OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – rješenja

29. siječnja 2009.

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Imamo redom

$$\begin{aligned} 287 \cdot 70 + 2009 - 10 \cdot (2205 - 2025 : 15 - 61) &= 287 \cdot 70 + 2009 - 10 \cdot (2205 - 135 - 61) && \text{3BODA} \\ &= 20090 + 2009 - 10 \cdot (2070 - 61) && \text{3BODA} \\ &= 2009 \cdot 10 + 2009 - 10 \cdot 2009 && \text{3BODA} \\ &= 2009. && \text{1BOD} \end{aligned}$$

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

2. Nakon što je Frane prodao 8 kg, Ante 25 kg, Mate 36 kg i Jure 45 kg ribe,
ostalo je $382 - (8 + 25 + 36 + 45) = 382 - 114 = 268$ kg ribe. 3 BODA
Prema tome, svakom ribaru je tada ostalo po $268 : 4 = 67$ kg ribe. 3 BODA
Dakle, Frane je ulovio $67 + 8 = 75$, Ante $67 + 25 = 92$, Mate $67 + 36 = 103$ i
Jure $67 + 45 = 112$ kilograma ribe. 4 BODA
. . . . UKUPNO 10 BODOVA

3. Prebrojimo dužine na svakom od četiriju polupravaca:
$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ 2 BODA
$\overline{AF}$, $\overline{FD}$, $\overline{AD}$ 2 BODA
$\overline{EF}$, $\overline{FB}$, $\overline{EB}$ 2 BODA
$\overline{ED}$, $\overline{DC}$, $\overline{EC}$ 2 BODA
Dakle, ukupno ima 12 dužina. 2 BODA
. . . . UKUPNO 10 BODOVA

4. Ukupna vrijednost kovanica od 50 lipa iznosi $32 \cdot 50 = 1600$ lipa $= 16$ kuna. 1 BOD
Preostalo je $62 - 32 = 30$ kovanica od 2 kune i 5 kuna čija je ukupna vrijednost $100 - 16 = 84$ kune. 1 BOD
Očito je ukupna vrijednost kovanica od 2 kune paran broj. Nadalje, kako je ukupna vrijednost kovanica od 2 kune i 5 kuna paran broj (84), slijedi da je i ukupna vrijednost kovanica od 5 kuna paran broj. Zbog toga imamo paran broj kovanica od 5 kuna. 2 BODA
Stoga imamo sljedeću tablicu:

5 kuna	2 kune	vrijednost
2	28	$2 \cdot 5 + 28 \cdot 2 = 66$
4	26	$4 \cdot 5 + 26 \cdot 2 = 72$
6	24	$6 \cdot 5 + 24 \cdot 2 = 78$
8	22	$8 \cdot 5 + 22 \cdot 2 = 84$
10	20	$10 \cdot 5 + 20 \cdot 2 = 90$
...	...	...

Iz tablice vidimo da je u kasici–prasici bilo 8 kovanica od 5 kuna i 22 kovanice po 2 kune. 6 BODOVA
. . . . UKUPNO 10 BODOVA

5. Prema uvjetu zadatka, umnožak znamenki broja je 13, 14 ili 15. Kako se broj 13 ne može prikazati kao umnožak dvaju ili više jednoznamenkastih brojeva, zaključujemo da ne postoje četveroznamenkasti brojevi čiji je umnožak znamenki jednak 13. 1 BOD
Nadalje, $14 = 2 \cdot 7 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 7$, pa četveroznamenkasti brojevi čiji je umnožak znamenki 14 imaju dvije znamenke 1 te po jednu znamenku 2 i 7. To su brojevi:
7211, 7121, 7112, 2711, 1721, 1712, 2171, 1271, 1172, 2117, 1217, 1127. Ima ih 12. 4 BODA
Slično, $15 = 3 \cdot 5 = 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5$, pa četveroznamenkasti brojevi čiji je umnožak znamenki

15 imaju dvije znamenke 1 te po jednu znamenku 3 i 5. To su brojevi:
5311, 5131, 5113, 3511, 1531, 1513, 3151, 1351, 1153, 3115,1315, 1135. Ima ih 12. 4 BODA
Dakle, četveroznamenkastih brojeva koji zadovoljavaju uvjet zadatka ima 24. 1 BOD
. . . . UKUPNO 10 BODOVA

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

5. razred – rješenja

29. siječnja 2009.

