Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

29. siječnja 2009.

UPUTE:

Na poleđini ovog lista nalazi se 8 zadataka.

Prvih 5 zadataka vrijedi po 8 bodova.
Potpuno riješen zadatak nosi 8 bodova, a rješenje s manjom greškom 4 boda.

Zadaci 6., 7. i 8. vrijede po 20 bodova i detaljno se boduju.

Vrijeme rješavanja je 180 minuta.

Nije dopuštena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A kategorija

29. siječnja 2009.

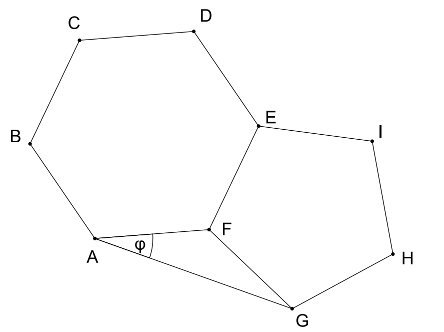
1. (8) Skrati razlomak $\dfrac{a^4-2a^3-2a^2+2a+1}{(a+1)(a+2)}$.

2. (8) Ako dvoznamenkastom broju s lijeve strane dopišemo znamenku 3, dobit ćemo broj čiji je dvokratnik 27 puta veći od zadanog dvoznamenkastog broja.
Odredi taj dvoznamenkasti broj.

3. (8) Odredi najveći cijeli broj n za koji vrijedi nejednakost $3(n-\frac{5}{3})-2(4n+1) > 6n+5$.

4. (8) Koliko djelitelja ima broj 288 ?

5. (8) Na slici su pravilni šesterokut $ABCDEF$ i pravilni peterokut $EFGHI$.
Odredi kut $\sphericalangle FAG$.



6. (20) Trapez $ABCD$ ima pravi kut pri vrhu B, a dijagonala $\overline{BD}$ je okomita na krak AD.
Duljina kraka $\overline{BC}$ je $5\,\text{cm}$, a duljina dijagonale $\overline{BD}$ je $13\,\text{cm}$.
Izračunaj površinu trapeza $ABCD$.

7. (20) Na proslavi Aninog rođendana, nakon prvog oglašavanja zvona na ulaznim vratima došao je jedan gost. Nakon drugog, i svakog sljedećeg zvonjenja, došla su dva gosta više nego prethodni put. Ako se zvono oglasilo n puta, koliko je ukupno bilo gostiju na proslavi?

8. (20) Odredi sve prirodne brojeve n za koje je n^2-440 potpuni kvadrat.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A kategorija

29. siječnja 2009.

1. (8) Skrati razlomak $\dfrac{(2^{n-1}+1)^2-4^{n-1}}{4^n+2^{n+1}+1}$.

2. (8) U pravokutnom trokutu duljina visine na hipotenuzu je 4 cm, a duljina težišnice iz vrha pravog kuta 5 cm. Odredi zbroj duljina kateta tog trokuta.

3. (8) U trokutu ABC poznati su kutovi $\sphericalangle CAB = 35°$ i $\sphericalangle ABC = 60°$. Ako je t tangenta na kružnicu opisanu tom trokutu s diralištem u vrhu C, a p paralela s pravcem AB kroz vrh C, odredi kut između pravaca p i t.

4. (8) Dani su kompleksni brojevi $z = 7 - i$, $w = -3 + 4i$. Odredi $\left|\dfrac{z^{20}}{\overline{w}^{10}}\right|$.

5. (8) Neka su x_1, x_2 različita rješenja jednadžbe $2x^2 - 3x + 4 = 0$. Izračunaj $\dfrac{1}{x_1^3} + \dfrac{1}{x_2^3}$.

6. (20) Žicu duljine 1 m treba razrezati i od dobivenih dijelova napraviti jedan jednakostranični trokut i jedan kvadrat. Cijelu žicu treba iskoristiti. Odredi duljinu stranice trokuta i duljinu stranice kvadrata tako da zbroj površina trokuta i kvadrata bude što manji.

