OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A kategorija

29. siječnja 2009.

Zadatak A-1.1. (8 bodova)

Skrati razlomak $\dfrac{a^4-2a^3-2a^2+2a+1}{(a+1)(a+2)}$.

Rješenje.

$$\begin{aligned}
\frac{a^4-2a^3-2a^2+2a+1}{(a+1)(a+2)} &= \frac{a^4-2a^2+1-2a^3+2a}{(a+1)(a+2)} = \frac{(a^2-1)^2-2a(a^2-1)}{(a+1)(a+2)} \\
&= \frac{(a^2-1)(a^2-1-2a)}{(a+1)(a+2)} = \frac{(a-1)(a+1)(a^2-1-2a)}{(a+1)(a+2)} \\
&= \frac{(a-1)(a^2-2a-1)}{a+2} \quad \text{ili} \quad \frac{a^3-3a^2+a+1}{a+2}
\end{aligned}$$

Za 4 boda: izlučen faktor $(a+1)$ u brojniku, uz grešku u drugoj zagradi.
Za 8 bodova: točan rezultat i postupak.

Zadatak A-1.2. (8 bodova)

Ako dvoznamenkastom broju s lijeve strane dopišemo znamenku 3, dobit ćemo broj čiji je dvokratnik 27 puta veći od zadanog dvoznamenkastog broja.
Odredi taj dvoznamenkasti broj.

Rješenje.
Neka je $\overline{xy}=10x+y$ traženi dvoznamenkasti broj. Vrijedi

$$2\cdot\overline{3xy}=27\cdot\overline{xy} \tag{$*$}$$

$$2\cdot(300+\overline{xy})=27\cdot\overline{xy}$$

$$600+2\cdot\overline{xy}=27\cdot\overline{xy}$$

$$600=25\cdot\overline{xy}$$

Traženi broj je $\overline{xy}=24$.

Za 4 boda: dobro postavljen zadatak, barem (*) ili ekvivalentno.
Za 8 bodova: točan rezultat i postupak.

Zadatak A-1.3. (8 bodova)

Odredi najveći cijeli broj n za koji vrijedi nejednakost $3(n-\frac{5}{3})-2(4n+1)>6n+5$.

Rješenje.
Dana nejednakost $3(n-\frac{5}{3})-2(4n+1)>6n+5$ redom je ekvivalentna s

$$3n-5-8n-2>6n+5,$$

$$-11n>12, \qquad (*)$$

$$n<-\frac{12}{11}.$$

Najveći cijeli broj koji zadovoljava ovu nejednakost je $n=-2$.

Za 4 boda: barem (*)
Za 8 bodova: točan rezultat i postupak.

Zadatak A-1.4. (8 bodova)

Koliko djelitelja ima broj 288 ?

Rješenje.
Rastavimo broj 288 na faktore:

$$288=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot=2^5\cdot 3^2.$$

Prvi način.
Djelitelj broja 288 nema prostih faktora osim 2 i 3.

Faktor 2 u djelitelju može se javljati 0,1,2,3,4 ili najviše 5 puta, pa imamo 6 mogućnosti.

Za pojavljivanje faktora 3 postoje tri mogućnosti: 3^0, 3^1, 3^2.

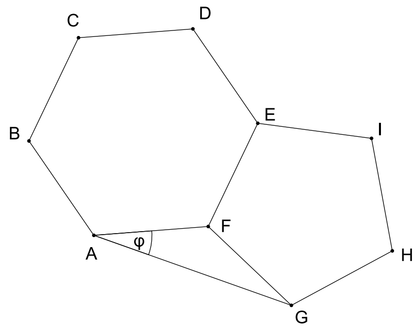
Ukupan broj djelitelja je $6\cdot 3=18$.

Drugi način.
Djelitelji su: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 32, 36, 48, 72, 96, 144 i 288. Ima ih 18.

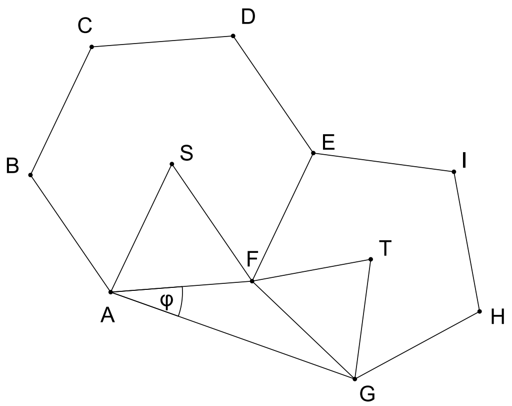
Za 4 boda: sitna greška u prebrojavanju.
Za 8 bodova: točan postupak i rezultat, ili navedeni točno svi djelitelji (bez rezultata "18").

Zadatak A-1.5. (8 bodova)

Na slici su pravilni šesterokut $ABCDEF$ i pravilni peterokut $EFGHI$.
Odredi kut $\sphericalangle FAG$.



Rješenje.
Neka je S središte pravilnog šesterokuta, a T središte pravilnog peterokuta.



Vrijedi $\sphericalangle ASF = 360°/6 = 60°$, pa je $\sphericalangle AFE = 120°$. Također je $\sphericalangle GTF = 360°/5 = 72°$, pa je $\sphericalangle EFG = 108°$. Stoga je $\sphericalangle AFG = 360° - \sphericalangle AFE - \sphericalangle EFG = 132°$. (*)

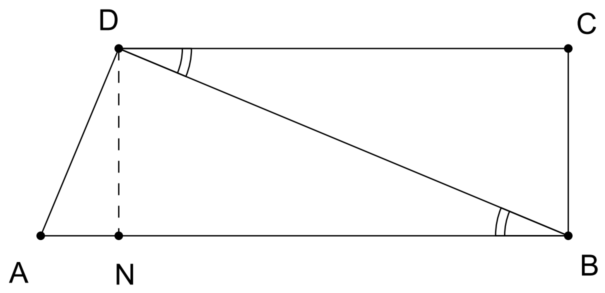
Trokut AFG je jednakokračan, $|AF| = |FG|$, pa vrijedi $\sphericalangle FAG = (180° - \sphericalangle AFG)/2 = 24°$.

