanim dijelom. Dakle, površina osjenčanog dijela jednaka je polovini površine toga kvadrata. Površina kvadrata je 10 cm · 10 cm = 100 cm^2, polovina površine je 50 cm^2, stoga je rješenje C).

7. Mia želi jedan dugačak rezanac smanjiti lomljenjem. Od svakog dijela koji lomi napravi tri dijela kao što pokazuje slika. Koji broj ne može biti ukupan broj dijelova koje je dobila na taj način?



A) 13 B) 17 C) 20 D) 23 E) 25

Rješenje: C
Nakon svakog lomljenja jednog dijela ukupan broj dijelova poveća se za 2. Zato je nemoguće dobiti paran broj dijelova, odnosno ne može dobiti jedino 20 dijelova. Rješenje zadatka je C).

8. Fran je presložio sedam dijelova prikazanih na slici kako bi od njih dobio najmanji mogući dvanaesteroznamenkasti broj. Koje su posljednje tri znamenke toga broja?

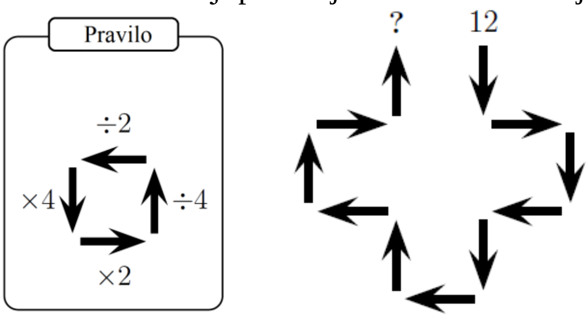
4 69 113 9 51 5 67

A) 699 B) 113 C) 551 D) 967 E) 459

Rješenje: A
Kako bi dobio najmanji mogući broj, uvijek mora uzimati karticu s brojem čija je početna znamenka najmanja moguća. Zato je Fran krenuo od kartice na kojoj je napisan broj 113. Od preostalih kartica na drugo je mjesto stavio karticu s brojem 4. Kako na dvije kartice brojevi počinju znamenkom 5, kombinacijom tih kartica kao manji broj dobije se 515. Na isti se način od kartica na kojima su brojevi s početnom znamenkom 6 kombinacijom tih kartica kao manji broj dobije 67**69**. To znači da je posljednja kartica s brojem **9**, a troznamenkasti je završetak konačnog broja 699.

Pitanja za 4 boda:

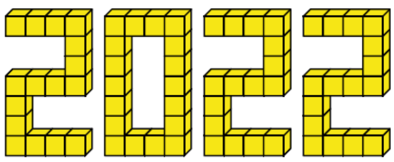
9. Jan je počeo od broja 12 i slijedio strelice poštujući pravilo iskazano na lijevoj slici. Kojim je brojem završio račun koji pokazuju strelice na desnoj slici?



A) 3 B) 6 C) 12 D) 24 E) 48

Rješenje: B
Svaka strelica koja pokazuje prema gore smanjuje vrijednost četverostruko, a koja pokazuje prema dolje povećava vrijednost četverostruko. S obzirom na to da tri strelice pokazuju gore, a tri dolje, vrijednost se neće promijeniti. Svaka strelica koja pokazuje udesno povećava vrijednost dvostruko, a koja pokazuje ulijevo smanjuje vrijednost dvostruko. S obzirom na to da dvije strelice pokazuju udesno, a tri ulijevo, vrijednost će se smanjiti dvostruko.
To znači da će račun završiti dvostruko manjim brojem, tj. brojem 12 : 2 = 6, pa je rješenje B).

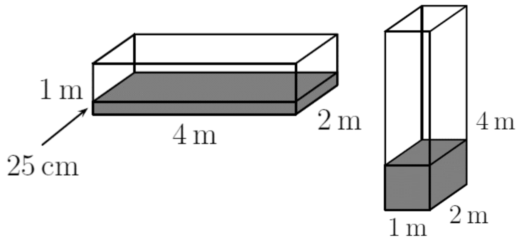
10. Kristijan i njegovi prijatelji složili su broj 2022 pomoću 66 kocaka, kao što je prikazano na slici. Potom su dobiveni objekt obojili žutom bojom. Koliko ima kocaka u tom objektu kojima su točno četiri strane žute?