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Poštujući redoslijed računskih operacija, te primjenom pravila distributivnosti, dobivamo:

$$\begin{aligned} & 48536 - 536 : 4 - (473 \cdot 117 - 117 \cdot 73) + 11 \cdot (37 - 0) \\ = \; & 48536 - 134 - 117 \cdot (473 - 73) + 11 \cdot 37 \end{aligned}$$

4 BODA

Dalje, lagano računamo:

$$\begin{aligned} & 48536 - 134 - 117 \cdot (473 - 73) + 11 \cdot 37 \\ = \; & 48402 - 117 \cdot 400 + 407 \\ = \; & 48402 - 46800 + 407 \\ = \; & 2009. \end{aligned}$$

6 BODOVA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

2. Kako je $999 : 7 = 142$ i ostatak 5, zaključujemo da ima 142 broja manja od 1000 koji su djeljivi sa 7. 2 BODA
Kako je $999 : 11 = 90$ i ostatak 9, zaključujemo da ima 90 brojeva manjih od 1000 koji su djeljivi s 11. 2 BODA
Dakle, trebamo od 999 oduzeti broj brojeva koji su djeljivi sa 7 i s 11. Međutim, među brojevima djeljivim sa 7 ima onih koji su djeljivi s 11 i obrnuto, među brojevima djeljivim s 11 ima onih koji su djeljivi sa 7. U oba slučaja to su brojevi koji su djeljivi sa $11 \cdot 7 = 77$. 1 BOD
Kako je $999 : 77 = 12$ i ostatak 75, zaključujemo da ima 12 brojeva manjih od 1000 koji su djeljivi sa 77. 2 BODA
Dakle, broj traženih brojeva jednak je $999 - 142 - 90 + 12 = 779$, zato jer smo brojeve djeljive sa 77 dvaput oduzeli, pa smo ih jednom morali dodati. 3 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

3. Zadatak rješavamo grafički:

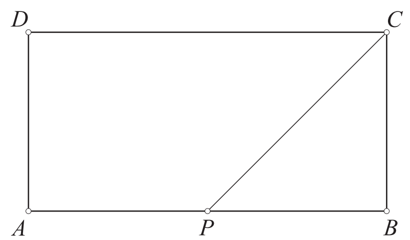
prvi broj	$\bigcirc\bigcirc$
drugi broj	$\bigcirc - 2$
treći broj	$\bigcirc$
četvrti broj	$\bigcirc + 6$

4 BODA

Označimo li $\bigcirc$ sa x slijedi da je $5x + 4 = 2009$, odakle je $5x = 2005$, pa je $x = 2005 : 5 = 401$. 2BODA
Konačno, prvi broj je jednak $2 \cdot 401 = 802$, drugi $401 - 2 = 399$, treći 401, te četvrti $401 + 6 = 407$. 4 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

4.



1 BOD

Ako je $|BC| = b$, onda je $|AP| = |PB| = |AD| = b$ i $|DC| = 2b$.
Zato je opseg četverokuta $APCD$ jednak $b + b + 2b + |PC|$, a opseg trokuta PBC je $b + b + |PC|$. 3 BODA

Prema uvjetu zadatka, opsezi se razlikuju za 20 cm, pa je $2b = 20$, tj. $b = 10$ cm. 3 BODA
Kako je duljina jednaka dvostrukoj širini, slijedi da je $a = 20$ cm, pa je površina $P = 10 \cdot 20 = 200$ cm^2. 3 BODA
. . . . UKUPNO 10 BODOVA

5. Izlučimo li redom brojeve 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009 u retcima, dobivamo:

$$\begin{aligned}
2004 \cdot (2006 + 2007 + 2008 + 2009) &= 2004 \cdot 8030\\
2005 \cdot (2006 + 2007 + 2008 + 2009) &= 2005 \cdot 8030\\
2006 \cdot (2006 + 2007 + 2008 + 2009) &= 2006 \cdot 8030\\
2007 \cdot (2006 + 2007 + 2008 + 2009) &= 2007 \cdot 8030\\
2008 \cdot (2006 + 2007 + 2008 + 2009) &= 2008 \cdot 8030\\
2009 \cdot (2006 + 2007 + 2008 + 2009) &= 2009 \cdot 8030.
\end{aligned}$$

