OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B kategorija

29. siječnja 2009.

1. (8) Riješi nejednadžbu $\frac{x+2}{x-3} \leq 1$ u skupu prirodnih brojeva.

Rješenje.

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x-3} \leq 1 \quad &\iff \quad \frac{x+2-x+3}{x-3} \leq 0 \quad \iff \quad \frac{5}{x-3} \leq 0 \\ &\iff \quad x-3<0 \quad \iff \quad x<3. \end{aligned}$$

Tražena rješenja su $x = 1$ i $x = 2$. (za potpuno rješenje 8 bodova)

(uključeno rješenje $x = 3$ i/ili $x = 0$, 4 boda)

2. (8) Odredi sve parove prirodnih brojeva (a, b) takve da je $a + b = 378$ i $D(a, b) = 63$ ($D(a, b)$ je najveći zajednički djelitelj).

Rješenje. Iz $a = 63x$, $b = 63y$ dobivamo $63x + 63y = 378$ i $x + y = 6$, $x, y \in \mathbb{N}$, $D(x, y) = 1$.

Tada je $x \in \{1, 5\}$ i $y = 6 - x$ te je $(a, b) \in \{(63, 315), (315, 63)\}$

(za potpuno rješenje 8 bodova)

(ako napiše $x \in \{2, 4\}$ i $(a, b) \in \{126, 252), (252, 126)\}$ ili

$x \in \{3, 3\}$ i $(a, b) \in \{189, 189)\}$, 4 boda)

3. (8) Za koje realne brojeve m jednadžba $3x + 9 = m(m - x)$ ima jedinstveno rješenje?

Rješenje. Sređivanjem dobivamo $(m + 3)x = m^2 - 9$.

Za $m \neq -3$ je $m + 3 \neq 0$ pa postoji jedinstveno rješenje $x = m - 3$.

(za potpuno rješenje 8 bodova)

(za rješenje $x = m - 3$ (uvijek), 0 bodova)

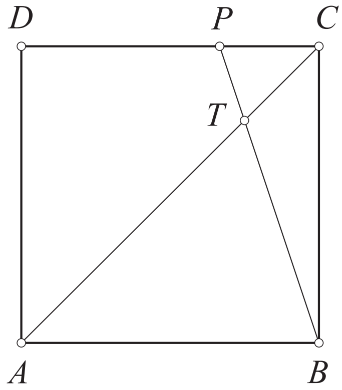
4. (8) U kvadratu $ABCD$ stranice duljine 6 cm na dijagonali $\overline{AC}$ dana je točka T tako da je $|TC| = \frac{1}{4}|AC|$. Pravac kroz točke B i T siječe stranicu $\overline{CD}$ u točki P.

Odredi udaljenost $|PC|$.

Rješenje. Trokuti ABT i CPT su slični (jednaki kutovi) i vrijedi

$$|AB| : |PC| = |AT| : |TC| = \frac{3}{4}|AC| : \frac{1}{4}|AC| = 3 : 1,$$

pa je $|PC| = \frac{1}{3}|AB| = 2$. Udaljenost $|PC|$ je 2 cm.



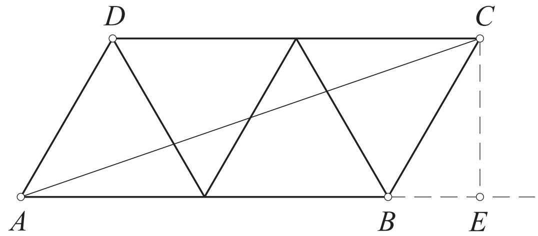
(za potpuno rješenje 8 bodova)

(za postavljene omjere 4 boda)

5. (8) Paralelogram $ABCD$ se može podijeliti na četiri jednakostranična trokuta stranice duljine 2 cm. Kolika je duljina dulje dijagonale paralelograma?

Rješenje. Nožište okomice iz vrha C na pravac AB označimo s E.

Trokut BCE je polovina jednakostraničnog, pa imamo $\sphericalangle CBE = 60°$, $|CB| = 2$ cm, $|CE| = \sqrt{3}$ cm, $|BE| = 1$ cm.



Po Pitagorinom poučku na $\triangle ACE$ dobivamo: $|AC|^2 = |AE|^2 + |EC|^2$, $(*)$
tj. $|AC| = \sqrt{5^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{28}$ (ili $2\sqrt{7}$).

(za potpuno rješenje 8 bodova)

(za primjenu Pitagorinog poučka $(*)$ 4 boda)

6. (20) Ako je $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$, koliko je $(a + 2b - 3c)^{2009}$?

Rješenje. Pomnožimo li zadanu jednakost s 2 i prebacimo sve na lijevu stranu dobit ćemo

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca = 0.$$

Preuredimo li jednakost dobivamo

$$a^2 + b^2 - 2ab + b^2 + c^2 - 2bc + c^2 + a^2 - 2ca = 0. \qquad \text{(3 boda)}$$

odnosno

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0 \qquad \text{(7 bodova)}$$

odakle je $a = b = c$ (5 bodova)

pa je tražena vrijednost jednaka nula. (5 bodova)

7. Pas trči za zecom koji je za 90 svojih skokova ispred njega. Dok zec skoči 6 puta,
(20) pas skoči samo 5 puta, a dva pseća skoka jednako su dugačka kao tri zečja. Koliko će skokova napraviti zec do trenutka kada ga pas uhvati?