A) 16 B) 30 C) 46 D) 54 E) 60

Rješenje: E
Svaki dio koji predstavlja broj *dva* ima točno dvije kocke kojima je više od četiri strane obojeno, to su početna i završna u nizu spojenih kocaka. Sve ostale kocke imaju obojene točno četiri strane. U svakom broju *dva* ima ih 14, a kako ima 3 dijela oblika broja *dva*, ukupno ih ima $3 \cdot 14 = 42$.
U dijelu koji predstavlja broj *nula* svim su kockama obojene točno četiri strane, a ima ih 18.
Konačno, ukupan je broj kocaka kojima su točno četiri strane žute $42 + 18 = 60$, pa je rješenje E).

11. Spremnik za vodu pravokutne baze ima dimenzije 4 m x 2 m x 1 m. U spremnik je utočena količina vode koja dopire do visine 25 cm. Potom se spremnik okrene tako da mu je pravokutna baza dimenzija 1 m x 2 m, kao što je prikazano na desnoj slici. Do koje visine dopire voda u tako postavljenom spremniku?

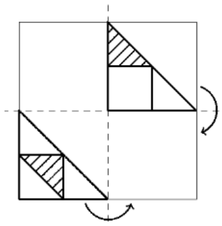


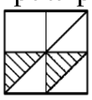
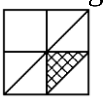
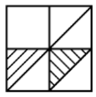
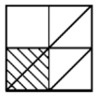
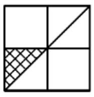
A) 25 cm B) 50 cm C) 75 cm D) 1 m E) 1.25 m

Rješenje: D

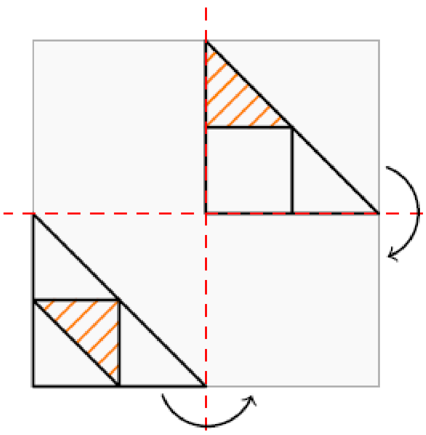
25 cm je $\frac{1}{4}$ od 1 m, pa voda na početku dopire do četvrtine visine spremnika, odnosno zauzima $\frac{1}{4}$ volumena spremnika. Kad se spremnik okrene, voda i dalje zauzima $\frac{1}{4}$ volumena, odnosno dopire do $\frac{1}{4}$ njegove visine. Kako je $\frac{1}{4}$ od 4 m jednako 1 m, rješenje je D).

12. Na komadu prozirnog papira nacrtan je uzorak kao što je prikazano na slici. Potom je papir dva puta presavinut. Kako izgleda presavinuti papir?

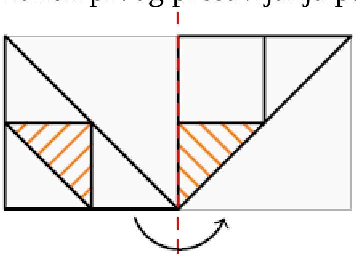


A)  B)  C)  D)  E) 

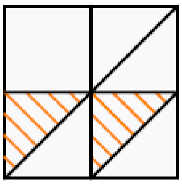
Rješenje: A



Nakon prvog presavijanja papir izgleda ovako:

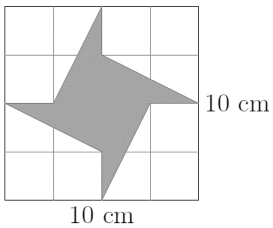


Nakon još jednog presavijanja papir izgleda ovako:



Dakle, rješenje je slika A).