7. (20) Odredi prirodne brojeve a, b i c tako da vrijedi jednakost $(a + bi)^3 - 107i = c$. (i je imaginarna jedinica.)

8. (20) Odredi $a > 0$ tako da površina lika omeđenog grafovima funkcija

$$y = |ax - 3| + |ax + 3| \qquad \text{i} \qquad y = 10$$

bude jednaka 8.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A kategorija

29. siječnja 2009.

1. Riješi jednadžbu $4^{\log x} - 32 + x^{\log 4} = 0$.
(8)

2. Riješi nejednadžbu
(8)

$$\log_2(1 - 2\cos x) + \log_{\frac{1}{2}}(1 + 2\cos x) \leq 0$$

u intervalu $[0, 2\pi]$.

3. Zadan je kompleksan broj $z = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$, gdje je $\alpha \in \mathbb{R}$.
(8) Odredi $|z|$. Rješenje zapiši bez oznake korjenovanja.

4. Ako za duljine a, b, c stranica trokuta vrijedi $(a + b + c)(a + b - c) = 3ab$, odredi
(8) kut nasuprot stranice c.

5. Polumjer osnovke kružnog stošca je r. Jedan osni presjek tog stošca je raznostraničan trokut s kutovima α i β $(\alpha \neq \beta)$ uz promjer osnovke. Izrazi obujam tog stošca pomoću r, α i β.
(8)

6. Neka su α, β i γ kutovi takvi da vrijedi $\beta = 60^\circ + \alpha$ i $\gamma = 60^\circ + \beta$. Dokaži da je
(20) vrijednost izraza

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\alpha$$

cijeli broj kad god je izraz definiran.

7. Pokaži da za svaki trokut s kutovima α, β i γ te polumjerima r i R upisane i opisane
(20) kružnice redom, vrijedi jednakost $\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}} = \dfrac{4R\sin^2\frac{\gamma}{2}}{r}$.

8. Odredi sve cijele brojeve x za koje je $\log_2(x^2 - 4x - 1)$ cijeli broj.
(20)

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A kategorija

29. siječnja 2009.

1. (8) U skupu realnih brojeva riješi jednadžbu $\sqrt{x^x} = x^{\sqrt{x}}$.

2. (8) Treći član u razvoju binoma $\left(2 \cdot \sqrt[n]{2^{-1}} + \dfrac{4}{\sqrt[4-n]{4}}\right)^6$ je 240. Odredi n.

3. (8) Izračunaj $\left(1 + \cos\dfrac{\pi}{7} + i\sin\dfrac{6\pi}{7}\right)^{14}$.

4. (8) Tri različita realna broja, različita od nule, čine aritmetički niz, a njihovi kvadrati u istom poretku čine geometrijski niz. Odredi sve moguće vrijednosti kvocijenta tog geometrijskog niza.

5. (8) Koliki je zbroj svih prirodnih brojeva n za koje je broj $\dfrac{2009 - n}{99}$ prirodan?

6. (20) Jedno od žarišta (fokusa) elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ je žarište parabole $y^2 = 2px$, a pravac $3x - 5y + 25 = 0$ je njihova zajednička tangenta. Dokaži da je trokut kojeg određuju zajedničko žarište i dva dirališta tangente pravokutan.

7. (20) Kut pri vrhu osnog presjeka uspravnog stošca je 2α, a polumjer osnovke r. U taj stožac je upisana pravilna šesterostrana prizma čiji su svi bridovi jednake duljine (jedna osnovka prizme leži u ravnini osnovke stošca, a preostali vrhovi na plaštu stošca). Izračunaj oplošje prizme pomoću α i r.

8. (20) Niz (a_n) zadan je rekurzivno:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ za } n \geq 3.$$

Dokaži da vrijedi nejednakost $a_n < \left(\dfrac{7}{4}\right)^n$ za sve $n \in \mathbb{N}$.