Rješenje. Duljina psećeg skoka je jednaka $\frac{3}{2}$ duljine zečjeg, pa je 4 pseća skoka jednako duljini 6 zečjih skokova. (5 bodova)

Dok zec skoči 6 skokova pas skoči 5 puta pa za to vrijeme pas prevali udaljenost od $\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{4}$ zečjih skokova. (5 bodova)

Ako je x broj zečjih skokova, iz jednadžbe $90 + x = \frac{5}{4}x$ dobivamo $x = 360$. Pas će uloviti zeca nakon 360 zečjih (ili 300 psećih skokova). (10 bodova)

8. Poredaj po veličini vrijednosti izraza A, B i C, ako je $a \geq 1$, $b \geq 1$, $a < b$, $x \neq y$:
(20)

$$\begin{aligned}
A &= \left[\left(a + \frac{z - xy}{x - y}\right) \cdot \left(a - \frac{z - xy}{x - y}\right) + \left(\frac{z - xy}{x - y}\right)^2\right] : b^2, \\
B &= \left(\frac{a+1}{a+2} + \frac{1}{a}\right) : \left(\frac{a+1}{a} - \frac{1}{a+2}\right) \cdot (a+b), \\
C &= \frac{a}{a + \frac{1}{a + \frac{1}{a}}} \cdot \frac{a + \frac{2}{a}}{a + \frac{1}{a}}.
\end{aligned}$$

Rješenje.

$$\begin{aligned} A &= \left[\left(a+\frac{z-xy}{x-y}\right)\cdot\left(a-\frac{z-xy}{x-y}\right)+\left(\frac{z-xy}{x-y}\right)^2\right]:b^2 \\ &= \left[a^2-\left(\frac{z-xy}{x-y}\right)^2+\left(\frac{z-xy}{x-y}\right)^2\right]:b^2=\frac{a^2}{b^2}<1; \end{aligned}$$

(6 bodova)

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{a+1}{a+2}+\frac{1}{a}\right):\left(\frac{a+1}{a}-\frac{1}{a+2}\right)\cdot(a+b) \\ &= \frac{a(a+1)+a+2}{a(a+2)}:\frac{(a+2)(a+1)-a}{a(a+2)(a+2)(a+1)-a}\cdot(a+b) \\ &= \frac{a^2+2a+2}{a(a+2)}\cdot\frac{a(a+2)}{a^2+2a+2}\cdot(a+b)=a+b\geq 2; \end{aligned}$$

(6 bodova)

$$C=\frac{a}{a+\frac{1}{a+\frac{1}{a}}}\cdot\frac{a+\frac{2}{a}}{a+\frac{1}{a}}=\frac{a}{a+\frac{a}{a^2+1}}\cdot\frac{\frac{a^2+2}{a}}{\frac{a^2+1}{a}}=\frac{a^2+1}{a^2+2}\cdot\frac{a^2+2}{a^2+1}=1.$$

(6 bodova)

Poredak je $A<C<B$, tj. najmanja je vrijednost izraza A, a najveća je izraza B. (2 boda)

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B kategorija

29. siječnja 2009.

1. Racionaliziraj razlomak $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$.
(8)

Rješenje.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}} &= \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} \\
&= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} \qquad (*) \\
&= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} \\
&= \frac{\sqrt{6}(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{12}
\end{aligned}$$

(za potpuno rješenje 8 bodova)

(za dio rješenja do $(*)$ 4 boda)

(u nazivniku se može grupirati i na druge načine)

2. Polinom $f(x) = x^2 + px + q$ pri dijeljenju s polinomom $g_1(x) = x - 1$ daje ostatak
(8) 6, a pri dijeljenju s $g_2(x) = x - 2$ ostatak 12. Odredi polinom $f(x)$.

Prvo rješenje. Dijeljenjem polinoma $f(x)$ s polinomom $g_1(x)$ dobije se ostatak $p + q + 1$:

$$\begin{array}{lcl}
(x^2 + px + q) & : \ (x-1) & = \ x + p + 1 \\
\underline{-x^2 + x} & & \\
(p+1)x + q & & \\
\underline{-(p+1)x + (p+1)} & & \\
\qquad\qquad p + q + 1 & &
\end{array}$$

Dijeljenjem polinoma $f(x)$ s polinomom $g_2(x)$ dobije se ostatak $2p+q+4$:

$$\begin{array}{lcccc}
(x^2+px+q) & : & (x-2) & = & x+p+2 \\
\underline{-x^2+2x} & & & & \\
(p+2)x+q & & & & \\
\underline{-(p+2)x+(p+2)} & & & & \\
\qquad 2p+q+4 & & & &
\end{array}$$

Dobijemo sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\left.\begin{aligned} p+q+1 &= 6, \\ 2p+q+4 &= 12, \end{aligned}\right\} (*)$$

čija su rješenja $p=3$, $q=2$.

Traženi polinom je $f(x)=x^2+3x+2$.

(za potpuno rješenje 8 bodova)

(za barem jednu od jednadžbi sustava $(*)$ 4 boda)

Drugo rješenje. Poznato je (Bezoutov teorem) da je ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x)$ s $x-\alpha$ zapravo vrijednost $f(\alpha)$. Stoga je: $f(1)=6$ i $f(2)=12$. Dobijemo isti sustav kao u prvom rješenju.

(bodovanje isto kao u prvom rješenju)

Treće rješenje. Imamo

$$\begin{aligned} x^2+px+q &= (x-1)(x+\alpha)+6 = x^2+(\alpha-1)x-\alpha+6 \\ x^2+px+q &= (x-2)(x+\beta)+12 = x^2+(\beta-2)x-2\beta+12, \end{aligned}$$

odakle je

$$\left.\begin{aligned} \alpha-1=p, &\qquad -\alpha+6=q, \\ \beta-2=p, &\qquad -2\beta+12=q. \end{aligned}\right\} (*)$$

Rješavanjem ovog sustava jednadžbi dobijemo:

$$\alpha-1=\beta-2, \quad -\alpha+6=-2\beta+12, \qquad \text{tj.}$$

$$\alpha-\beta+1=0, \quad \alpha-2\beta+6=0.$$

Rješenje ovog sustava je $\alpha=4$, $\beta=5$, i onda $p=3$, $q=2$.

(za potpuno rješenje 8 bodova)

(za sustav jednadžbi $(*)$ 4 boda)

3. (8) Odredi kvadratnu jednadžbu s realnim koeficijentima kojoj je $\left(\dfrac{i^{2009}+1}{i^{2009}-1}\right)^{2009}$ jedno rješenje.

Rješenje. Kako je $i^{2009} = i^{4\cdot 502+1} = i$, izraz u zagradi jednak je

$$\frac{i+1}{i-1} = \frac{i+1}{i-1}\cdot\frac{i+1}{i+1} = \frac{2i}{-2} = -i.$$

Sada je $(-i)^{2009} = -i^{2009} = -i$.