13. Površina kvadrata je 100 cm^2. Kolika je površina osjenčanog dijela istaknutog na tom kvadratu?



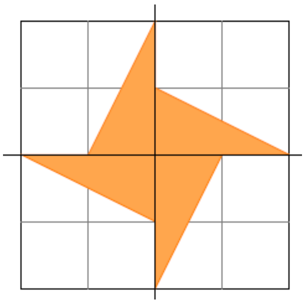
A) 20 cm^2 B) 25 cm^2 C) 30 cm^2 D) 35 cm^2 E) 40 cm^2

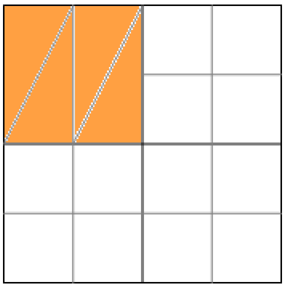
Rješenje: B

Označimo horizontalnu i vertikalnu os simetrije danog kvadrata. Osjenčani dio sastoji se od četiri sukladna pravokutna trokuta čija je površina jednaka četvrtini površine kvadrata.

Budući da je površina kvadrata 100 cm^2, onda je površina osjenčanog dijela $\frac{1}{4}$ od 100 cm^2 = 25 cm^2.

Rješenje je B).





14. Godina 2022. posebna je jer se u njoj znamenka 2 pojavljuje tri puta. To je već treći put u životu kornjače Eve da se u godini pojavljuju točno tri identične znamenke. Koliko najmanje godina ima Eva 2022. godine?

A) 18 B) 20 C) 22 D) 23 E) 134

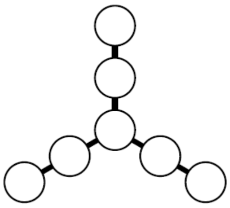
Rješenje: D
Prije 2022. tri identične znamenke pojavljuju se u godini 2000. te u godini 1999. Dakle, Eva ima najmanje 2022 – 1999 = 23 godine.

15. Zita ima četiri psa. Masa svakog psa prirodan je broj izražen u kilogramima. Nikoja dva psa nemaju istu masu, a ukupna im je masa 60 kg. Drugi po težini, računajući od najtežeg psa, ima masu 28 kg. Koliku masu ima treći pas po težini, računajući od najtežeg psa?

A) 2 kg B) 3 kg C) 4 kg D) 5 kg E) 6 kg

Rješenje: A
Najteži pas ne može imati masu veću od 29 kg jer bi za 30 kg najmanja moguća masa svih pasa zajedno bila $30 + 28 + 2 + 1 = 61$ kg > 60 kg. To znači da najteži pas ima masu 29 kg, a preostala dva psa zajedno imaju $60 - 29 - 28 = 3$ kg. S obzirom na to da nikoja dva psa nemaju istu masu, treći po težini ima masu od 2 kg, odnosno rješenje je A).

16. Domagoj upisuje sedam brojeva 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9 u krugove na slici tako da zbroj brojeva upisanih u svaka tri kruga povezana dužinom bude isti. Koji najveći mogući zbroj brojeva na jednoj dužini može dobiti na opisani način?



A) 28 B) 18 C) 22 D) 16 E) 20

Rješenje: E
Najveći mogući zbroj brojeva na jednoj dužini dobije se ako je zajednički pribrojnik za sve tri dužine najveći mogući, a to je broj 9. Kako je zbroj preostalih brojeva $3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 33$, a zbrojevi na te tri dužine moraju biti jednaki, onda je zbroj preostalih dvaju brojeva na svakoj dužini $33 : 3 = 11$. Dakle, najveći mogući zbroj brojeva na jednoj je dužini $9 + 11 = 20$, pa je rješenje E).

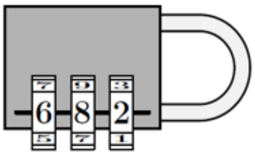
Pitanja za 5 bodova:

17. Kad se jednake čaše slože u vis, jedna u drugu, hrpa od 8 čaša visoka je 42 cm, a hrpa od dvije čaše visoka je 18 cm. Koliko je visoka hrpa od 6 čaša?

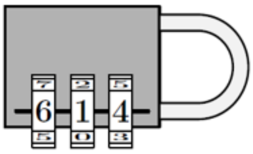
A) 22 cm B) 24 cm C) 28 cm D) 34 cm E) 40 cm
Rješenje: D

Razlika u visinama ovih dviju hrpa je $42 - 18 = 24$ cm, a čini je 6 čaša. To znači da se dodavanjem po jedne čaše na manju hrpu visina poveća za $24 : 6 = 4$ cm. Stoga se dodavanjem 4 čaše na manju hrpu njena visina poveća za $4 \cdot 4 = 16$ cm. Visina hrpe od 6 čaša tako je $18 + 16 = 34$ cm, pa je rješenje D).