6 BODOVA

Zbrojimo sada retke. Izlučimo li broj 8030, dobivamo da je traženi zbroj jednak

$$8030 \cdot (2004 + 2005 + 2006 + 2007 + 2008 + 2009) = 8030 \cdot 12039 = 96673170.$$

4BODA
. . . . UKUPNO 10 BODOVA

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
6. razred – rješenja
29. siječnja 2009.

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Izračunajmo prvo brojeve a i b. Imamo da je

$$\begin{aligned} a &= \frac{7}{4} : 0.5 + \frac{10}{9} \cdot \left(3\frac{1}{4} + \frac{4}{5}\right) = \frac{7}{4} : \frac{1}{2} + \frac{10}{9} \cdot \left(\frac{13}{4} + \frac{4}{5}\right) \\ &= \frac{7}{4} \cdot 2 + \frac{10}{9} \cdot \frac{65+16}{20} = \frac{7}{2} + \frac{1}{9} \cdot \frac{81}{2} = \frac{7}{2} + \frac{9}{2} = \frac{16}{2} = 8. \end{aligned}$$

4 BODA

Slično je

$$\begin{aligned} b &= \frac{2}{5} : \left(1.1 - \frac{3}{4} - 0.5 : 2\right) = \frac{2}{5} : \left(\frac{11}{10} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} : 2\right) \\ &= \frac{2}{5} : \left(\frac{11}{10} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{5} : \left(\frac{11}{10} - \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{2}{5} : \left(\frac{11}{10} - 1\right) = \frac{2}{5} : \frac{1}{10} = \frac{2}{5} \cdot 10 = 4. \end{aligned}$$

4 BODA

Konačno, kako je $\frac{a}{b} = \frac{8}{4} = 2$, zaključujemo da je broj a dva puta veći od broja b. 2 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

2. Neka je najmlađi sin dobio x kuna. Tada su ostali sinovi dobili
$x+45$, $x+90$, $x+135$, $x+180$ kuna, redom po starosti u rastućem poretku. 4 BODA
Prema uvjetu zadatka, najstariji sin će dobiti 13 puta više kuna od najmlađeg,
pa vrijedi jednadžba $13x = x + 180$, tj. $12x = 180$, odakle je $x = 15$. 4 BODA
Prema tome, sin koji je treći po starosti dobio je $x + 90 = 15 + 90 = 105$ kuna. 2 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

3. Kako Marija oba smjera biciklom prijeđe za $\frac{1}{4}$ sata, jedan smjer prijeđe za $\frac{1}{4} : 2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ sata. 3 BODA

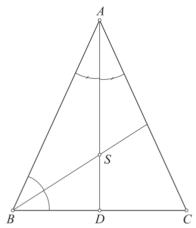
Nadalje, kako Marija prijeđe jedan smjer biciklom i jedan pješice za $\frac{3}{4}$ sata,

slijedi da jedan smjer pješice prijeđe za $\frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$ sata. 3 BODA

Dakle, Marija oba smjera prijeđe pješice za $2 \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{4}$ sata, a to je $\frac{5}{4} \cdot 60 = 5 \cdot 15 = 75$ minuta. 4 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

4.



1 BOD

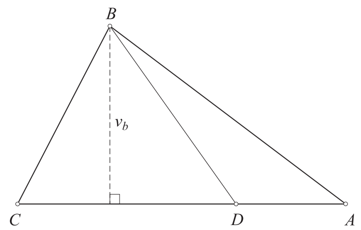
Neka je S sjecište simetrala kutova $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle CAB$. Kako je $\sphericalangle BSA = 125°30'$, slijedi da je
$\sphericalangle BSD = 180° - 125°30' = 54°30'$. 3 BODA
Nadalje, iz pravokutnog trokuta BDS slijedi da je $\sphericalangle SBD = 90° - \sphericalangle BSD = 90° - 54°30' = 35°30'$. 2 BODA

Kako je pravac BS simetrala kuta $\sphericalangle ABC$ zaključujemo da je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCA = 2 \cdot 35°30' = 71°$. 2 BODA

Preostaje još izračunati kut nasuprot osnovici: $\sphericalangle CAB = 180° - 2 \cdot 71° = 180° - 142° = 38°$. 2 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

5.