Kako je jedno rješenje jednako $x_1 = -i$, drugo je $x_2 = i$, tražena kvadratna jednadžba je $(x+i)(x-i) = 0$ tj. $x^2+1=0$, ili svaka jednadžba oblika $ax^2+a=0$ za $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

(za potpuno rješenje 8 bodova)

(za određeno jedno rješenje kvadratne jednadžbe 4 boda)

4. (8) Riješi nejednadžbu $\dfrac{x^2+3x-5}{x^2+3x+5} < 1$.

Prvo rješenje. Kako je diskriminanta kvadratne jednadžbe $x^2+3x+5=0$, $D = 3^2-4\cdot 1\cdot 5 = -11 < 0$ lli se pokaže da vrijedi $x^2+3x+5 = \left(x+\dfrac{3}{2}\right)+\dfrac{11}{4} > 0$, nazivnik se strogo pozitivan za svaki x. $(*)$

Množenjem nejednakosti s x^2+3x+5 dobivamo

$$x^2+3x-5 < x^2+3x+5 \quad \text{tj.} \quad -5 < 5.$$

Kako je ova nejednakost istinita i polazna vrijedi za svaki $x \in \mathbb{R}$.

(za potpuno rješenje 8 bodova)

(za tvrdnju $(*)$ 4 boda)

Drugo rješenje. Redom imamo:

$$\begin{aligned} \frac{x^2+3x-5}{x^2+3x+5} &= 1-\frac{10}{x^2+3x+5} < 1 \\ \iff & \quad \frac{10}{x^2+3x+5} > 0. \qquad (*) \end{aligned}$$

Kako je diskriminanta kvadratne jednadžbe $x^2+3x+5=0$ negativna ili se pokaže da vrijedi $x^2+3x+5 = \left(x+\dfrac{3}{2}\right)+\dfrac{11}{4} > 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, polazna najednakost vrijedi za svaki $x \in \mathbb{R}$.

(za potpuno rješenje 8 bodova)

(za dobivenu nejednakost $(*)$ 4 boda)

5. (8) Nađi sva rješenja jednadžbe $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 120$ u skupu kompleksnih brojeva.

Rješenje. Zgodnim grupiranjem, množenjem i supstitucijom $t = x^2 + 5x$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
(x+1)(x+4)\cdot(x+2)(x+3) &= 120 \\
(x^2+5x+4)(x^2+5x+6) &= 120 \\
(t+4)(t+6) &= 120 \\
t^2+10t-96 &= 0 \qquad\qquad (*) \\
t_1 = 6, \qquad & t_2 = -16.
\end{aligned}$$

Sada treba riješiti dvije kvadratne jednadžbe

$$\begin{array}{rcl}
x^2+5x=6, & \qquad x^2+5x=-16, & \qquad \text{tj.} \\
x^2+5x-6=0, & \qquad x^2+5x+16=0. &
\end{array}$$

Njihova rješenja su $x_1 = -6$, $x_2 = 1$, $x_3 = \dfrac{-5 - i\sqrt{39}}{2}$, $x_4 = \dfrac{-5 + i\sqrt{39}}{2}$.

(za potpuno rješenje 8 bodova)

(za rješenja $t_{1,2}$ jednažbe (*) 4 boda)

(moguće su i druge supstitucije, npr. $t = x^2 + 5x + 5$)

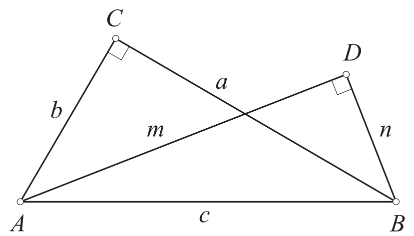
6. (20) Dva pravokutna trokuta imaju zajedničku hipotenuzu. Razlika duljina kateta jednog od njih je 9 cm, a drugog 13 cm. Zbroj površina ta dva trokuta je 90 cm^2. Izračunaj duljine njihovih kateta.

Prvo rješenje. Neka su a i b katete jednog te m i n katete drugog trokuta, a c njihova zajednička hipotenuza. Iz uvjeta zadatka imamo:

$$a^2+b^2=c^2, \qquad m^2+n^2=c^2,$$

$$a-b=9, \qquad m-n=13,$$

$$\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}mn=90.$$



Dobijemo sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} a-b &= 9, && (1)\\ m-n &= 13, && (2)\\ ab+mn &= 180, && (3)\\ a^2+b^2 &= m^2+n^2. && (4) \end{aligned}$$

(4 boda)

Iz prve i druge jednadžbe imamo

$$a=b+9, \quad m=13+n,$$

Iz $(4)+2\cdot(3)$ dobivamo

$$\begin{aligned} (a+b)^2-(m-n)^2 &= 360,\\ (9+2b)^2-13^2 &= 360,\\ b^2+9b-112 &= 0. \end{aligned}$$

Zadovoljava samo pozitivno rješenje $b=7$. Iz (1) je $a=16$. Duljine kateta prvog trokuta su 16 cm i 7 cm.

(8 bodova)

Za drugi trokut imamo:

$$\begin{aligned} m-n &= 13\\ mn &= 180-ab=68\\ n(13+n) &= 68\\ n^2+13n-68 &= 0. \end{aligned}$$

Zadovoljava samo pozitivno rješenje $n=4$. Sada je $m=17$. Duljine kateta drugog trokuta su 17 cm i 4 cm.

(8 bodova)

Drugo rješenje. Iz uvjeta zadatka dobivamo ove jednadžbe:

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= c^2 && (1)\\ a-b &= 9 && (2)\\ m^2+n^2 &= c^2 && (3)\\ m-n &= 13 && (4)\\ \frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}mn &= 90 \Longrightarrow\\ 2ab+2mn &= 360 && (5) \end{aligned}$$

(4 boda)

Iz (1) i (3) imamo

$$a^2 + b^2 = m^2 + n^2. \qquad (6)$$

Zbrajanjem (5) i (6) i sređivanjem dobivamo

$$(a+b)^2 = (m-n)^2 + 360 \quad \text{tj.} \quad (a+b)^2 = 13^2 + 360 = 529.$$

Konačno je

$$a + b = 23. \qquad (7)$$

(8 bodova)

Iz (2) i (7) imamo $a = 16$, $b = 7$.

Zbrajanjem $a^2 + b^2 = m^2 + n^2$ i $360 = 2ab + 2mn$ dobivamo

$$(a-b)^2 + 360 = (m+n)^2 \quad \text{tj.} \quad (m+n)^2 = 9^2 + 360 = 441$$

i zatim

$$m + n = 21. \qquad (8)$$

Iz (4) i (8) slijedi $m = 17$ i $n = 4$.