Za 4 boda: barem "kutovi 120°, 108° i trokut AFG je jednakokračan" ili "kut $\sphericalangle AFG$ je 132°" ili dobar postupak s greškom u računu.
Za 8 bodova: točan rezultat i postupak.

Zadatak A-1.6. (20 bodova)

Trapez $ABCD$ ima pravi kut pri vrhu B, a dijagonala $\overline{BD}$ je okomita na krak AD. Duljina kraka $\overline{BC}$ je $5\,\mathrm{cm}$, a duljina dijagonale $\overline{BD}$ je $13\,\mathrm{cm}$.
Izračunaj površinu trapeza $ABCD$.

Rješenje.
Prvi način.
Znamo $|BC| = 5\,\mathrm{cm}$, $|BD| = 13\,\mathrm{cm}$.
Iz pravokutnog trokuta BCD slijedi $|CD| = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12\,\mathrm{cm}$. (2 boda)



Uvedimo oznake $|AB| = a$, $|AD| = d$. Neka je N nožište visine trapeza povučene iz točke D. Tada je $|AN| = a - 12$, (2 boda)
pa iz pravokutnog trokuta AND dobivamo: $(a-12)^2 + 5^2 = d^2$. (5 bodova)
a iz trokuta ABD: $d^2 + 13^2 = a^2$. (5 bodova)

Rješavanjem dobivenog sustava dobivamo: $a = \dfrac{169}{12}\,\mathrm{cm}$, (2 boda)
pa je $P = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{169}{12} + 12\right) \cdot 5$, $P = \dfrac{1565}{24}\,\mathrm{cm}^2$. (4 boda)

Drugi način.
Znamo $|BC| = 5\,\mathrm{cm}$, $|BD| = 13\,\mathrm{cm}$.
Iz pravokutnog trokuta BCD slijedi $|CD| = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12\,\mathrm{cm}$. (2 boda)

Trokuti ABD i BDC su slični ($\sphericalangle ABD = \sphericalangle DBC$, $\sphericalangle ADB = \sphericalangle CBD = 90°$).
(8 bodova)
Stoga vrijedi: $\dfrac{|AB|}{13} = \dfrac{13}{12}$, (4 boda)
odakle dobivamo $|AB| = \dfrac{169}{12}\,\mathrm{cm}$, (2 boda)
i konačno: $P = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{169}{12} + 12\right) \cdot 5$, $P = \dfrac{1565}{24}\,\mathrm{cm}^2$ $\left(= 65.208\dot{3}\,\mathrm{cm}^2\right)$. (4 boda)

Zadatak A-1.7. (20 bodova)

Na proslavi Aninog rođendana, nakon prvog oglašavanja zvona na ulaznim vratima došao je jedan gost. Nakon drugog, i svakog sljedećeg zvonjenja, došla su dva gosta više nego prethodni put. Ako se zvono oglasilo n puta, koliko je ukupno bilo gostiju na proslavi?

Rješenje.

Nakon prvog zvona došao je jedan gost (1 je prvi neparni broj),
nakon drugog zvona došla su tri gosta (3 je drugi neparni broj),
nakon trećeg zvona došlo je pet gostiju (5 je treći neparni broj),
...
Nakon n-tog zvona došlo je $2n-1$ gostiju ($2n-1$ je n-ti neparni broj). (3 boda)

Označimo sa S_n ukupan broj gostiju nakon n-tog zvona:

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-3) + (2n-1). \qquad \text{(5 bodova)}$$

Ovu sumu možemo izračunati na sljedeći način:

$$\begin{array}{ccccccccccc} S_n & = & 1 & + & 3 & + & \ldots & + & (2n-3) & + & (2n-1) \\ S_n & = & (2n-1) & + & (2n-3) & + & \ldots & + & 3 & + & 1 \\ \hline 2S_n & = & 2n & + & 2n & + & \ldots & + & 2n & + & 2n \end{array} \qquad \text{(8 bodova)}$$

Zaključujemo $2S_n = 2n \cdot n$, pa je $S_n = n^2$. Na proslavi je bilo n^2 gostiju. (4 boda)

Zadatak A-1.8. (20 bodova)

Odredi sve prirodne brojeve n za koje je $n^2 - 440$ potpuni kvadrat.

Rješenje.

Neka je $n^2 - 440$ kvadrat broja k, $k \in \mathbb{N}_0$.

Iz $n^2 - 440 = k^2$ slijedi $(n-k)(n+k) = 440$. (2 boda)

Kako je desna strana jednakosti paran broj, i produkt $(n-k)(n+k)$ mora biti paran, pa je bar jedan od brojeva $n-k$, $n+k$ paran. To je moguće jedino ako su n i k brojevi iste parnosti, a tada su oba broja $n-k$, $n+k$ parna. (5 bodova)

Broj $440 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11$ može se prikazati kao produkt dvaju parnih brojeva na četiri načina: $440 = 2 \cdot 220 = 4 \cdot 110 = 10 \cdot 44 = 20 \cdot 22$. (5 bodova)

Kako je $n - k \leq n + k$, dobivamo četiri sustava:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & n-k=2 & \text{c)} & n-k=10 \\ & n+k=220 & & n+k=44 \\ & & & \\ \text{b)} & n-k=4 & \text{d)} & n-k=20 \\ & n+k=110 & & n+k=22 \end{array}$$

Iz tih sustava dobivamo sve tražene brojeve n: 111, 57, 27, 21. (8 bodova)

Napomena: Za *pogođeno* pojedinačno rješenje (npr. $n = 21$) dati po 2 boda.

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A kategorija

29. siječnja 2009.

Zadatak A-2.1. (8 bodova)

Skrati razlomak $\dfrac{(2^{n-1}+1)^2-4^{n-1}}{4^n+2^{n+1}+1}$.

Rješenje.

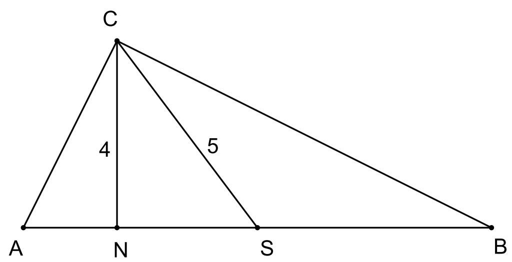
$$\frac{(2^{n-1}+1)^2-4^{n-1}}{4^n+2^{n+1}+1}=\frac{4^{n-1}+2\cdot 2^{n-1}+1-4^{n-1}}{4^n+2\cdot 2^n+1}=\frac{2^n+1}{(2^n+1)^2}=\frac{1}{2^n+1}$$

Za 4 boda: dobar postupak sa sitnom greškom.
Za 8 bodova: točan rezultat i postupak.