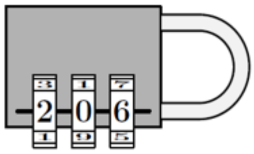
18. Za svaki od lokota navedena je tvrdnja koja pomaže otkrivanju šifre.



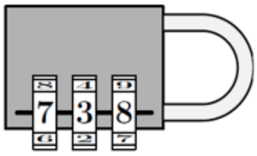
Jedna od znamenaka je točna, ali se nalazi na pogrešnom mjestu.



Dvije su znamenake točne, ali su na pogrešnom mjestu.



Niti jedna znamenka nije točna.

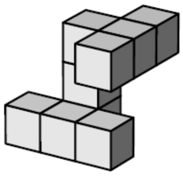


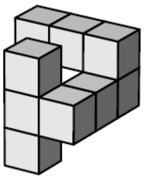
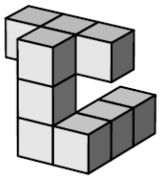
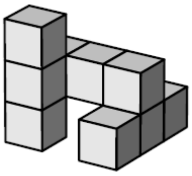
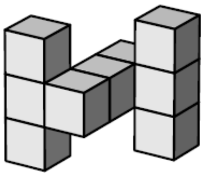
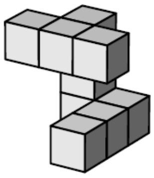
Koja je šifra za otključavanje lokota?

A) 604 B) 082 C) 640 D) 042 E) 064

Rješenje: D
Promotrimo znamenke na 4. lokotu. Kako niti jedna od znamenaka nije točna, zaključujemo da su moguće znamenke lokota {0, 1, 2, 4, 5, 6, 9}.
Promotrimo znamenke na prvom i drugom lokotu.
Kako se znamenka 6 pojavljuje na obje šifre na prvom mjestu, zaključujemo da 6 nije znamenka šifre.
Dakle, iz 1. lokota zaključujemo da je jedna od znamenaka šifre 2 i nalazi se na zadnjem mjestu.
Promotrimo znamenke na trećem lokotu.
Kako su dvije znamenke točne, zaključujemo da su to 0 i 2 jer 6 ne može biti znamenka lokota. Kako je znamenka 2 na trećem mjestu, jedina je mogućnost da je 0 na prvome mjestu.
Preostaje odrediti drugu znamenku šifre.
Promotrimo znamenke na drugom lokotu. Znamenku 6 već smo eliminirali. Dakle, točna je ili znamenka 1 ili znamenka 4. No znamenka 1 ne može biti točna jer se na ovom lokotu točna znamenka nalazi na pogrešnome mjestu. Dakle, točna je znamenka 4 i nalazi se na drugome mjestu.
Konačno, šifra koja otključava lokot je 042, pa je rješenje D).

19. Matija ima figuru prikazanu na slici desno. Koja je od sljedećih figura jednaka Matijinoj?



A)  B)  C)  D)  E) 

Rješenje: C
Uočimo da se svaka od figura sastoji od tri *tornja*. Jedan od tornjeva Matijine figure povezuje preostala dva i spaja se svojim krajnjim dijelom na sredini svakoga od njih. Time smo eliminirali figure A), B) i E). No figura D) složena je tako da se dva tornja spajaju s preostalima na njegovim nasuprotnim stranama, a na Matijinoj figuri ti su spojevi na susjednim stranama tornja kojim su povezani. Tako je složena samo figura C).

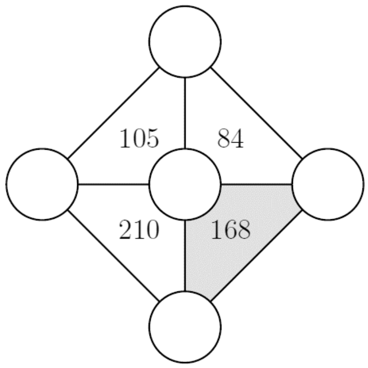
20. Petar je odabrao četiri od pet brojeva 2, 3, 4, 5 i 6 te je u svaku *kućicu* upisao jedan broj tako da je dobio točan račun. Koliko je brojeva, od ponuđenih pet, mogao upisati u osjenčanu *kućicu*?

$$\square + \square - \square = \square$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Rješenje: E

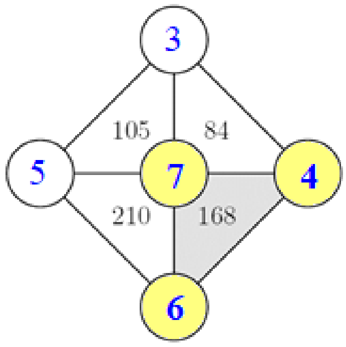
Pokažimo primjerima kako je Petar mogao u osjenčanu *kućicu* upisati bilo koji od pet ponuđenih brojeva.
3 + 5 – 6 = 2
2 + 6 – 5 = 3
2 + 5 – 3 = 4
2 + 6 – 3 = 5
3 + 5 – 2 = 6
Dakle, rješenje je E).



21. Brojeve 3, 4, 5, 6 i 7 treba smjestiti u pet krugova na slici tako da broj unutar svakog od trokuta bude umnožak brojeva upisanih u krugove na vrhovima toga trokuta. Koliki je zbroj brojeva upisan u krugove na vrhovima osjenčanog trokuta?

A) 12 B) 14 C) 15 D) 17 E) 18

Rješenje: D

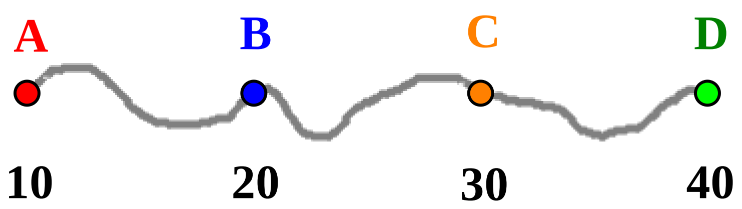


Uočimo da je svaki od umnožaka djeljiv sa 7 pa u zajednički krug treba upisati broj 7. S obzirom na to da su umnošci 105 i 210 djeljivi s 5, u krug lijevo od 7 treba upisati 5. To znači da je u krugu iznad 7 broj 105 : (5 · 7) = 105 : 35 = 3, a u krugu ispod 7 je broj 210 : (5 · 7) = 210 : 35 = 6. Preostaje broj 4 i njega treba upisati u krug desno od 7. To znači da je traženi zbroj 7 + 6 + 4 = 17, odnosno rješenje je D).

22. Četiri sela, A, B, C i D, nalaze se uz cestu u tom poretku. Udaljenost susjednih sela je 10 km. U selu A živi 10, u selu B 20, u selu C 30, a u selu D 40 učenika. Mještani žele izgraditi školu tako da ukupna udaljenost koju prijeđu svi učenici zajedno do mjesta škole bude najmanja moguća. U kojem selu treba izgraditi školu?

A) u A B) u B C) na sredini između B i C D) u C E) u D

Rješenje: D



Ako izgrade školu u mjestu A, ukupna udaljenost koju će prijeći svi učenici do mjesta škole bit će
10 · 0 + 20 · 10 + 30 · 20 + 40 · 30 = 200 + 600 + 1200 = 2000 km.

Ako izgrade školu u mjestu B, ukupna udaljenost koju će prijeći svi učenici do mjesta škole bit će
10 · 10 + 20 · 0 + 30 · 10 + 40 · 20 = 100 + 300 + 800 = 1200 km.

Ako izgrade školu na sredini između B i C, ukupna udaljenost koju će prijeći svi učenici do mjesta škole bit će
10 · 15 + 20 · 5 + 30 · 5 + 40 · 15 = 50 · 15 + 50 · 5 = 50 · 20 = 1000 km.

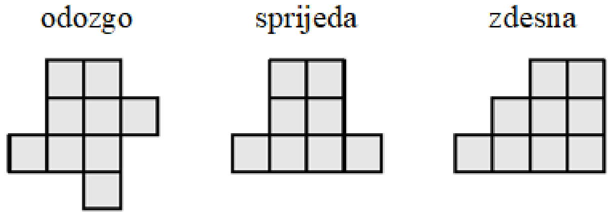
Ako izgrade školu u mjestu C, ukupna udaljenost koju će prijeći svi učenici do mjesta škole bit će
10 · 20 + 20 · 10 + 30 · 0 + 40 · 10 = 200 + 200 + 400 = **800 km.**

Ako izgrade školu u mjestu D, ukupna udaljenost koju će prijeći svi učenici do mjesta škole bit će

$10 \cdot 30 + 20 \cdot 20 + 30 \cdot 10 + 40 \cdot 0 = 300 + 400 + 300 = 1000$ km.