(8 bodova)

7. (20) Za koje cijele brojeve k kvadratna jednadžba $kx^2 + (2k-1)x + k - 2 = 0$ ima racionalna rješenja.

Rješenje. Nužno je i dovoljno da diskriminanta

$$D = (2k-1)^2 - 4k(k-2) = 4k + 1$$

bude kvadrat racionalnog broja m tj. $4k + 1 = m^2$. Odavde vidimo da m mora biti neparan cijeli broj. (5 bodova)

Kako je m neparan, tj. $m = 2a + 1$, imamo

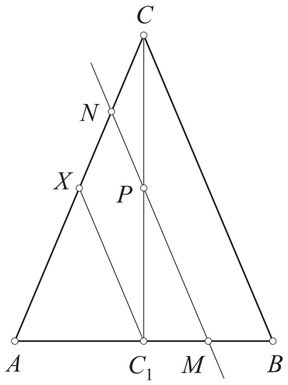
$$\begin{aligned} 4k + 1 &= (2a+1)^2 \\ 4k + 1 &= 4a^2 + 4a + 1 \\ k &= a^2 + a = a(a+1) \end{aligned}$$

(15 bodova)

Dakle, broj k mora biti oblika $a^2 + a$, $a \in \mathbb{Z}$ odnosno $a(a+1)$, tj. jednak umnošku dva uzastopna cijela broja. Diskriminanta je $D = 4k + 1 = (2a+1)^2$.

8. (20) Dan je jednakokračan trokut ABC takav da je $|AC| = |BC| = 12$ cm. Paralela s krakom prolazi polovištem visine na osnovicu trokuta i siječe osnovicu u točki M a drugi krak u točki N. Kolika je duljina dužine $\overline{MN}$?

Prvo rješenje. Dužina $\overline{MP}$ je srednjica trokuta C_1BC (pri čemu je C_1 nožište visine na osnovicu). Stoga je M polovište od $\overline{C_1B}$. (10 bodova)



Trokuti AMN i ABC su slični (jednaki kutovi). Koeficijent sličnosti je $k = \dfrac{|AM|}{|AB|} = \dfrac{3}{4}$.

(5 bodova)

Odavde slijedi $|MN| = \dfrac{3}{4}|BC| = 9$ cm. (5 bodova)

Drugo rješenje. Dužina $\overline{MP}$ je srednjica trokuta BCC_1 i $|MP| = \dfrac{1}{2}|BC| = 6$ cm.

(5 bodova)

Dužina $\overline{NP}$ je srednjica trokuta XC_1C, a $\overline{XC_1}$ je srednjica trokuta ABC. Zato je $|XC_1| = \dfrac{1}{2}|BC|$, pa je

$$|NP| = \frac{1}{2}|XC_1| = \frac{1}{4}|BC| = 3 \text{ cm}.$$

(10 bodova)

Stoga je $|MN| = |MP| + |PN| = 6 \text{ cm} + 3 \text{ cm} = 9$ cm. (5 bodova)

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B kategorija

29. siječnja 2009.

1. (8) Izračunaj vrijednost izraza $\log^2 5 + \log 2 \cdot \log 50$.

Prvo rješenje. Redom imamo:

$$\begin{aligned} \log^2 5 + \log 2 \cdot \log 50 &= \log^2 5 + \log 2 \cdot (\log 25 + \log 2) \\ &= \log^2 5 + \log 2 \cdot (2\log 5 + \log 2) \\ &= \log^2 5 + 2\log 5 \cdot \log 2 + \log^2 2 \\ &= (\log 5 + \log 2)^2 = (\log 10)^2 = 1. \end{aligned}$$

(za potpuno rješenje 8 bodova)

Drugo rješenje. Slično dobivamo:

$$\begin{aligned} \log^2 5 + \log 2 \cdot \log 50 &= \log^2 5 + \log 2 \cdot (\log 5 + \log 10) \\ &= \log^2 5 + \log 2 \cdot (\log 5 + 1) \\ &= \log^2 5 + \log 5 \cdot \log 2 + \log 2 \\ &= \log 5 \cdot (\log 5 + \log 2) + \log 2 \\ &= \log 5 \cdot \log 10 + \log 2 \\ &= \log 5 + \log 2 = \log 10 = 1. \end{aligned}$$

(za potpuno rješenje 8 bodova)

2. (8) Odredi zbroj svih rješenja jednadžbe $\log_8(\sin 2x) = -\dfrac{1}{3}$ na intervalu $[0, 2\pi]$.

Rješenje. Uz uvjet $\sin 2x > 0$ iz $\log_8(\sin 2x) = -\dfrac{1}{3} = \log_8 8^{-\frac{1}{3}} = \log_8 \dfrac{1}{2}$ dobivamo

$$\sin 2x = \frac{1}{2},$$

odakle je zadovoljen uvjet i imamo

$$2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ili} \quad 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,$$

tj.

$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi \quad \text{ili} \quad x = \frac{5\pi}{12} + k\pi. \qquad (*)$$

Na intervalu $[0, 2\pi]$ rješenja su $x_1 = \dfrac{\pi}{12}$, $x_2 = \dfrac{5\pi}{12}$, $x_3 = \dfrac{13\pi}{12}$, $x_1 = \dfrac{17\pi}{12}$.

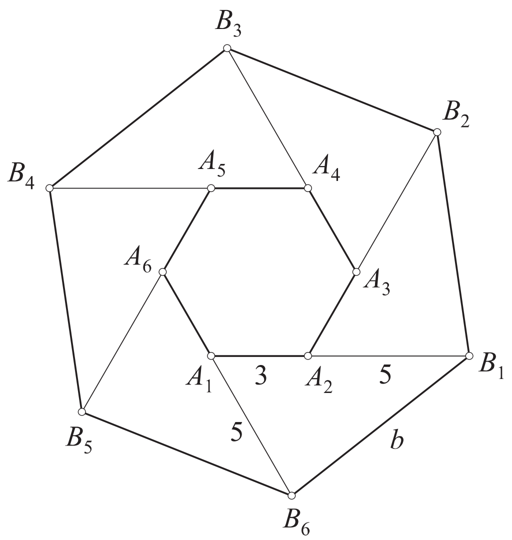
Zbroj svih rješenja je $\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{5\pi}{12} + \dfrac{13\pi}{12} + \dfrac{17\pi}{12} = 3\pi$.