Zadatak A-2.2. (8 bodova)

U pravokutnom trokutu duljina visine na hipotenuzu je 4 cm, a duljina težišnice iz vrha pravog kuta 5 cm. Odredi zbroj duljina kateta tog trokuta.

Rješenje.
Prvi način.
Neka je S polovište hipotenuze, a N nožište visine na hipotenuzu, te neka je $|AC| < |BC|$. Točka S je središte kružnice opisane trokutu ABC, pa vrijedi $|AS| = |BS| = |CS| = 5$.



Označimo $|NS| = x$. Iz pravokutnog trokuta CNS dobivamo $x^2 + 4^2 = 5^2$, odnosno $x = 3$ cm. Sada iz pravokutnih trokuta ANC i BNC dobivamo:

$$|AC|^2 = (5-3)^2 + 4^2 = 20, \quad |BC|^2 = (5+3)^2 + 4^2 = 80.$$

Duljine kateta su $a = |BC| = 4\sqrt{5}$ cm i $b = |AC| = 2\sqrt{5}$ cm.
Zbroj duljina kateta iznosi $6\sqrt{5}$ cm.

Drugi način.
Neka su a i b duljine kateta, a c duljina hipotenuze promatranog trokuta. Duljina težišnice iz vrha pravog kuta jednaka je polovini duljine hipotenuze, pa je $c = 10$.
Površinu pravokutnog trokuta možemo izraziti na dva načina, $P = \dfrac{c \cdot v}{2} = \dfrac{a \cdot b}{2}$.
Odatle slijedi $ab = 40$.
Osim toga vrijedi $a^2 + b^2 = 100$, pa rješavanjem sustava možemo dobiti a i b.

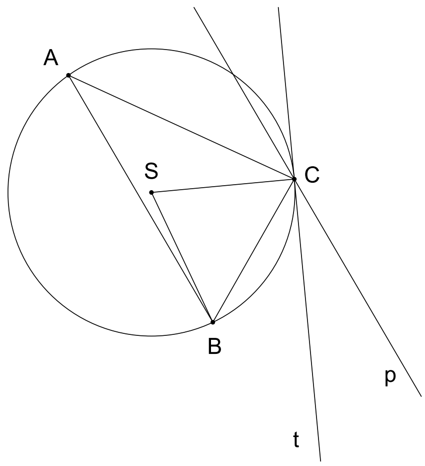
Zapravo nam ne trebaju a i b, već samo njihov zbroj, pa imamo:
$(a+b)^2 = (a^2+b^2) + 2 \cdot ab = 100 + 2 \cdot 40 = 180$, i konačno $a + b = 6\sqrt{5}$.

Za 4 boda: dobar postupak s računskom greškom.
Za 8 bodova: točan rezultat i postupak ili točno određene duljine a i b.

Zadatak A-2.3. (8 bodova)

U trokutu ABC poznati su kutovi $\sphericalangle CAB = 35^\circ$ i $\sphericalangle ABC = 60^\circ$. Ako je t tangenta na kružnicu opisanu tom trokutu s diralištem u vrhu C, a p paralela s pravcem AB kroz vrh C, odredi kut između pravaca p i t.

Rješenje.
Mjera kuta koji zatvaraju pravac p i pravac BC jednaka je mjeri kuta $\sphericalangle ABC$, pa iznosi 60° (paralelni kraci).



Neka je S središte opisane kružnice. Kut $\sphericalangle BSC$ je 70° jer je to središnji kut tetive $\overline{BC}$ nad kojom je obodni kut $\sphericalangle BAC$ iznosa 35°. Sada je $\sphericalangle SCB = 55^\circ$ (iz jednakokračnog trokuta BCS), a kut između pravca BC i tangente t iznosi $90^\circ - 55^\circ = 35^\circ$, jer je tangenta okomita na polumjer $\overline{SC}$.
(Do ove činjenice možemo doći i pomoću teorema o kutu između tetive i tangente: kut između tetive neke kružnice i tangente na tu kružnicu povučene u jedom od krajeva te tetive jednak je obodnom kutu nad tom tetivom.)
Konačno, kut između pravaca p i t iznosi $60^\circ - 35^\circ = 25^\circ$.

Za 4 boda: dobar postupak s računskom greškom.
Za 8 bodova: točan rezultat i postupak.

Zadatak A-2.4. (8 bodova)

Dani su kompleksni brojevi $z = 7 - i$, $w = -3 + 4i$. Odredi $\left| \dfrac{z^{20}}{\overline{w}^{10}} \right|$.

Rješenje.

$$\left| \frac{z^{20}}{\overline{w}^{10}} \right| = \frac{|z|^{20}}{|w|^{10}} = \frac{\sqrt{7^2+1^2}^{\,20}}{\sqrt{3^2+4^2}^{\,10}} = \frac{\sqrt{50}^{\,20}}{\sqrt{25}^{\,10}} = \frac{50^{10}}{5^{10}} = 10^{10}$$

Za 4 boda: dobar postupak sa sitnom greškom.
Za 8 bodova: točan rezultat i postupak.

Zadatak A-2.5. (8 bodova)

Neka su x_1, x_2 različita rješenja jednadžbe $2x^2 - 3x + 4 = 0$. Izračunaj $\dfrac{1}{x_1^3} + \dfrac{1}{x_2^3}$.

Rješenje.
Iz Vieteovih formula dobivamo $x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$, $x_1 \cdot x_2 = 2$.

Vrijedi $\dfrac{1}{x_1^3} + \dfrac{1}{x_2^3} = \dfrac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^3 \cdot x_2^3} = \dfrac{(x_1+x_2)^3 - 3 \cdot x_1 x_2 \cdot (x_1+x_2)}{(x_1 x_2)^3} = \dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3 \cdot 2 \cdot \frac{3}{2}}{2^3} = -\dfrac{45}{64}.$

Za 4 boda: dobar postupak s računskom greškom.
Za 8 bodova: točan rezultat i postupak.