1 BOD

Neka je $b = |AC|$ i v_b je duljina visine na tu stranicu. Za površinu trokuta ABC vrijedi $P(ABC) = \dfrac{b \cdot v_b}{2} = 18$, odakle je $b \cdot v_b = 36$. 2BODA

Kako je $|DC| = 2|AD|$, slijedi da je $b = |AC| = |AD| + |DC| = |AD| + 2|AD| = 3|AD|$, odakle je $|AD| = \dfrac{1}{3}b$. 2 BODA

Nadalje, kako trokuti ABD i ABC imaju zajedničku visinu duljine v_b, za površinu trokuta ABD vrijedi

$$P(ABD) = \frac{|AD| \cdot v_b}{2} = \frac{\frac{b}{3} \cdot v_b}{2} = \frac{b \cdot v_b}{6} = \frac{36}{6} = 6 \text{ cm}^2.$$

3 BODA

Konačno, za površinu trokuta DBC vrijedi $P(DBC) = P(ABC) - P(ABD) = 18 - 6 = 12 \text{ cm}^2$. 2 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

7. razred – rješenja

29. siječnja 2009.

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Izračunajmo prvo brojeve a i b. Imamo da je

$$a = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} : \left(\frac{4}{5} - 1\right) = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} : \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} \cdot (-5) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}.$$

3 BODA

Slično je

$$b = \frac{2}{\frac{1}{3} - 2} : 2\frac{2}{5} + 2.5 = \frac{2}{-\frac{5}{3}} : \frac{12}{5} + \frac{5}{2} = \frac{-6}{5} \cdot \frac{5}{12} + \frac{5}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

4 BODA

Na kraju, dobivamo:

$$\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{\frac{5}{2}}{2} - \frac{2}{\frac{5}{2}} = \frac{5}{4} - \frac{4}{5} = \frac{25-16}{20} = \frac{9}{20}.$$

3 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

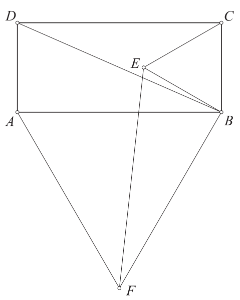
2. Neka je x brzina rijeke, izražena u km/h. Ukoliko se brodić kreće nizvodno,
njegova je brzina jednaka $15 + x$. 2 BODA
Ukoliko se brodić kreće uzvodno, njegova je brzina jednaka $15 - x$. 2 BODA
Kako brodić za isto vrijeme prijeđe put od 34 km nizvodno i put od 26 km uzvodno,
vrijedi razmjer $34 : (15 + x) = 26 : (15 - x)$. 2 BODA
Iz tog razmjera slijedi $34(15 - x) = 26(15 + x)$, tj. $510 - 34x = 390 + 26x$,
odnosno $60x = 120$, odakle je $x = 2$ km/h. 4 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

3. Neka je x stara cijena izleta kod Duje izražena u kunama. Tada je $x + 80$ stara cijena izleta kod Frane. 1 BOD
Nakon promjene, nova cijena kod Frane je $0.9(x + 80)$, a kod Duje $1.15x$. 2 BODA
Kako je , prema uvjetu zadatka, razlika u novim cijenama 8 kn,
vrijedi jednadžba $1.15x - 8 = 0.9(x + 80)$, odakle je $0.25x = 80$, odnosno $x = 320$. 3 BODA
Dakle, nova cijena kod Duje je $1.15 \cdot 320 = 368$ kn, a kod Frane $0.9 \cdot 400 = 360$ kn. 4 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

4.