(za potpuno rješenje 8 bodova)

(za dio rješenja $(*)$ 4 boda)

3. (8) Duljina stranice pravilnog šesterokuta $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ jednaka je 3 cm. Njegove stranice $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$, $\overline{A_4A_5}$, $\overline{A_5A_6}$, $\overline{A_6A_1}$ su preko vrhova A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_1 produžene za 5 cm do vrhova B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 novog pravilnog šesterokuta. Kolika je duljina njegove stranice?

Rješenje.



Po kosinusovom poučku vrijedi:

$$
\begin{aligned}
b^2 &= |B_1B_6|^2 = |A_1B_6|^2 + |A_1B_1|^2 - 2|A_1B_6| \cdot |A_1B_1| \cdot \cos \sphericalangle B_1A_1B_6 \\
&= 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 49,
\end{aligned}
$$

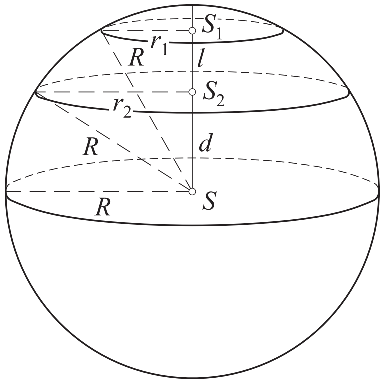
odakle je $b = 7$ cm.

(za potpuno rješenje 8 bodova)

(za pravilnu primjenu kosinusovog poučka, ali grešku u računu, 4 boda)

4. (8) S iste strane središta kugle položene su dvije paralelne ravnine čija su presjecišta s kuglom krugovi s površinama 4π cm^2 i 49π cm^2. Ako je udaljenost tih ravnina jednaka 3 cm, koliki je polumjer kugle?

Rješenje. Označimo s $r_1 = 2$ cm i $r_2 = 7$ cm polumjere presjeka paralelnih ravnina s kuglom, s $l = 3$ cm njihovu udaljenost te s R polumjer kugle.



Primjenom Pitagorinog poučka, iz slike dobivamo

$$\begin{aligned} R^2 &= r_1^2 + (d+l)^2 = r_1^2 + d^2 + 2dl + l^2 = 13 + d^2 + 6d, \\ R^2 &= r_2^2 + d^2 = 49 + d^2, \end{aligned}$$

a odavde $6d = 36$ tj. $d = 6$, $R = \sqrt{49+36} = \sqrt{85}$.

Polumjer kugle je $R = \sqrt{85}$ cm.

(za potpuno rješenje 8 bodova)

(za pravilnu primjenu Pitagorinog poučka barem u jednom slučaju 4 boda)

5. (8) Dokaži da za sve realne brojeve x vrijedi $\sin^4 x + \cos^4 x \geq \dfrac{1}{2}$.

Prvo rješenje. Imamo

$$\begin{aligned} \sin^4 x + \cos^4 x &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 \cos^2 x \\ &= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(za potpuno rješenje 8 bodova)

Drugo rješenje. Slično dobivamo

$$\begin{aligned} \sin^4 x + \cos^4 x &= (\sin^2 x)^2 + (1-\sin^2 x)^2 = 2\sin^4 x - 2\sin^2 x + 1 \\ &= \frac{1}{2}(4\sin^4 x - 4\sin^2 x + 1) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2\sin^2 x - 1)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(za potpuno rješenje 8 bodova)

Treće rješenje. Polazna nejednakost je ekvivalentna sljedećima:

$$\begin{aligned} \sin^4 x + \cos^4 x &\geq \frac{1}{2} \\ \iff \quad (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x &\geq \frac{1}{2} \\ \iff \quad 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x &\geq \frac{1}{2} \\ \iff \quad 4\sin^2 x \cos^2 x &\leq 1 \\ \iff \quad \sin^2 2x &\leq 1, \end{aligned}$$

a ovo uvijek vrijedi. Zato vrijedi i polazna nejednakost.

(za potpuno rješenje 8 bodova)

6. (20) Koliki su šiljasti kutovi pravokutnog trokuta ako za njegove katete a, b i hipotenuzu c vrijedi $4ab = c^2\sqrt{3}$?

Prvo rješenje. Za dani pravokutan trokut vrijedi $a^2 + b^2 = c^2$.

Za kut α nasuprot stranici duljine a uvrštavanjem u danu jednakost dobivamo:

$$\begin{aligned} 4ab &= \sqrt{3}a^2 + \sqrt{3}b^2 \qquad / : b^2 \\ 4\frac{a}{b} &= \sqrt{3}\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \sqrt{3} \\ \sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2\,\alpha - 4\,\mathrm{tg}\,\alpha + \sqrt{3} &= 0. \end{aligned}$$

(10 bodova)

Odavde dobivamo:

$\mathrm{tg}\,\alpha_1 = \sqrt{3}$ tj. $\alpha_1 = 60^\circ$, $\beta_1 = 30^\circ$ ili

$\mathrm{tg}\,\alpha_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ tj. $\alpha_2 = 30^\circ$, $\beta_2 = 60^\circ$.

Šiljasti kutovi tog trokuta su 30° i 60°. (10 bodova)

Drugo rješenje. Iz dane jednakosti dobivamo:

$$\begin{aligned} 4ab &= c^2\sqrt{3} \qquad / : c^2 \\ 4 \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} &= \sqrt{3} \\ 4\sin\alpha\cos\alpha &= \sqrt{3} \quad \text{tj.} \quad \sin 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

(10 bodova)

Odavde slijedi $2\alpha = 60°$ ili $2\alpha = 120°$ tj. $\alpha = 30°$ ili $\alpha = 60°$, odnosno $\beta = 60°$ ili $\beta = 30°$. (10 bodova)

Treće rješenje. Iz $a = c\sin\alpha$, $b = c\cos\alpha$ i dane jednakosti imamo

$$\begin{aligned} 4 \cdot c\sin\alpha \cdot c\cos\alpha &= c^2\sqrt{3} \quad / :\ 2c^2 \\ 2\sin\alpha\cos\alpha &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

odnosno $\sin 2\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (10 bodova)

Kutovi traženog trokuta su $30°$ i $60°$. (10 bodova)

7. Riješi nejednadžbu $(x+1)^{-x^2-2x} > x+1$.
(20)

Rješenje. Za $x+1 < 0$ izraz na lijevoj strani nije definiran, a za $x+1 = 0$ i $x+1 = 1$ nejednakost ne vrijedi. Preostaje promatrati slučajeve:

1° $0 < x+1 < 1$ tj. $-1 < x < 0$,

2° $1 < x+1$ tj. $x > 0$.