Zadatak A-2.6. (20 bodova)

Žicu duljine 1 m treba razrezati i od dobivenih dijelova napraviti jedan jednakostranični trokut i jedan kvadrat. Cijelu žicu treba iskoristiti. Odredi duljinu stranice trokuta i duljinu stranice kvadrata tako da zbroj površina trokuta i kvadrata bude što manji.

Rješenje.
Označimo s a duljinu stranice trokuta i s b duljinu stranice kvadrata.

Prema uvjetima zadatka vrijedi $3a + 4b = 1$, odnosno $b = \dfrac{1-3a}{4}$. (2 boda)

Ukupna površina je $P = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} + b^2$, (2 boda)
odnosno

$$\begin{aligned} P &= \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{1-3a}{4}\right)^2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{1-6a+9a^2}{16} \\ &= \frac{1}{16}\left((4\sqrt{3}+9)a^2 - 6a + 1\right). \end{aligned}$$ (6 bodova)

Izraz u zagradi je kvadratna funkcija varijable a, i ima najmanju vrijednost za

$$a = \frac{6}{2(4\sqrt{3}+9)} = \frac{9-4\sqrt{3}}{11}. \qquad \text{(7 bodova)}$$

Tada je $\quad b = \dfrac{1 - 3 \cdot \frac{9-4\sqrt{3}}{11}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}-4}{11}.$ (3 boda)

Zadatak A-2.7. (20 bodova)

Odredi prirodne brojeve a, b i c tako da vrijedi jednakost $(a+bi)^3 - 107i = c$.
(i je imaginarna jedinica.)

Rješenje.
Nakon kubiranja binoma i sređivanja izraza dobivamo

$$a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3 - 107)i = c. \qquad \text{(2 boda)}$$

Kako su a, b i c realni, izjednačavanjem realnih i imaginarnih dijelova dobivamo

$$a^3 - 3ab^2 = c, \quad 3a^2b - b^3 - 107 = 0. \qquad \text{(3 boda)}$$

Iz druge jednakosti dobivamo $(3a^2 - b^2)b = 107$. Kako je 107 prost broj, a a i b prirodni, zaključujemo

$$3a^2 - b^2 = 107, \quad b = 1$$

ili

$$3a^2 - b^2 = 1, \quad b = 107. \qquad \text{(10 bodova)}$$

U prvom slučaju je $3a^2 = 108$, $a = 6$, a u drugom slučaju $3a^2 = 11450$, pa $a \notin \mathbb{N}$. Sada iz jednakosti realnih dijelova polazne jednadžbe slijedi $c = a^3 - 3ab^2 = 6^3 - 3 \cdot 6 \cdot 1^2 = 198$.
(5 bodova)

Zadatak A-2.8. (20 bodova)

Odredi $a > 0$ tako da površina lika omeđenog grafovima funkcija

$$y = |ax - 3| + |ax + 3| \qquad \text{i} \qquad y = 10$$

bude jednaka 8.

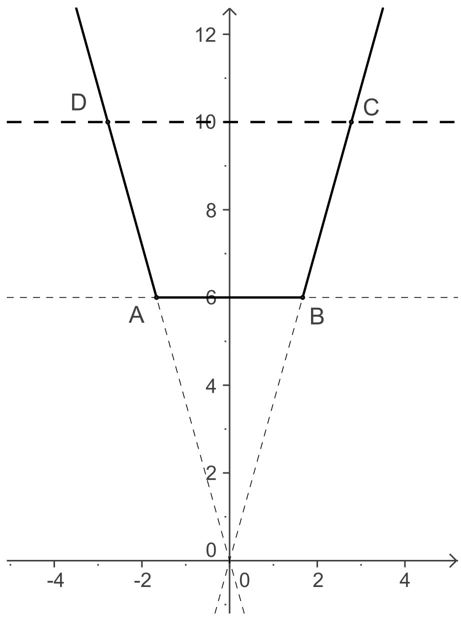
Rješenje.

Funkciju $y = |ax-3|+|ax+3|$ možemo zapisati po dijelovima bez apsolutne vrijednosti:

$$y = \begin{cases} -2ax, & x \in \left\langle -\infty, -\frac{3}{a} \right\rangle \\ 6, & x \in \left[-\frac{3}{a}, \frac{3}{a} \right] \\ 2ax, & x \in \left\langle \frac{3}{a}, \infty \right\rangle \end{cases}$$

(8 bodova)

Skicirajmo grafički prikaz promatranih funkcija i tražene površine:



Lik omeđen grafovima promatranih funkcija je trapez s vrhovima
$A(-\frac{3}{a}, 6)$, $B(\frac{3}{a}, 6)$, $C(\frac{5}{a}, 10)$, $D(-\frac{5}{a}, 10)$. (5 bodova)

Njegova površina iznosi $P = \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{6}{a} + \dfrac{10}{a} \right) \cdot 4 = \dfrac{32}{a}$. (5 bodova)

Površina trapeza je jednaka 8 ako je $a = 4$. (2 boda)

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A kategorija

29. siječnja 2009.

Zadatak A-3.1. (8 bodova)

Riješi jednadžbu $4^{\log x} - 32 + x^{\log 4} = 0$.

Rješenje.

Kako je $4^{\log x} = x^{\log 4}$, (*)

jednadžba je ekvivalentna redom s

$$2 \cdot 4^{\log x} = 32, \qquad 4^{\log x} = 16, \qquad \log x = 2,$$

te konačno $x = 100$.

Za 4 boda: barem (*)

Za 8 bodova: točan rezultat i postupak.

Zadatak A-3.2. (8 bodova)

Riješi nejednadžbu

$$\log_2(1 - 2\cos x) + \log_{\frac{1}{2}}(1 + 2\cos x) \leq 0$$

u intervalu $[0, 2\pi]$.

Rješenje.

Da bi logaritmi bili definirani mora vrijediti: $1 - 2\cos x > 0$ i $1 + 2\cos x > 0$, odnosno $-\dfrac{1}{2} < \cos x < \dfrac{1}{2}$.