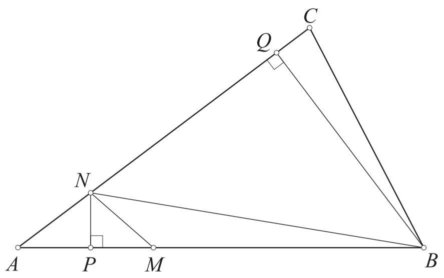


1 BOD

Promatrajmo trokute FBE i ABD. Dokazat ćemo da su oni sukladni.
Očito, vrijedi $|AD| = |BE|$ zato jer je trokut BCE jednakostraničan. 1 BOD
Slično, vrijedi $|AB| = |BF|$ zato jer je trokut AFB jednakostraničan. 1 BOD
Dokažimo da je $\sphericalangle FBE$ pravi. Naime, kako je trokut BCE jednakostraničan, slijedi da je
$\sphericalangle ABE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, pa je $\sphericalangle FBE = \sphericalangle FBA + \sphericalangle ABE = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$. 3 BODA

Dakle, trokuti FBE i ABD se podudaraju u dvije stranice i kutu među njima,
pa su oni sukladni prema poučku $S-K-S$. 2 BODA
Iz dobivene sukladnosti zaključujemo kako se trokuti FBE i ABD podudaraju u svim elementima,
pa je $|EF|=|BD|$, što je i trebalo dokazati. 2 BODA
.... UKUPNO 10 BODOVA

5.



1 BOD

Kako je $|AM|:|MB|=1:2$, slijedi da je $|AM|=\frac{1}{3}|AB|$. Slično, zbog $|AN|:|NC|=1:3$,
vrijedi $|AN|=\frac{1}{4}|AC|$. 1 BOD

Usporedimo površine trokuta AMN i ABN. Ta dva trokuta imaju zajedničku visinu, povučenu iz točke N, pa im se površine odnose kao odgovarajuće osnovice. Dakle, imamo

$$\frac{P(AMN)}{P(ABN)}=\frac{\frac{|AM|\cdot|NP|}{2}}{\frac{|AB|\cdot|NP|}{2}}=\frac{|AM|}{|AB|}=\frac{1}{3},$$

pri čemu je P nožište visine iz točke N na pravac AB. Zbog toga je $P(AMN)=\frac{1}{3}P(ABN)$. 3 BODA

Slično, usporedimo površine trokuta ABN i ABC. Ta dva trokuta imaju zajedničku visinu, povučenu iz vrha B, pa im se površine odnose kao odgovarajuće osnovice. Dakle, imamo

$$\frac{P(ABN)}{P(ABC)}=\frac{\frac{|AN|\cdot|BQ|}{2}}{\frac{|AC|\cdot|BQ|}{2}}=\frac{|AN|}{|AC|}=\frac{1}{4},$$

pri čemu je Q nožište visine iz točke B na pravac AC.
Zbog toga je $P(ABN)=\frac{1}{4}P(ABC)=\frac{1}{4}\cdot 12=3\ \mathrm{cm}^2$. 3 BODA
Konačno, vrijedi $P(AMN)=\frac{1}{3}P(ABN)=\frac{1}{3}\cdot 3=1\ \mathrm{cm}^2$. 2 BODA
.... UKUPNO 10 BODOVA

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

8. razred – rješenja

29. siječnja 2009.

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Izračunajmo broj x:

$$x = \frac{9}{5} - \frac{1}{5} : \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{5} - \frac{1}{5} : \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{5} - \frac{1}{5} \cdot 4 = \frac{9}{5} - \frac{4}{5} = \frac{5}{5} = 1.$$

4 BODA

Slično, uporabom formule za kvadrat zbroja, imamo

$$y = \sqrt{2} + \frac{5}{2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)^2 = \sqrt{2} + \frac{5}{2} - \left(\frac{1}{2} + \sqrt{2} + 1\right) = \sqrt{2} + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} - \sqrt{2} - 1 = 1.$$

4 BODA

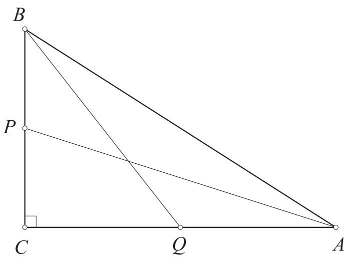
Dakle, vrijedi da je $x = y$. 2 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