(6 bodova)

1° Redom dobivamo:

$$\begin{aligned} -x^2 - 2x &< 1 \\ x^2 + 2x + 1 &> 0 \\ (x+1)^2 &> 0, \end{aligned}$$

što je zadovoljeno za $x \neq -1$. U ovom slučaju nejednadžba je zadovoljena za $x \in \langle -1, 0\rangle$. (6 bodova)

2° Dobivamo

$$\begin{aligned} -x^2 - 2x &> 1 \\ x^2 + 2x + 1 &< 0 \\ (x+1)^2 &< 0. \end{aligned}$$

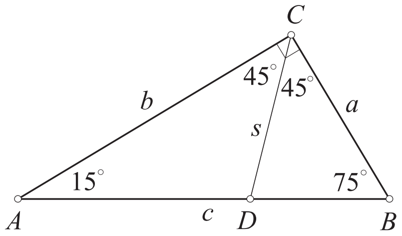
U ovom slučaju nijedan x ne zadovoljava nejednadžbu. (6 bodova)

Konačno rješenje je $x \in \langle -1, 0\rangle$. (2 boda)

8. Duljina hipotenuze pravokutnog trokuta je 15 cm, a jedan njegov kut je $15°$. Izračunaj
(20) duljinu odreska simetrale pravog kuta koji je unutar trokuta.

Prvo rješenje. Simetrala pravog kuta siječe hipotenuzu u točki D. Označimo s s duljinu odreska simetrale pravog kuta unutar trokuta.

Promatrajmo trokute ABC i ADC:



$$\cos 15^\circ = \frac{b}{c} \quad \text{tj.} \quad b = c\cos 15^\circ = 15\cos 15^\circ;$$

$$\frac{b}{s} = \frac{\sin(180^\circ - (45^\circ + 15^\circ))}{\sin 15^\circ} = \frac{\sin 120^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2\sin 15^\circ},$$

(10 bodova)

odakle dobivamo

$$s = \frac{2b\sin 15^\circ}{\sqrt{3}} = \frac{2\cdot 15\cdot \cos 15^\circ \sin 15^\circ}{\sqrt{3}} = \frac{15\cdot \sin 30^\circ}{\sqrt{3}} = \frac{15}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

(8 bodova)

Duljina odreska simetrale pravog kuta je $s = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ cm. (2 boda)

Drugo rješenje. Kako je s simetrala pravog kuta, površina trokuta ABC jednaka je zbroju površina trokuta ADC i BDC, pa imamo

$$P = \frac{sa\sin 45^\circ + sb\sin 45^\circ}{2} = \frac{s(a+b)\sqrt{2}}{4}.$$

odavde je

$$s = \frac{4P}{(a+b)\sqrt{2}} = \frac{2ab}{(a+b)\sqrt{2}}.$$

(8 bodova)

Iz $a = c\sin 15^\circ$ i $b = c\cos 15^\circ$ dobivamo

$$2ab = 2c^2\sin 15^\circ \cos 15^\circ = c^2 \sin 30^\circ = \frac{c^2}{2}.$$

(5 bodova)

Nadalje,

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab = \frac{3}{2}c^2 \quad \text{tj.} \quad a + b = c\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

(5 bodova)

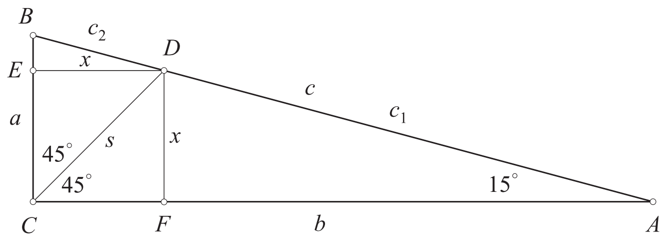
Konačno je

$$s=\frac{\frac{c^2}{2}}{c\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{2}}=\frac{c}{2\sqrt{3}}=\frac{c\sqrt{3}}{6}.$$

Duljina odreska simetrale pravog kuta je $s=\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm.

(2 boda)

Treće rješenje. Odrezak simetrale pravog kuta unutar trokuta je dijagonala kvadrata $CFDE$ stranice duljine x. Tada je tražena duljina $s=x\sqrt{2}$.



Iz trokuta ADF i DBE dobivamo $c_1=\frac{x}{\sin 15^\circ}$, $c_2=\frac{x}{\cos 15^\circ}$ i

$$c_1+c_2=c=15=x\cdot\left(\frac{1}{\sin 15^\circ}+\frac{1}{\cos 15^\circ}\right)=\frac{x\cdot(\sin 15^\circ+\cos 15^\circ)}{\sin 15^\circ\cos 15^\circ}.$$

(10 bodova)

Pomnožimo li ovo sa $2\sin 15^\circ\cos 15^\circ=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$ dobivamo

$$2x\cdot(\sin 15^\circ+\cos 15^\circ)=\frac{15}{2}.$$

Kvadriranjem slijedi

$$4x^2(1+\sin 30^\circ)=\frac{225}{4}$$

odakle imamo

$$x^2=\frac{\frac{225}{4}}{4\cdot\frac{3}{2}}=\frac{225}{16}\cdot\frac{2}{3}.$$

(8 bodova)

Konačno je $x=\frac{15}{4}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}$ i $s=\frac{15}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

(2 boda)

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B kategorija

29. siječnja 2009.