Koristeći svojstva logaritama, jednadžbu možemo zapisati u obliku: $\log_2 \dfrac{1 - 2\cos x}{1 + 2\cos x} \leq 0$,

odnosno $\dfrac{1 - 2\cos x}{1 + 2\cos x} \leq 1$. (*)

Nazivnik ovog razlomka je pozitivan (zbog uvjeta), pa nejednadžba nakon sređivanja postaje $\cos x \geq 0$.

Rješenje dane nejednadžbe u intervalu $[0, 2\pi]$ je:

$$x \in \left\langle \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3} \right\rangle.$$

Za 4 boda: uvjeti i uklanjanje logaritma (*) ili riješeno do kraja uz zanemarivanje uvjeta (rezultat: $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$).

Za 8 bodova: točan rezultat i postupak.

Zadatak A-3.3. (8 bodova)

Zadan je kompleksan broj $z = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$, gdje je $\alpha \in \mathbb{R}$.

Odredi $|z|$. Rješenje zapiši bez oznake korjenovanja.

Rješenje.

$|z| = \sqrt{(1+\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2} = \sqrt{2 + 2\cos\alpha} = 2\left|\cos\dfrac{\alpha}{2}\right|.$

Za 4 boda: konačan rezultat bez modula: $2\cos\frac{\alpha}{2}$.
Za 8 bodova: točan rezultat i postupak.

Zadatak A-3.4. (8 bodova)

Ako za duljine a, b, c stranica trokuta vrijedi $(a+b+c)(a+b-c) = 3ab$, odredi kut nasuprot stranice c.

Rješenje.

Dani izraz može se zapisati u obliku $(a+b)^2 - c^2 = 3ab$, odnosno $a^2 + b^2 - c^2 = ab$.

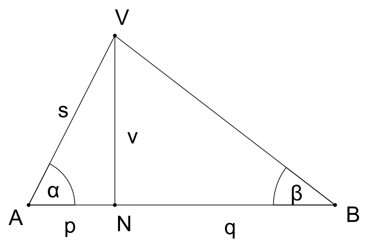
Prema poučku o kosinusima vrijedi $\cos\gamma = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \dfrac{ab}{2ab} = \dfrac{1}{2}$, pa je $\gamma = 60°$.

Za 4 boda: točno do rezultata $\cos\gamma = \frac{1}{2}$.
Za 8 bodova: točan rezultat i postupak.

Zadatak A-3.5. (8 bodova)

Polumjer osnovke kružnog stošca je r. Jedan osni presjek tog stošca je raznostraničan trokut s kutovima α i β $(\alpha \neq \beta)$ uz promjer osnovke. Izrazi obujam tog stošca pomoću r, α i β.

Rješenje.



Prvi način.

Promatrajmo opisani osni presjek. Uz oznake na slici vrijedi $p = v\operatorname{ctg}\alpha$ i $q = v\operatorname{ctg}\beta$, pa slijedi $2r = p + q = v(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)$, odnosno $v = \dfrac{2r}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$.

Konačno

$$V = \frac{1}{3}\cdot r^2\pi\cdot v = \frac{2r^3\pi}{3(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)}.$$

Drugi način.
Ako je v visina stošca, a s duljina izvodnice uz kut α, iz promatranog osnog presjeka zaključujemo da vrijedi $v = s \cdot \sin\alpha$. Zbog sinusovog poučka vrijedi i $\dfrac{s}{2r} = \dfrac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.
Sada lako dobijemo $v = \dfrac{2r\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, i konačno

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2\pi \cdot v = \frac{2r^3\pi\sin\alpha\sin\beta}{3\sin(\alpha+\beta)}.$$

Za 4 boda: visina stošca izražena pomoću α, β i r.
Za 8 bodova: točan rezultat i postupak.

Zadatak A-3.6. (20 bodova)

Neka su α, β i γ kutovi takvi da vrijedi $\beta = 60^\circ + \alpha$ i $\gamma = 60^\circ + \beta$. Dokaži da je vrijednost izraza

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha$$

cijeli broj kad god je izraz definiran.

Rješenje.
Vrijedi $\beta = 60^\circ + \alpha$, $\gamma = 120^\circ + \alpha$, pa je

$$\begin{aligned}&\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha = \\ &= \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(60^\circ+\alpha) + \operatorname{tg}(60^\circ+\alpha)\operatorname{tg}(120^\circ+\alpha) + \operatorname{tg}(120^\circ+\alpha)\operatorname{tg}\alpha = (*).\end{aligned}$$ (5 bodova)

Prema adicijskim formulama je

$$\operatorname{tg}(60^\circ+\alpha) = \frac{\sqrt{3}+\operatorname{tg}\alpha}{1-\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}, \qquad \operatorname{tg}(120^\circ+\alpha) = \frac{-\sqrt{3}+\operatorname{tg}\alpha}{1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}.$$ (5 bodova)

Stoga je

$$(*) = \operatorname{tg}\alpha\frac{\sqrt{3}+\operatorname{tg}\alpha}{1-\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha} + \frac{\sqrt{3}+\operatorname{tg}\alpha}{1-\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha} \cdot \frac{-\sqrt{3}+\operatorname{tg}\alpha}{1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha} + \frac{-\sqrt{3}+\operatorname{tg}\alpha}{1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}\operatorname{tg}\alpha = \frac{9\operatorname{tg}^2\alpha - 3}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha} = -3.$$

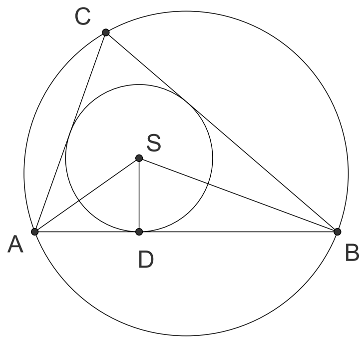
(10 bodova)

Dani izraz jednak je -3 kad god je definiran.

Zadatak A-3.7. (20 bodova)

Pokaži da za svaki trokut s kutovima α, β i γ te polumjerima r i R upisane i opisane kružnice redom, vrijedi jednakost $\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}=\dfrac{4R\sin^2\frac{\gamma}{2}}{r}$.

Rješenje.



Jednakost koju treba dokazati može se zapisati ovako:

$$r(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2})=4R\sin^2\frac{\gamma}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Zbog

$$\sin^2\frac{\gamma}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}\sin\gamma, \qquad \text{(5 bodova)}$$

potrebno je još pokazati da vrijedi

$$r(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2})=2R\sin\gamma.$$

Neka je ABC promatrani trokut, S središte njegove upisane kružnice te D dirалište upisane kružnice i stranice $\overline{AB}$.

Zbog sinusovog poučka je $2R\sin\gamma=c=|AB|$. (2 boda)

Iz trokuta ADS je $|AD|=r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, a iz trokuta BDS: $|BD|=r\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$. (4 boda)

Dakle $c=|AB|=|AD|+|DB|=r\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right)$, (4 boda)
pa slijedi

$$r\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right)=2R\sin\gamma$$

te stoga vrijedi i jednakost iz zadatka. (3 boda)

Zadatak A-3.8. (20 bodova)

Odredi sve cijele brojeve x za koje je $\log_2(x^2 - 4x - 1)$ cijeli broj.

Rješenje.

Neka je $\log_2(x^2 - 4x - 1) = k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Tada je $x^2 - 4x - 1 = 2^k$, odnosno $(x-2)^2 = 5 + 2^k$ (*) . (3 boda)

Ako je x cijeli broj, 2^k mora biti cijeli broj, pa je $k \geq 0$. (2 boda)

Za $k = 0$ dobivamo jednadžbu $(x-2)^2 = 6$ koja nema rješenja u $\mathbb{Z}$. (2 boda)

Za $k > 0$, broj $5 + 2^k$ je neparan, pa i x mora biti neparan. (2 boda)

Uvrstimo $x = 2n + 1$ u (*):

$(2n-1)^2 = 5 + 2^k$, $4n^2 - 4n + 1 = 5 + 2^k$, $2^k = 4(n(n-1) - 1)$, $2^{k-2} = n(n-1) - 1$.

(5 bodova)

Na desnoj strani je neparan broj, a to je jedino moguće za $k = 2$. (3 boda)

Tada je $n(n-1) = 2$; $n = 2$ ili $n = -1$; $x = 5$ ili $x = -1$. (3 boda)

Jedino za $x = -1$ i $x = 5$ vrijednost izraza $\log_2(x^2 - 4x - 1)$ je cijeli broj.

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A kategorija

29. siječnja 2009.

Zadatak A-4.1. (8 bodova)

U skupu realnih brojeva riješi jednadžbu $\sqrt{x^x} = x^{\sqrt{x}}$.

Rješenje.

Prvi način.

Iz jednadžbe vidimo da mora biti $x > 0$.

Zadana jednadžba ekvivalentna je s $x^{\frac{x}{2}} = x^{\sqrt{x}}$.

Ova jednakost vrijedi ako je $x = 1$ ili ako su eksponenti jednaki.

Iz jednadžbe $\dfrac{x}{2} = \sqrt{x}$ slijedi $x^2 - 4x = 0$, odnosno $x = 0$, $x = 4$.

Zbog uvjeta, rješenja polazne jednadžbe su samo $x = 1$ i $x = 4$.

Drugi način.

Iz jednadžbe vidimo da mora biti $x > 0$.

Kako su obje strane pozitivne, možemo logaritmirati: $\log x^{\frac{x}{2}} = \log x^{\sqrt{x}}$, pa slijedi $\frac{1}{2}x \log x = \sqrt{x} \log x$. Sada iz $\log x(\frac{1}{2}x - \sqrt{x})$ dobivamo dvije jednostavne jednadžbe: $\log x = 0$ i $\frac{1}{2}x = \sqrt{x}$, čija su rješenja $x = 1$ odnosno $x = 0$ i $x = 4$.

Zbog uvjeta, rješenja polazne jednadžbe su samo $x = 1$ i $x = 4$.

Za 4 boda: ispušteno rješenje $x = 1$ ili zadržano rješenje $x = 0$.
Za 8 bodova: točan rezultat i postupak.

Zadatak A-4.2. (8 bodova)

Treći član u razvoju binoma $\left(2 \cdot \sqrt[n]{2^{-1}} + \dfrac{4}{\sqrt[4-n]{4}}\right)^6$ je 240. Odredi n.

Rješenje.

Treći član u razvoju danog binoma je $\dbinom{6}{2} \cdot \left(2^{\frac{n-1}{n}}\right)^4 \cdot \left(4^{\frac{3-n}{4-n}}\right)^2$. (*)

Izjednačavanjem s 240 dobivamo $15 \cdot 16^{\frac{n-1}{n}} \cdot 16^{\frac{3-n}{4-n}} = 240$, odnosno $16^{\frac{n-1}{n}+\frac{3-n}{4-n}} = 16$, što je ekvivalentno jednadžbi $\dfrac{n-1}{n} + \dfrac{3-n}{4-n} = 1$.

Odavde dobivamo kvadratnu jednadžbu $n^2 - 4n + 4 = 0$ s jedinim rješenjem $n = 2$.

Za 4 boda: dobar postupak s greškom u računu, obavezno točno (*).
Za 8 bodova: točan rezultat i postupak.

Zadatak A-4.3. (8 bodova)

Izračunaj $\left(1+\cos\dfrac{\pi}{7}+i\sin\dfrac{6\pi}{7}\right)^{14}$.

Rješenje.

Prvi način.

Uočimo da je $1+\cos\dfrac{\pi}{7}=2\cos^2\dfrac{\pi}{14}$ i $\sin\dfrac{6\pi}{7}=\sin\dfrac{\pi}{7}=2\sin\dfrac{\pi}{14}\cos\dfrac{\pi}{14}$.

Stoga je

$$\begin{aligned}1+\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{6\pi}{7} &= 2\cos^2\frac{\pi}{14}+2i\sin\frac{\pi}{14}\cos\frac{\pi}{14}\\ &= 2\cos\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{14}+i\sin\frac{\pi}{14}\right).\end{aligned}$$

Potenciranjem konačno dobivamo

$$\begin{aligned}\left(1+\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{6\pi}{7}\right)^{14} &= \left(2\cos\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{14}+i\sin\frac{\pi}{14}\right)\right)^{14}\\ &= 2^{14}\left(\cos\frac{\pi}{14}\right)^{14}\left(\cos\frac{\pi}{14}+i\sin\frac{\pi}{14}\right)^{14}\\ &= 2^{14}\left(\cos\frac{\pi}{14}\right)^{14}(\cos\pi+i\sin\pi)\\ &= -2^{14}\left(\cos\frac{\pi}{14}\right)^{14}.\end{aligned}$$

Drugi način.

Broj $1+\cos\dfrac{\pi}{7}+i\sin\dfrac{6\pi}{7}$ transformirajmo koristeći formule pretvorbe zbroja u umnožak:

$$\begin{aligned}1+\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{6\pi}{7} &= \cos 0+i\sin 0+\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\\ &= \left(\cos 0+\cos\frac{\pi}{7}\right)+i\left(\sin 0+\sin\frac{\pi}{7}\right)\\ &= 2\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{\pi}{14}+2i\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{\pi}{14}\\ &= 2\cos\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{14}+i\sin\frac{\pi}{14}\right).\end{aligned}$$

Dalje nastavljamo kao u prvom rješenju.

Za 4 boda: dani broj prikazan u trigonometrijskom obliku ili dobar postupak i sitna greška u računu.

Za 8 bodova: točan rezultat i postupak.

Zadatak A-4.4. (8 bodova)

Tri različita realna broja, različita od nule, čine aritmetički niz, a njihovi kvadrati u istom poretku čine geometrijski niz. Odredi sve moguće vrijednosti kvocijenta tog geometrijskog niza.

Rješenje.

Prvi način.

Neka su $a-d$, a i $a+d$ brojevi koji čine aritmetički niz. Članovi geometrijskog niza su $(a-d)^2$, a^2 i $(a+d)^2$. To znači da mora vrijediti $(a-d)^2(a+d)^2 = (a^2)^2$, odnosno $(a^2-d^2)^2 = a^4$, odakle slijedi $d=0$ ili $d = \pm a\sqrt{2}$.

Kvocijent geometrijskog niza može biti $q_1 = 1$ (za $d=0$), ili (za $d = \pm a\sqrt{2}$):

$$q_{2,3} = \frac{(a+d)^2}{a^2} = 1 + 2\cdot\frac{d}{a} + \left(\frac{d}{a}\right)^2 = 1 \pm 2\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 3 \pm \sqrt{2}.$$

Drugi način.

Označimo te realne brojeve s a, b i c. Kako je to aritmetički niz, vrijedi $a+c=2b$. (*)

Kako je a^2, b^2, c^2 geometrijski niz, vrijedi $a^2c^2 = b^4$. (**)

Traženi kvocijent je $q = \dfrac{b^2}{a^2} = \dfrac{c^2}{b^2}$.

Kvadriranjem (*) dobivamo $a^2 + 2ac + c^2 = 4b^2$, odnosno nakon dijeljenja s b^2:

$$\frac{a^2}{b^2} + 2\cdot\frac{ac}{b^2} + \frac{c^2}{b^2} = 4. \qquad (***)$$

Iz (**) slijedi $b^2 = |ac|$, pa je $\dfrac{ac}{b^2} = \pm 1$. Stoga iz (***) dobivamo dvije jednadžbe:

$$\frac{1}{q} + 2 + q = 4 \qquad \text{i} \qquad \frac{1}{q} - 2 + q = 4,$$

odnosno njima ekvivalentne kvadratne jednadžbe: $q^2 - 2q + 1 = 0$ i $q^2 - 6q + 1 = 0$, s rješenjima $q_1 = 1$ odnosno $q_{2,3} = 3 \pm \sqrt{2}$.

Za 4 boda: barem jedno od rješenja $3 \pm \sqrt{2}$.
Za 8 bodova: točan rezultat i postupak.

Zadatak A-4.5. (8 bodova)

Koliki je zbroj svih prirodnih brojeva n za koje je broj $\dfrac{2009-n}{99}$ prirodan?

Rješenje.

Broj $\dfrac{2009-n}{99} = \dfrac{1980+29-n}{99} = 20 + \dfrac{29-n}{99}$ će biti prirodan za

$$n \in \{29,\ 29+1\cdot 99,\ 29+2\cdot 99, \ldots,\ 29+19\cdot 99\}.$$

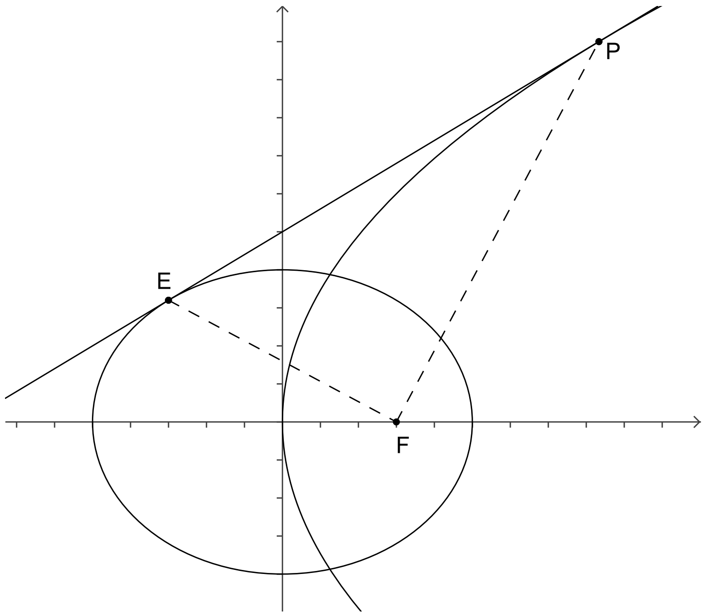
Zbroj tih brojeva iznosi $20\cdot 29 + 99(1+2+\ldots+19) = 580 + 99\cdot\frac{19\cdot 20}{2} = 19390$.

Za 4 boda: dobar postupak s greškom u računu.
Za 8 bodova: točan rezultat i postupak.

Zadatak A-4.6. (20 bodova)

Jedno od žarišta (fokusa) elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ je žarište parabole $y^2 = 2px$, a pravac $3x - 5y + 25 = 0$ je njihova zajednička tangenta. Dokaži da je trokut kojeg određuju zajedničko žarište i dva dirališta tangente pravokutan.

Rješenje.