2. Kako su dječaci postigli prosjek 87 bodova, oni su zajedno sakupili $12 \cdot 87 = 1044$ boda. 1 BOD
Djevojčice su zajedno sakupile $18x$ bodova, pri čemu je x njihov prosjek koji trebamo izračunati. 1 BOD
Prema tome, učenici su zajedno sakupili $1044 + 18x$ bodova. 1 BOD
U razredu ima $12 + 18 = 30$ učenika. 1 BOD
Kako je prosjek razreda 90 bodova, vrijedi jednadžba $\dfrac{1044 + 18x}{30} = 90$. 2 BODA
Rješavanjem jednadžbe dobivamo $1044 + 18x = 2700$, odnosno $18x = 2700 - 1044 = 1656$,
odakle je $x = \dfrac{1656}{18} = 92$. 4 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

3. Označimo duljine kateta i hipotenuze na uobičajen način: $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$.



1 BOD

Primijenimo li Pitagorin poučak na pravokutne trokute APC i BCQ, dobivamo sljedeće dvije jednakosti:

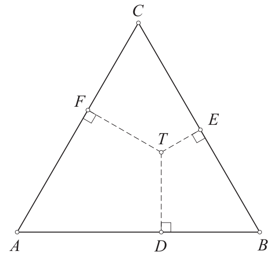
$$\begin{aligned} \frac{a^2}{4} + b^2 &= |AP|^2 = 25, \\ a^2 + \frac{b^2}{4} &= |BQ|^2 = 40. \end{aligned}$$

4 BODA

Zbrajanjem tih dviju jednakosti slijedi jednakost $\dfrac{5}{4}\left(a^2 + b^2\right) = 65$. 2 BODA
Međutim, zbog Pitagorinog poučka je $a^2 + b^2 = c^2$, pa uvrštavanjem u prethodnu jednakost
dobivamo da je $\dfrac{5}{4}c^2 = 65$, odnosno $c^2 = 52$. 2 BODA
Konačno, $c = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ cm. 1 BOD

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

4. Neka su D, E, F redom nožišta okomica iz točke T na stranice $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ kao na slici:



1 BOD

Prema uvjetu zadatka je $|TD| = 1$, $|TE| = 2$ i $|TF| = 3$. Prikažimo sada površinu trokuta ABC kao zbroj površina triju trokuta:

$$P(ABC) = P(ABT) + P(BCT) + P(CAT).$$

2 BODA

Kako je površina trokuta jednaka umnošku duljina stranice i visine, imamo da je

$$P(ABC) = \frac{a \cdot |TD|}{2} + \frac{a \cdot |TE|}{2} + \frac{a \cdot |TF|}{2} = \frac{a}{2}\left(|TD| + |TE| + |TF|\right) = \frac{a}{2}(1 + 2 + 3) = 3a.$$

3 BODA

S druge strane, površina jednakostraničnog trokuta je $P(ABC) = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, pa izjednačavanjem dobivenih dvaju izraza za površinu slijedi da je $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3a$, odakle je $a = \dfrac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$. 2 BODA

Konačno, iz formule za površinu trokuta dobivamo $P(ABC) = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{48\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}\ \text{cm}^2$. 2 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

5. Zapišimo dani izraz u drugom obliku, služeći se formulom za kvadrat zbroja:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4xy + 4y^2 + 12x + 8 &= x^2 + 4xy + 4y^2 + 3x^2 + 12x + 12 - 4 \\ &= (x + 2y)^2 + 3(x^2 + 4x + 4) - 4 \\ &= (x + 2y)^2 + 3(x + 2)^2 - 4. \end{aligned}$$

5 BODOVA

Kako je kvadrat broja uvijek nenegativan, zaključujemo da je $(x + 2y)^2 \geq 0$ i $(x + 2)^2 \geq 0$, pa se najmanja vrijednost postiže kada je $(x + 2y)^2 = (x + 2)^2 = 0$, te je ona jednaka -4. 3 BODA

Najmanja vrijednost se postiže kada je $x + 2y = 0$ i $x + 2 = 0$. Iz druge jednadžbe slijedi da je $x = -2$, a iz prve $y = -\dfrac{x}{2} = -\dfrac{-2}{2} = 1$. 2 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA