

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske  
Agencija za odgoj i obrazovanje  
Hrvatsko matematičko društvo

## OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

29. siječnja 2009.

### UPUTE:

Na poledini ovog lista nalazi se 8 zadataka.

Prvih 5 zadataka vrijedi po 8 bodova.

Potpuno riješen zadatak nosi 8 bodova, a rješenje s manjom greškom 4 boda.

Zadaci 6., 7. i 8. vrijede po 20 bodova i detaljno se boduju.

Vrijeme rješavanja je 180 minuta.

Nije dopuštena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

## OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B kategorija

29. siječnja 2009.

1. Riješi nejednadžbu  $\frac{x+2}{x-3} \leq 1$  u skupu prirodnih brojeva.  
(8)
2. Odredi sve parove prirodnih brojeva  $(a, b)$  takve da je  $a + b = 378$  i  $D(a, b) = 63$   
(8) ( $D(a, b)$  je najveći zajednički djelitelj).
3. Za koje realne brojeve  $m$  jednadžba  $3x + 9 = m(m - x)$  ima jedinstveno rješenje?  
(8)
4. U kvadratu  $ABCD$  stranice duljine 6 cm na dijagonali  $\overline{AC}$  dana je točka  $T$  tako da  
(8) je  $|TC| = \frac{1}{4}|AC|$ . Pravac kroz točke  $B$  i  $T$  siječe stranicu  $\overline{CD}$  u točki  $P$ .  
Odredi udaljenost  $|PC|$ .
5. Paralelogram  $ABCD$  se može podijeliti na četiri jednakostranična trokuta stranice  
(8) duljine 2 cm. Kolika je duljina dulje dijagonale paralelograma?
6. Ako je  $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ , koliko je  $(a + 2b - 3c)^{2009}$ ?  
(20)
7. Pas trči za zecom koji je za 90 svojih skokova ispred njega. Dok zec skoči 6 puta,  
(20) pas skoči samo 5 puta, a dva pseća skoka jednako su dugačka kao tri zečja. Koliko će skokova napraviti zec do trenutka kada ga pas uhvati?
8. Poredaj po veličini vrijednosti izraza  $A$ ,  $B$  i  $C$ , ako je  $a \geq 1$ ,  $b \geq 1$ ,  $a < b$ ,  $x \neq y$ :  
(20)

$$A = \left[ \left( a + \frac{z - xy}{x - y} \right) \cdot \left( a - \frac{z - xy}{x - y} \right) + \left( \frac{z - xy}{x - y} \right)^2 \right] : b^2,$$

$$B = \left( \frac{a+1}{a+2} + \frac{1}{a} \right) : \left( \frac{a+1}{a} - \frac{1}{a+2} \right) \cdot (a+b),$$

$$C = \frac{a}{a + \frac{1}{a + \frac{1}{a}}} \cdot \frac{a + \frac{2}{a}}{a + \frac{1}{a}}$$

## OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B kategorija

29. siječnja 2009.

1. Racionaliziraj razlomak  $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}$ .  
(8)
2. Polinom  $f(x) = x^2 + px + q$  pri dijeljenju s polinomom  $g_1(x) = x - 1$  daje ostatak  
(8) 6, a pri dijeljenju s  $g_2(x) = x - 2$  ostatak 12. Odredi polinom  $f(x)$ .
3. Odredi kvadratnu jednadžbu s realnim koeficijentima kojoj je  $\left(\frac{i^{2009} + 1}{i^{2009} - 1}\right)^{2009}$  jedno  
(8) rješenje.
4. Riješi nejednadžbu  $\frac{x^2 + 3x - 5}{x^2 + 3x + 5} < 1$ .  
(8)
5. Nađi sva rješenja jednadžbe  $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 120$  u skupu kompleksnih  
(8) brojeva.
6. Dva pravokutna trokuta imaju zajedničku hipotenuzu. Razlika duljina kateta jednog  
(20) od njih je 9 cm, a drugog 13 cm. Zbroj površina ta dva trokuta je  $90 \text{ cm}^2$ . Izračunaj duljine njihovih kateta.
7. Za koje cijele brojeve  $k$  kvadratna jednadžba  $kx^2 + (2k - 1)x + k - 2 = 0$  ima  
(20) racionalna rješenja.
8. Dan je jednakokrakan trokut  $ABC$  takav da je  $|AC| = |BC| = 12 \text{ cm}$ . Paralela s  
(20) krakom prolazi polovištem visine na osnovicu trokuta i siječe osnovicu u točki  $M$  a drugi krak u točki  $N$ . Kolika je duljina dužine  $\overline{MN}$ ?

## OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B kategorija

29. siječnja 2009.

1. Izračunaj vrijednost izraza  $\log^2 5 + \log 2 \cdot \log 50$ .  
(8)
2. Odredi zbroj svih rješenja jednadžbe  $\log_8(\sin 2x) = -\frac{1}{3}$  na intervalu  $[0, 2\pi]$ .  
(8)
3. Duljina stranice pravilnog šesterokuta  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$  jednaka je 3 cm. Njegove stranice  $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6, A_6A_1$  su preko vrhova  $A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_1$  produžene za 5 cm do vrhova  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$  novog pravilnog šesterokuta. Kolika je duljina njegove stranice?  
(8)
4. S iste strane središta kugle položene su dvije paralelne ravnine čija su presjecišta s kuglom krugovi s površinama  $4\pi \text{ cm}^2$  i  $49\pi \text{ cm}^2$ . Ako je udaljenost tih ravnina jednaka 3 cm, koliki je polumjer kugle?  
(8)
5. Dokaži da za sve realne brojeve  $x$  vrijedi  $\sin^4 x + \cos^4 x \geq \frac{1}{2}$ .  
(8)
6. Koliki su šiljasti kutovi pravokutnog trokuta ako za njegove katete  $a, b$  i hipotenuzu  $c$  vrijedi  $4ab = c^2\sqrt{3}$ ?  
(20)
7. Riješi nejednadžbu  $(x + 1)^{-x^2 - 2x} > x + 1$ .  
(20)
8. Duljina hipotenuze pravokutnog trokuta je 15 cm, a jedan njegov kut je  $15^\circ$ . Izračunaj duljinu odreska simetrale pravog kuta koji je unutar trokuta.  
(20)

## OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B kategorija

29. siječnja 2009.

1. Odredi umnožak kvadrata rješenja jednadžbe  $z^3 - (1 + i)^2 = 0$ .  
(8)
2. Dokaži da je za svaki prirodan broj  $n \geq 2$  znamenka jedinica broja  $2^{2^n}$  jednaka 6.  
(8)
3. U raspisu izraza  $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4}\right)^n$  koeficijent trećeg člana je za 44 veći od koeficijenta drugog člana.  
(8)  
Odredi član koji ne sadrži  $x$ .
4. U trokutu  $ABC$  pravac vrhom  $A$  raspolavlja težišnicu iz vrha  $B$ . U kojem omjeru taj pravac dijeli stranicu  $\overline{BC}$ ?  
(8)
5. Odredi kut između tangenata parabole  $y^2 = 4x$  u točkama njezinog presjeka s pravcem  $2x + y - 12 = 0$ .  
(8)
6. Odredi sva rješenja jednadžbe  
(20)
$$(x^2 - 5x + 5)^{2 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^x + 4} = 1.$$
7. Prvi član aritmetičkog niza je  $a_1 = 7$ . Za članove niza vrijedi:  
(20)  $a_n - a_{n-1} = 2n + 5, n \geq 2$ . Koliko je  $a_{100}$ ?
8. Dana je hiperbola  $x^2 - y^2 = a^2$ . Odredi površinu paralelograma kojem dvije stranice  
(20) leže na njezinim asimptotama, a jedan vrh mu je točka na hiperboli. Dokaži da površina ne ovisi o odabiru točke!