Iz uvjeta dodira danog pravca $y = \frac{3}{5}x + 5$ i parabole $y^2 = 2px$ dobivamo $p = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot 5$, odnosno $p = 6$. (3 boda)

Stoga je jednadžba parabole $y^2 = 12x$, a zajedničko žarište elipse i parabole točka $F(3, 0)$. (2 boda)

Dakle, linearni ekscentricitet dane elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ je 3, pa je $a^2 - b^2 = 9$.
Iz uvjeta dodira danog pravca i elipse dobivamo jednadžbu $\frac{9}{25}a^2 + b^2 = 25$.
Zbrajanjem tih dviju jednadžbi odmah dobivamo $a = 5$, $b = 4$.
Jednadžba elipse je $16x^2 + 25y^2 = 400$. (4 boda)

Sada tražimo diralište pravca i elipse.
Uvrštavamo $y = \frac{3}{5}x + 5$ u jednadžbu elipse. Nakon sređivanja dobivamo jednadžbu $x^2 + 6x + 9 = 0$ s rješenjem $x = -3$, odakle slijedi $y = \frac{16}{5}$ pa je diralište pravca i elipse točka $E(-3, \frac{16}{5})$. (3 boda)

Za diralište pravca i parabole uvrštavamo $y = \frac{3}{5}x + 5$ u jednadžbu parabole. Sređivanjem se dobiva jednadžba $\frac{9}{25}x^2 - 6x + 25 = 0$ čije je rješenje $x = \frac{25}{3}$. Slijedi $y = 10$.
Tražena točka je $P(\frac{25}{3}, 10)$. (3 boda)

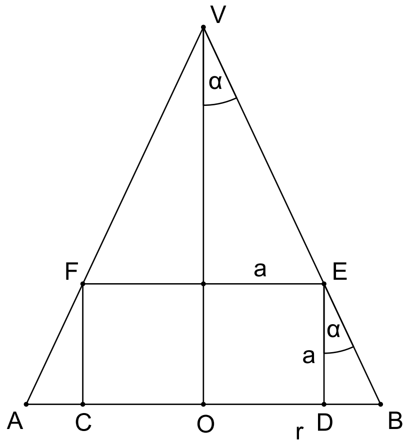
Koeficijenti smjera pravaca FE i FP su redom $\dfrac{\frac{16}{5} - 0}{-3 - 3} = -\dfrac{8}{15}$ te $\dfrac{10 - 0}{\frac{25}{3} - 3} = \dfrac{15}{8}$.
Iz toga odmah vidimo da su pravci FE i FP međusobno okomiti, tj. da je trokut EFP pravokutan. (5 bodova)

Zadatak A-4.7. (20 bodova)

Kut pri vrhu osnog presjeka uspravnog stošca je 2α, a polumjer osnovke r. U taj stožac je upisana pravilna šesterostrana prizma čiji su svi bridovi jednake duljine (jedna osnovka prizme leži u ravnini osnovke stošca, a preostali vrhovi na plaštu stošca). Izračunaj oplošje prizme pomoću α i r.

Rješenje.

Neka su svi bridovi upisane prizme duljine a i neka je ABV osni presjek danog stošca, a $CDEF$ presjek upisane prizme istom ravninom (vidi sliku). Lik $CDEF$ je pravokutnik sa stranicama duljina $|DE| = a$ i $|EF| = 2a$ (jer je $\overline{EF}$ duža dijagonala gornje baze prizme, pravilnog šesterokuta).



(5 bodova)

Kako je $\sphericalangle DEB = \sphericalangle OVB = \alpha$ (kutovi s paralelnim kracima),
iz pravokutnog trokuta DEB dobivamo $|DB| = |DE| \operatorname{tg} \alpha$, odnosno $r - a = a \operatorname{tg} \alpha$.
Odatle izrazimo $a = \dfrac{r}{1 + \operatorname{tg} \alpha}$. (5 bodova)

Oplošje dane prizme je $O = 2 \cdot \dfrac{6a^2\sqrt{3}}{4} + 6a^2 = a^2(3\sqrt{3} + 6)$. (5 bodova)

Uvrštavanjem izraza za a konačno dobivamo $O = \dfrac{r^2(3\sqrt{3} + 6)}{(1 + \operatorname{tg} \alpha)^2}$. (5 bodova)

Zadatak A-4.8. (20 bodova)

Niz (a_n) zadan je rekurzivno:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ za } n \geq 3.$$

Dokaži da vrijedi nejednakost $\quad a_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n \quad$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Rješenje.

Tvrdnju dokazujemo jednom varijantom matematičke indukcije: u koraku indukcije pokazat ćemo da, ako tvrdnja vrijedi za neka dva uzastopna prirodna broja, ona vrijedi i za broj koji slijedi. Stoga je potrebno provjeriti da tvrdnja vrijedi za $n = 1$ i $n = 2$.

$a_1 = 1 < \frac{7}{4}, \; a_2 = 3 = \frac{48}{16} < \frac{49}{16} = \left(\frac{7}{4}\right)^2$ pa je baza indukcije zadovoljena. (5 bodova)

Pretpostavimo da za neki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $\; a_{k-2} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k-2} \;$ i $\; a_{k-1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}$. (5 bodova)

Sada raspisujemo:

$$\begin{aligned} a_k &= a_{k-1} + a_{k-2} < \text{(po pretpostavci indukcije)} \\ &< \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} + \left(\frac{7}{4}\right)^{k-2} && \text{(3 boda)} \\ &= \left(\frac{7}{4}\right)^{k-2}\left(\frac{7}{4} + 1\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^{k-2} \cdot \frac{11}{4} = \left(\frac{7}{4}\right)^{k-2} \cdot \frac{44}{16} \\ &< \left(\frac{7}{4}\right)^{k-2} \cdot \frac{49}{16} = \left(\frac{7}{4}\right)^{k-2} \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^k. && \text{(5 bodova)} \end{aligned}$$

Pokazali smo da vrijedi $\; a_k < \left(\frac{7}{4}\right)^k$.

Po principu matematičke indukcije zaključujemo da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\; a_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$.

(2 boda)

Napomena: Ukoliko je baza indukcije provjerena samo za $n = 1$ oduzeti 5 bodova.
Ukoliko je pretpostavka indukcije da tvrdnja vrijedi za neki prirodni broj (a ne za dva uzastopna prirodna broja) oduzeti 5 bodova.
Tada se ipak može priznati preostalih 3+5+2 boda u nastavku.