1. Odredi umnožak kvadrata rješenja jednadžbe $z^3 - (1+i)^2 = 0$.

(8) *Prvo rješenje.* Redom imamo:

$$\begin{aligned}
z^3 &= (1+i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i, \\
2i &= 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right); \\
z &= \sqrt[3]{2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)}, \\
z_k &= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2(k-1)\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2(k-1)\pi}{3}\right) \\
&= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi + 4(k-1)\pi}{6} + i\sin\frac{\pi + 4(k-1)\pi}{6}\right),\ k = 1, 2, 3, \qquad (*) \\
z_1 &= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right), \\
z_2 &= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right), \\
z_3 &= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -\sqrt[3]{2}i.
\end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 &= -2i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -2i\left(-\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) = 2i, \\
z_1^2 \cdot z_2^2 \cdot z_3^2 &= (2i)^2 = -4.
\end{aligned}$$

(za potpuno rješenje 8 bodova)

(za određivanje rješenja $(*)$, 4 boda)

Drugo rješenje. Zadatak se može riješiti i pomoću Vièteovih formula. Za jednadžbu trećeg stupnja $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, gdje su $x_1,\ x_2,\ x_3$ njezina rješenja, vrijedi $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}$.

U danom slučaju imamo:

$$\begin{aligned} z^3 - (1+i)^2 &= 0, \\ z^3 - 2i &= 0, \qquad\qquad (**) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 &= 2i, \\ z_1^2 \cdot z_2^2 \cdot z_3^2 &= (2i)^2 = -4. \end{aligned}$$

(za potpuno rješenje 8 bodova)

(za preuređenu jednadžbu $(**)$ 4 boda)

2. (8) Dokaži da je za svaki prirodan broj $n \geq 2$ znamenka jedinica broja 2^{2^n} jednaka 6.

Rješenje. Dokaz provodimo matematičkom indukcijom.

Baza indukcije: Za $n = 2$ imamo

$$2^{2^2} = 2^4 = 16,$$

pa tvrdnja vrijedi.

Pretpostavka indukcije: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki prirodan broj $n \geq 2$, tj. znamenka jedinica broja 2^{2^n} je 6.

Korak indukcije: Dokažimo da tvrdnja vrijedi za $n + 1$:

$$2^{2^{n+1}} = 2^{2^n \cdot 2} = \left(2^{2^n}\right)^2 = (\overline{*6})^2 = \overline{**6}.$$

Dakle, tvrdnja vrijedi i za $n + 1$, pa po principu matematičke indukcije vrijedi za svaki prirodan broj $n \geq 2$.

(za potpuno rješenje 8 bodova)

(za točnu bazu i pretpostavku indukcije 4 boda)

3. (8) U raspisu izraza $\left(x\sqrt{x} + \dfrac{1}{x^4}\right)^n$ koeficijent trećeg člana je za 44 veći od koeficijenta drugog člana.

Odredi član koji ne sadrži x.

Rješenje. Uvjet zadatka može se zapisati u obliku $\binom{n}{2} = \binom{n}{1} + 44$.

Odavde sređivanjem dobivamo

$$\frac{n(n-1)}{2} = n+44$$

$$n^2-3n-88 = 0 \quad \Rightarrow \quad n_1=11,\ n_2=-8.$$

Jedina mogućnost je $n=11$. Neka je A_k koeficijent uz onaj član koji je jednak nuli. Tada je

$$A_k = \binom{11}{k}\left(x\sqrt{x}\right)^{11-k}\left(\frac{1}{x^4}\right)^k = \binom{11}{k}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{11-k}\cdot x^{-4k} = \binom{11}{k}\cdot x^{\frac{3}{2}(11-k)-4k}.$$

Kako A_k ne sadrži x imamo

$$\frac{3}{2}(11-k)-4k=0 \quad \Rightarrow \quad k=3.$$

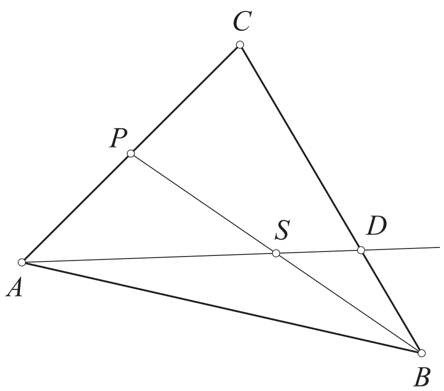
Član koji ne sadrži x je $A_3=\binom{11}{3}=165.$

(za potpuno rješenje 8 bodova)

(za izračunato $n=11$, 4 boda)

4. U trokutu ABC pravac vrhom A raspolavlja težišnicu iz vrha B. U kojem omjeru
(8) taj pravac dijeli stranicu $\overline{BC}$?

Prvo rješenje (vektorsko). Prikažimo vektor $\overrightarrow{AD}$ na dva načina.



$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\alpha\overrightarrow{BC},\\
\overrightarrow{AD} &= \beta\overrightarrow{AS}=\beta\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BP}\right)\\
&= \beta\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}\right)\right)=\beta\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\right).
\end{aligned}$$

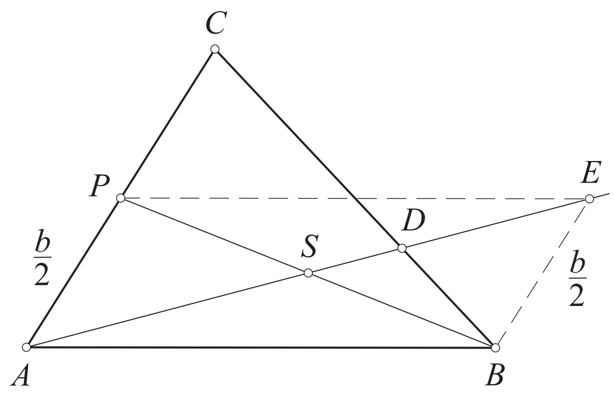
Zbog linerne nezavisnosti vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ iz $\overrightarrow{AB}+\alpha\overrightarrow{BC}=\beta\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\right)$ imamo

$$1=\frac{3}{4}\beta,\ \alpha=\frac{1}{4}\beta \quad \Rightarrow \quad \beta=\frac{4}{3},\ \alpha=\frac{1}{3},$$

odakle dobivamo $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, odnosno točka D dijeli dužinu $\overline{BC}$ u omjeru $1:2$.

(za potpuno rješenje 8 bodova)

Drugo rješenje (geometrijsko). Neka je $|AS|=|SE|$. Četverokut $ABEP$ je paralelogram.