Školu trebaju izgraditi u mjestu C, pa je rješenje D).

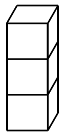
23. Tri slike prikazuju poglede odozgo, sprijeda i zdesna na objekt izgrađen od kocaka. Koliki je najveći mogući broj kocaka upotrijebljen za izgradnju tog objekta?



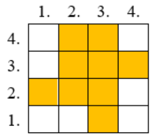
A) 18 B) 19 C) 20 D) 21 E) 22

Rješenje: B

Slaganjem kocaka jednu na drugu dobijemo *tornjeve* kao na slici.



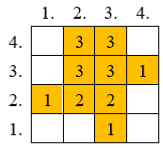
Kocke su složene u tornjeve koji su poslagani na mrežu od 4 reda i 4 stupca. Označimo ih na način prikazan na slici desno u skladu s pogledom odozgo.



Pogledi sprijeda i zdesna daju nam informaciju o visini najvišeg *tornja* u svakom stupcu odnosno retku.

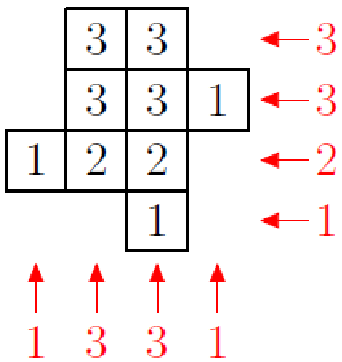
Analizom pogleda sprijeda zaključujemo da se u prvom stupcu nalazi jedan *toranj* visine 1, da je najviši *toranj* u drugom i trećem stupcu visine 3 i da se u četvrtom stupcu nalazi jedan *toranj* visine 1.
Analizom pogleda zdesna zaključujemo da se u prvom retku nalazi jedan *toranj* visine 1, da je u drugom retku najviši *toranj* visine 2, a u trećem i četvrtom najviši je *toranj* visine 3.

To znači da je najveći mogući broj kocaka na svakom od tornjeva prikazan na slici:



Najveći mogući broj tornjeva je $3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 3 + 4 + 12 = 19$.
Odgovor B).

Napomena: Najviši mogući broj kocaka na svakom od tornjeva može se prikazati i ovako:



24. Oko okruglog stola sjedi 30 osoba. Neke od njih nose šešir. One osobe koje nose šešir uvijek govore istinu, dok osobe koje ne nose šešir ponekad lažu, a ponekad govore istinu. Svaka osoba kaže: „Najmanje jedna od meni susjednih osoba ne nosi šešir.“ Koji je najveći mogući broj osoba za tim stolom koje nose šešir?

A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 25

Rješenje: D
Označimo:
N – osoba ne nosi šešir
Š – osoba nosi šešir
Promotrimo bilo koje tri osobe koje sjede jedna pored druge i osobu u sredini.
Ako osoba u sredini nosi šešir, ona govori istinu, pa vrijedi da najmanje jedna osoba pored nje ne nosi šešir. Tada imamo dvije mogućnosti: NŠN i NŠŠ.
Ako osoba u sredini ne nosi šešir, ponekad govori istinu, a ponekad ne.
Kad govori istinu, vrijedi da najmanje jedna osoba pored nje ne nosi šešir. Tada imamo dvije mogućnosti: NNN i NNŠ.
Kad ta osoba laže, ne vrijedi izjava da najmanje jedna osoba pored nje ne nosi šešir, odnosno vrijedi da obje osobe pored nje nose šešir. Tada imamo mogućnost ŠNŠ.
Dakle, za bilo koje tri osobe koje sjede jedna pored druge imamo sljedeće mogućnosti:
NŠN, NŠŠ, NNN, NNŠ, ŠNŠ.
To znači da za bilo koje tri osobe koje sjede jedna pored druge možemo tvrditi da najmanje jedna od njih ne nosi šešir. Stoga među 30 osoba koje sjede u krug imamo najmanje 10 osoba koje ne nose šešir, pa je među 30 osoba najviše 20 onih koje nose šešir. Odgovor je D).