Iz sličnosti trokuta BED i CAD dobivamo

$$\frac{|BD|}{|CD|}=\frac{|BE|}{|CA|}=\frac{1}{2},$$

pa je traženi omjer jednak $\frac{1}{2}$.

(za potpuno rješenje 8 bodova)

5. (8) Odredi kut između tangenata parabole $y^2=4x$ u točkama njezinog presjeka s pravcem $2x+y-12=0$.

Rješenje. Točke presjeka parabole i pravca dobivamo iz jednadžbi:

$$y^2=4x \quad \text{i} \quad y=-2x+12.$$

Odavde je

$$\begin{aligned}(-2x+12)^2 &= 4x,\\ x^2-13x+36 &= 0,\\ x_1=9, &\qquad x_2=4,\\ S_1(9,-6), &\qquad S_2(4,4).\end{aligned}$$

Jednadžbe tangenata parabole su:

$$t_1 \quad \ldots \qquad y\cdot(-6) = 2\cdot(x+9) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{3}x - 3 \quad \Rightarrow \quad k_1 = -\frac{1}{3},$$

$$t_2 \quad \ldots \qquad y\cdot 4 = 2\cdot(x+4) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}x + 2 \quad \Rightarrow \quad k_2 = \frac{1}{2}.$$

Kut α između tangenata određuje se iz relacije

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right| = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1,$$

pa je traženi kut jednak $\alpha = 45°$.

(za potpuno rješenje 8 bodova)

(za točne koeficijente smjerova tangenata $k_1,\ k_2$, 4 boda)

6. (20) Odredi sva rješenja jednadžbe

$$(x^2 - 5x + 5)^{2\cdot 4^x - 9\cdot 2^x + 4} = 1.$$

Rješenje. Promatrat ćemo tri slučaja.

1° Baza je jednaka 1.

$$x^2 - 5x + 5 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1,\ x_2 = 4.$$

Oba rješenja zadovoljavaju polaznu jednadžbu. (6 bodova)

2° Eksponent je jednak nuli, a baza različita od nule.

$$2\cdot 4^x - 9\cdot 2^x + 4 = 0.$$

Uz supstituciju $t = 2^x$ dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$2t^2 - 9t + 4 = 0$$

čija su rješenja $t_1 = 4$ i $t_2 = \frac{1}{2}$. Odavde dobivamo $x_3 = 2$ i $x_4 = -1$. Kako je za ova rješenja baza različita od nule, oba zadovoljavaju polaznu jednadžbu. (8 bodova)

3° Eksponent je paran broj, a baza jednaka -1.

$$x^2 - 5x + 5 = -1 \quad \Rightarrow \quad x_5 = 2,\ x_6 = 3.$$

U oba slučaja je eksponent paran pa su ovo rješenja polazne jednadžbe.

(6 bodova)

Sva rješena jednadžbe su: $-1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$

7. Prvi član aritmetičkog niza je $a_1 = 7$. Za članove niza vrijedi:
(20) $a_n - a_{n-1} = 2n + 5,\ n \geq 2$. Koliko je a_{100}?

Rješenje. Raspišimo:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 7 \\
a_2 - a_1 &= 9 \\
a_3 - a_2 &= 11 \\
a_4 - a_3 &= 13 \\
&\vdots \\
a_{100} - a_{99} &= 205
\end{aligned}$$

(10 bodova)

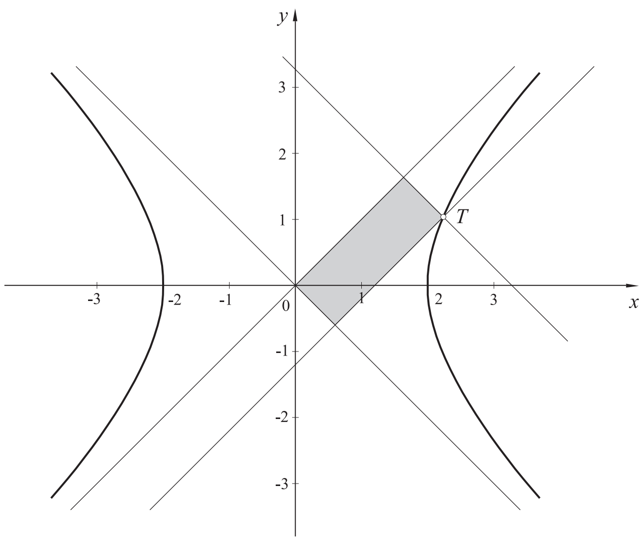
Odavde zbrajanjem dobivamo

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + a_4 - a_3 + \ldots + a_{100} - a_{99} &= 7 + 9 + 11 + 13 + \ldots + 205 \\
a_{100} &= \frac{100(7 + 205)}{2} \\
a_{100} &= 10600.
\end{aligned}$$

(10 bodova)

8. Dana je hiperbola $x^2 - y^2 = a^2$. Odredi površinu paralelograma kojem dvije stranice
(20) leže na njezinim asimptotama, a jedan vrh mu je točka na hiperboli. Dokaži da površina ne ovisi o odabiru točke!

Rješenje.



Točka T ove hiperbole dana je s $T(x_0, y_0) = T\left(x_0, \pm\sqrt{x_0^2 - a^2}\right)$.

Asimptote hiperbole su: $y = -x,\ y = x$. (3 boda)

Kako su one međusobno okomite, određuju pravokutnik.

Označimo s d_1 i d_2 udaljenosti točke T od asimptota. Tada je tražena površina dana s $P = d_1 d_2$. (5 bodova)

Nadalje, udaljenosti točke $T(x_0, y_0)$ od asimptota su

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{|x_0 + y_0|}{\sqrt{2}}, \quad (\text{od } x + y = 0) \\ d_2 &= \frac{|x_0 - y_0|}{\sqrt{2}}, \quad (\text{od } x - y = 0) \end{aligned}$$

(10 bodova)

pa je tražena površina jednaka

$$P = \frac{|x_0 + y_0|}{\sqrt{2}} \cdot \frac{|x_0 - y_0|}{\sqrt{2}} = \frac{|x_0^2 - y_0^2|}{} = \frac{a^2}{2},$$

jer je T na hiperboli. Vidimo da površina ne ovisi o izboru točke T! (2 boda)