ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
4. razred – rješenja
23. veljače 2009.

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Zadatak rješavamo unatrag. Kako smo od nepoznatog broja prvo oduzeli 5, zatim dobiveni broj podijelili s 5, te naposlijetku još oduzeli 5, suprotnim računskim operacijama doći ćemo do traženog broja. 1 BOD

Zadnji dobiveni broj bio je 5. Dodamo li tom broju broj 5, dobivamo $5 + 5 = 10$. 3 BODA

Nadalje, pomnožimo li broj 10 s 5, dobivamo $10 \cdot 5 = 50$. 3 BODA

Konačno, dodamo li broju 50 broj 5, dobivamo $50 + 5 = 55$, pa matematičar ima 55 godina. 3 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

2. Zadatak rješavamo Gaussovom dosjetkom. Neparni dvoznamenkasti prirodni brojevi su $11, 13, 15, 17, \ldots, 99$. Ukupno ih je $5 \cdot 9 = 45$. Grupiramo ih u parove: prvi i zadnji, drugi i predzadnji, $\ldots$, pri čemu srednji broj 55 ostaje bez para. 3 BODA

Kako imamo 22 para, imamo redom

$$\begin{aligned} 11 + 13 + 15 + \ldots + 99 &= (11 + 99) + (13 + 97) + \ldots + (53 + 57) + 55 \\ &= 110 + 110 + \ldots + 110 + 55 \\ &= 22 \cdot 110 + 55 \\ &= 2420 + 55 \\ &= 2475. \end{aligned}$$

7 BODOVA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

3. Ukupan broj riješenih zadataka je 2009. Kako je učenik riješio tri puta više računskih zadataka i još jedan, u odnosu na preostale, zaključujemo da je učenik zajedno riješio $(2009 - 1) : 4 = 2008 : 4 = 502$ preostala zadatka. 2 BODA

Prema tome, broj računskih zadataka je $502 \cdot 3 + 1 = 1506 + 1 = 1507$. 2 BODA

Nadalje, kako je učenik riješio zagonetki isto koliko pričica i geometrijskih zajedno, slijedi da je riješio $502 : 2 = 251$ zagonetku. 2 BODA

Prema tome, učenik je zajedno riješio 251 pričicu i geometrijski zadatak. Kako je geometrijskih riješio za 101 manje, zaključujemo da je geometrijskih riješio $(251 - 101) : 2 = 150 : 2 = 75$. 2 BODA

Konačno, broj riješenih pričica je $75 + 101 = 176$. 2 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

4. Kako je $54 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, broj 54 možemo na tri načina zapisati u obliku umnoška triju jednoznamenkastih brojeva: $55 = 1 \cdot 6 \cdot 9$, $55 = 2 \cdot 3 \cdot 9$, $55 = 3 \cdot 3 \cdot 6$. 1 BOD

Ako je $55 = 1 \cdot 6 \cdot 9$, imamo brojeve 169, 196, 619, 691, 916, 961. 3 BODA

Ako je $55 = 2 \cdot 3 \cdot 9$, imamo brojeve 239, 293, 329, 392, 923, 932. 3 BODA

Ako je $55 = 3 \cdot 3 \cdot 6$, imamo brojeve 336, 363, 633. 2 BODA

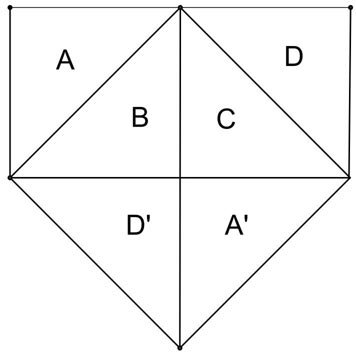
Dakle, ukupno je $6 + 6 + 3 = 15$ troznamenkastih brojeva čiji je umnožak znamenaka jednak 54. 1 BOD

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

5.

2 BODA

Pravokutnik podijelimo na dva jednaka kvadrata, a zatim svaki kvadrat na dva jednaka trokuta. Na takav način dobivamo četiri jednaka pravokutna trokuta (A, B, C, D). Dva trokuta zadržimo u pravokutniku, a preostala dva premjestimo na drugu stranu (A', D'), tako da tvore kvadrat.



8 BODOVA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

5. razred – rješenja

23. veljače 2009.

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

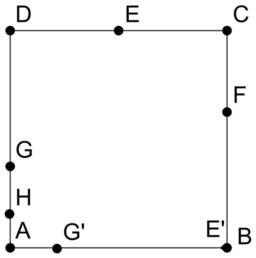
1. Možemo promatrati paralelograme koji su sastavljeni od dva trokuta, od četiri trokuta i cijeli lik. 2 BODA
Paralelograma sastavljenih od dva trokuta ima 8. 3 BODA
Paralelograma sastavljenih od četiri trokuta ima 4. 3 BODA
Cijeli lik je paralelogram. 1 BOD
Dakle, na slici je $8 + 4 + 1 = 13$ paralelograma. 1 BOD
. . . . UKUPNO 10 BODOVA

2. Zbroj znamenaka bilo kojeg deseteroznamenkastog broja sastavljenog od znamenaka 0 i 5 je višekratnik broja 5. 2 BODA
Nadalje, kako tražimo brojeve koji su djeljivi s 9, zbroj znamenaka mora biti djeljiv s 9.
Kako su brojevi 5 i 9 relativno prosti, slijedi da traženi brojevi moraju imati točno devet petica i jednu nulu. Tada je zbroj znamenaka jednak $9 \cdot 5 = 45$. 2 BODA
Nula ne može biti na prvom mjestu pa imamo brojeve: 5055555555, 5505555555, 5550555555, 5555055555, 5555505555, 5555550555, 5555555055, 5555555505, 5555555550. 5 BODOVA
Dakle, ukupno je 9 brojeva koji zadovoljavaju uvjete zadatka. 1 BOD
. . . . UKUPNO 10 BODOVA

3. Zbroj prvih 2009 brojeva jednak je $1 + 2 + 3 + \cdots + 2008 + 2009 = \frac{2009 \cdot 2010}{2} = 2009 \cdot 1005$. 4 BODA
Rastavimo dobiveni umnožak na faktore: $2009 \cdot 1005 = (7 \cdot 7 \cdot 41) \cdot (3 \cdot 5 \cdot 67) = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 41 \cdot 67$. 4 BODA
Dakle, jednoznamenkasti brojevi s kojima je djeljiv zbroj prvih 2009 prirodnih brojeva su 1, 3, 5, 7. 2 BODA
. . . . UKUPNO 10 BODOVA

4. Neka je x broj redova voćaka u voćnjaku. Tada je u voćnjaku $15 \cdot x$ voćaka. 1 BOD
Kada bi u voćnjaku bilo 6 redova manje, a u svakom redu 5 voćaka više, u voćnjaku bi bilo $20 \cdot (x - 6) = 20 \cdot x - 120 = 15 \cdot x + (5 \cdot x - 120)$ voćaka. 3 BODA
Dakle, brojevi voćaka se razlikuju za $5 \cdot x - 120$, a prema uvjetu zadatka ta je razlika jednaka 10. 2 BODA
Dakle, $5 \cdot x - 120 = 10$, pa je $5 \cdot x = 130$, odakle je $x = 130 : 5 = 26$.
Dakle, zasađeno je 26 redova voćaka. 4 BODA
. . . . UKUPNO 10 BODOVA

5. Vratimo kvadrat $ABCD$ u prvobitni oblik, te označimo na njemu sve vrhove uočenih trokuta.
Označimo točku G dvaput, jednom na stranici $\overline{AD}$ (G), a jednom na stranici $\overline{AB}$ (G').
Napravimo isto i s točkom E.



2 BODA
Uočimo kako je svaka od stranica triju trokuta CEF, EDG i GAH sadržana u nekoj stranici kvadrata $ABCD$, te da sve te stranice zajedno pokrivaju sve stranice kvadrata. 3 BODA
Zbog toga je zbroj opsega trokuta CEF, EDG i GAH jednak opsegu kvadrata, odnosno jednak je $4 \cdot 9 = 36$ cm. 5 BODOVA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
6. razred – rješenja
23. veljače 2009.

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Niko je prvog dana pretrčao $\frac{13}{3}$ km. 1 BOD

Drugog dana je pretrčao $\frac{13}{3}+1\frac{3}{5}=\frac{13}{3}+\frac{8}{5}=\frac{13\cdot 5+8\cdot 3}{15}=\frac{89}{15}$ km. 2 BODA

Trećeg dana Niko je pretrčao $\frac{89}{15}-\frac{4}{15}=\frac{85}{15}=\frac{17}{3}$ km. 2 BODA

Četvrtog dana je pretrčao $\frac{13}{3}+\frac{17}{3}-5=\frac{30}{3}-5=10-5=5$ km. 2 BODA

Dakle, Niko je ukupno pretrčao $\frac{13}{3}+\frac{89}{15}+\frac{17}{3}+5=15+\frac{89}{15}=\frac{225+89}{15}=\frac{314}{15}=20\frac{14}{15}$ km. 3 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

2. Ako s x označimo ukupan broj kuglica, tada je $\frac{3}{7}x$ žutih i $\frac{4}{7}x$ plavih. 2 BODA

Ukoliko Martin dobije dvije žute kuglice te izgubi šest plavih kuglica, on ima jednak broj žutih i plavih kuglica, pa vrijedi jednadžba $\frac{3}{7}x+2=\frac{4}{7}x-6$. 3 BODA

Dalje je $\frac{4}{7}x-\frac{3}{7}x=2+6$, tj. $\frac{1}{7}x=8$, odakle je $x=56$. 3 BODA

Prema tome, Martin je na početku imao $\frac{3}{7}\cdot 56=24$ žute i $\frac{4}{7}\cdot 56=32$ plave kuglice. 2 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

3. Neka je $\overline{abc}$ troznamenkasti broj za koji je $a+b+c=18$. Ako je broj djeljiv s 18, onda je djeljiv s 2 i 9. Očito, svaki takav broj $\overline{abc}$ je djeljiv s 9, pa mora biti paran, tj. $c\in\{0,2,4,6,8\}$. 1 BOD

Ako je $c=0$, onda je $a+b=18$, odakle dobivamo broj 990. 1 BOD

Ako je $c=2$, onda je $a+b=16$, odakle dobivamo brojeve 972, 882, 792. 1 BOD

Ako je $c=4$, onda je $a+b=14$, odakle dobivamo brojeve 954, 864, 774, 684, 594. 2 BODA

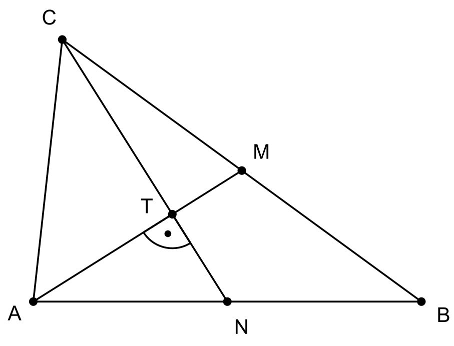
Ako je $c=6$, onda je $a+b=12$, odakle dobivamo brojeve 936, 846, 756, 666, 576, 486, 396. 2 BODA

Ako je $c=8$, onda je $a+b=10$, odakle dobivamo brojeve 918, 828, 738, 648, 558, 468, 378, 288, 198. 2 BODA

Dakle, ukupno je $1+3+5+7+9=25$ brojeva. 1 BOD

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

4.



1 BOD

Promotrimo trokute ANC i NBC. Oni imaju zajedničku visinu, povučenu iz vrha C. Nadalje, kako je N polovište stranice $\overline{AB}$, slijedi da je $|AN|=|NB|$. Dakle, trokuti ANC i NBC imaju jednake površine, pa je površina trokuta ABC dva puta veća od površine trokuta ANC tj. $P(ABC)=2P(ANC)$. 3 BODA

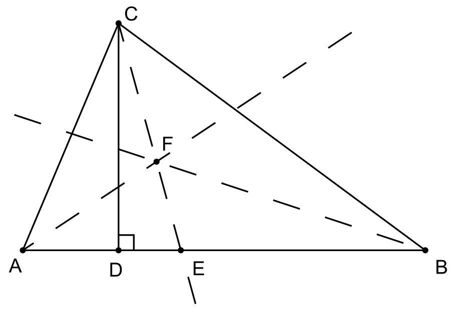
Nadalje, kako su dužine $\overline{AM}$ i $\overline{CN}$ okomite, slijedi da je $\overline{AT}$ visina trokuta ANC s obzirom na $\overline{CN}$. 2 BODA

Zbog toga je $P(ANC) = \dfrac{|CN| \cdot |AT|}{2} = \dfrac{3 \cdot 2}{2} = 3 \text{ cm}^2$. 2 BODA

Konačno, za površinu trokuta ABC vrijedi $P(ABC) = 2P(ANC) = 2 \cdot 3 = 6 \text{ cm}^2$ 2 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

5. Neka su α, β, γ redom kutovi pri vrhovima A, B, C. Nadalje, neka je D nožište visine iz vrha C, E sjecište simetrale kuta γ sa stranicom $\overline{AB}$, te neka je F sjecište simetrala kutova α i β.



1 BOD

Iz trokuta ABF imamo da je $\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2} + 120° = 180°$, tj. $\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2} = 60°$. Zbog toga je $\alpha + \beta = 120°$, pa je $\gamma = 180° - 120° = 60°$. 3 BODA

Nadalje, kako je $\sphericalangle ECA = \dfrac{\gamma}{2} = 30°$ slijedi da je $\sphericalangle DCA = \sphericalangle ECA - \sphericalangle ECD = 30° - 10° = 20°$, zato jer simetrala i visina iz vrha C zatvaraju kut od $10°$. 2 BODA

Stoga, iz pravokutnog trokuta ADC imamo da je $\alpha = 180° - (20° + 90°) = 70°$. 2 BODA

Na kraju je $\beta = 180° - (\alpha + \gamma) = 180° - (70° + 60°) = 50°$. 2 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

7. razred – rješenja

23. veljače 2009.

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Neka je α unutarnji te α' vanjski kut pravilnog mnogokuta. Znamo da je $\alpha + \alpha' = 180°$. 1 BOD
Prema uvjetu zadatka je $\alpha : \alpha' = 3 : 2$ pa je $\alpha = 3k$ i $\alpha' = 2k$. Stoga je $3k + 2k = 180°$,
tj. $5k = 180°$, odakle je $k = 36°$. Prema tome, $\alpha = 3k = 108°$. 3 BODA
S druge strane, kako je zbroj unutarnjih kutova $n-$terokuta jednak $(n-2)\cdot 180°$,
slijedi da je $\alpha = \dfrac{(n-2)\cdot 180°}{n}$. 1 BOD
Prema tome, vrijedi jednadžba

$$\frac{(n-2)\cdot 180°}{n} = 108°,$$

odakle je $\dfrac{n-2}{n} = \dfrac{108°}{180°} = \dfrac{3}{5}$, tj. redom $5(n-2) = 3n$, $2n = 10$, pa je $n = 5$. 3 BODA
Konačno, broj dijagonala pravilnog peterokuta jednak je $d = \dfrac{n(n-3)}{2} = \dfrac{5\cdot 2}{2} = 5$. 2 BODA
.... UKUPNO 10 BODOVA

2. Kako je $a + b = 100$, slijedi da je $8a + 3b = 3(a+b) + 5b = 3\cdot 100 + 5b = 300 + 5b$. 5 BODOVA
Nadalje, prema uvjetu zadatka je $300 + 5b = 2009$, odakle je $5b = 1709$. 2 BODA
Očito ne postoji cijeli broj b takav da je $5b = 1709$, jer je lijeva strana posljednje jednakosti
djeljiva s 5, a desna nije. 3 BODA
NAPOMENA: Učenik također može riješiti posljednju linearnu jednadžbu i zaključiti
da njeno rješenje nije cijeli broj.
.... UKUPNO 10 BODOVA

3. U ovom zadatku koristimo Gaussovu dosjetku. Izračunajmo prvo nazivnik razlomka na lijevoj strani jednadžbe. Imamo da je

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2006 + 2008 = 2(1 + 2 + 3 + \cdots + 1003 + 1004) = 2\cdot\frac{1004\cdot 1005}{2} = 1004\cdot 1005.$$

3 BODA

Izračunajmo sada brojnik razlomka na lijevoj strani, služeći se prethodnim rezultatom. Naime, vrijedi

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \cdots + 2007 + 2009 &= (1 + 2 + 3 + \cdots + 2007 + 2008 + 2009) - (2 + 4 + 6 + \cdots + 2006 + 2008) \\ &= \frac{2009\cdot 2010}{2} - 1004\cdot 1005 = 2009\cdot 1005 - 1004\cdot 1005 \\ &= 1005\cdot(2009 - 1004) = 1005\cdot 1005. \end{aligned}$$

3 BODA

Prema tome, zadana jednadžba je ekvivalentna jednadžbi

$$\frac{1005\cdot 1005}{1004\cdot 1005} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2008},$$

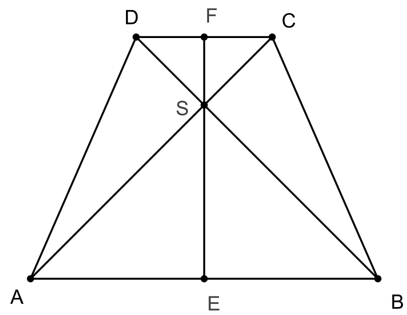
odakle je

$$\frac{1}{x} = \frac{1005}{1004} - \frac{1}{2008} = \frac{2010-1}{2008} = \frac{2009}{2008}.$$

3 BODA

Dakle, rješenje dane jednadžbe je $x = \dfrac{2008}{2009}$. 1 BOD
.... UKUPNO 10 BODOVA

4. Uvedimo oznake kao na slici:



1 BOD

Kako je trapez $ABCD$ jednakokračan, slijedi da je $|BC| = |AD|$ i $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DAB$. Nadalje, očito je $\overline{AB}$ zajednička stranica trokuta ABC i ABD, pa su oni sukladni prema poučku $S-K-S$. 2 BODA

Iz te sukladnosti slijedi da je $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABD$, tj. $\sphericalangle SAB = \sphericalangle ABS$. Prema tome, trokut ABS je jednakokračan pravokutan pa je $\sphericalangle SAB = 45°$. 2 BODA

Sada, neka je $\overline{EF}$ visina trapeza $ABCD$ koja sadrži točku S, te neka je $v_1 = |ES|$ i $v_2 = |SF|$. Dakle, $\sphericalangle SAE = 45°$, $\sphericalangle AES = 90°$, pa je trokut AES jednakokračan pravokutan, što znači da je $|AE| = |ES|$. Kako je $\overline{ES}$ visina jednakokračnog trokuta ABS, slijedi da je $|AE| = |EB| = \dfrac{a}{2}$. To znači da je $\dfrac{a}{2} = v_1$. 2 BODA

Analogno je $\dfrac{c}{2} = v_2$, pa je $v = v_1 + v_2 = \dfrac{a}{2} + \dfrac{c}{2} = \dfrac{a+c}{2}$. 1 BOD

Zbog toga je površina trapeza $P(ABCD) = \dfrac{a+c}{2} \cdot v = v \cdot v = 28 \cdot 28 = 784 \text{ mm}^2$. 2 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

5. Na kuglicama su brojevi $b \leq 10000$. Prebrojat ćemo jednoznamenkaste, dvoznamenkaste, troznamenkaste, četveroznamenkaste i peteroznamenkaste brojeve koji zadovoljavaju uvjete zadataka.

1. Ako je $1 \leq b \leq 9$, onda samo broj 5 zadovoljava uvjete, pa imamo 1 jednoznamenkasti broj. 1 BOD
2. Ako je $10 \leq b \leq 99$ onda je $b = \overline{x0}$ ili $b = \overline{x5}$. Kako je $x \neq 0$ i budući da su znamenke brojeva različite, brojeva prve vrste ima 9, a druge 8, pa imamo ukupno 17 dvoznamenkastih brojeva koji zadovoljavaju uvjete zadatka. 2 BODA
3. Ako je $100 \leq b \leq 999$ onda je $b = \overline{xy0}$ ili $b = \overline{xy5}$. Brojeva prve vrste ima $9 \cdot 8 = 72$ zato jer znamenku stotica možemo odabrati na 9, a znamenku desetica na 8 načina. Nadalje, brojeva druge vrste ima $8 \cdot 8 = 64$ zato jer znamenku stotica možemo odabrati na 8 načina (sve osim 0 i 5), a znamenku desetica opet na 8 načina (sve osim 5 i odabrane znamenke stotica). Dakle, ukupno je $72 + 64 = 136$ troznamenkastih brojeva. 2 BODA
4. Ako je $1000 \leq b \leq 9999$, onda je $b = \overline{xyz0}$ ili $b = \overline{xyz5}$. Sličnim zaključivanjem kao u prethodnom slučaju zaključujemo kako brojeva prve vrste ima $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$, a druge $8 \cdot 8 \cdot 7 = 448$ (opet prvo biramo tisućice, stotice pa desetice). Dakle, četveroznamenkastih brojeva ima $504 + 448 = 952$. 2 BODA
5. Očito broj $b = 10000$ ne zadovoljava uvjete zadatka.

Prema tome, imamo $1 + 17 + 136 + 952 = 1106$ povoljnih događaja. Konačno, kako je je broj mogućih događaja 10000, slijedi da je tražena vjerojatnost

$$p = \frac{1106}{10000} = 0.1106 = 11.06\%.$$

3 BODA

NAPOMENA: Ukoliko je učenik točno riješio zadatak, dobiva sve bodove bilo da vjerojatnost napiše u obliku razlomka, decimalnog broja ili postotka.

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
8. razred – rješenja
23. veljače 2009.

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Uočimo kako u nazivnicima imamo redom kvadrat zbroja i kvadrat razlike. Zbog toga, za $x = 1 - \sqrt{2}$ dobivamo:

$$\frac{1}{x^2+2x+1} - \frac{1}{x^2-2x+1} = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{(2-\sqrt{2})^2} - \frac{1}{(-\sqrt{2})^2} = \frac{1}{6-4\sqrt{2}} - \frac{1}{2}.$$

5 BODOVA

Nadalje, racionalizacijom nazivnika u prvom razlomku lagano dobivamo traženu vrijednost:

$$\frac{1}{6-4\sqrt{2}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6-4\sqrt{2}} \cdot \frac{6+4\sqrt{2}}{6+4\sqrt{2}} - \frac{1}{2} = \frac{6+4\sqrt{2}}{36-(4\sqrt{2})^2} - \frac{1}{2} = \frac{6+4\sqrt{2}}{36-32} - \frac{1}{2} = \frac{6+4\sqrt{2}-2}{4} = \frac{4+4\sqrt{2}}{4} = 1+\sqrt{2}.$$

5 BODOVA

.... UKUPNO 10 BODOVA

2. Transformirajmo ponajprije zadanu jednadžbu $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 14 = 0$.
Primjenom formula za kvadrat zbroja i razlike imamo redom:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 14 &= x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 + 4y + 4 - 4 + z^2 - 6z + 9 - 9 + 14 \\ &= (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 - 1 - 4 - 9 + 14 \\ &= (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2, \end{aligned}$$

pa je dana jednadžba ekvivalentna jednadžbi $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 0$. 5 BODOVA
Kako je zbroj kvadrata triju brojeva jednak nuli, zaključujemo da su svi oni jednaki nuli.
Preciznije, $x - 1 = 0$, $y + 2 = 0$, $z - 3 = 0$, odakle je $x = 1$, $y = -2$, $z = 3$. 3 BODA
Zbog toga je $x + y + z = 1 - 2 + 3 = 2$. 2 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA

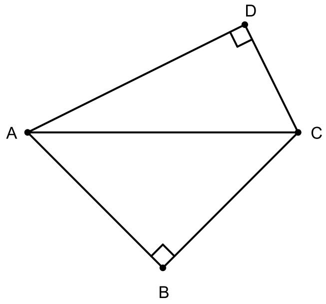
3. Neka su a, b, c redom broj smeđih, bijelih i crnih pločica u predvorju, te a_1, b_1, c_1 na terasi.
Nadalje, neka je d širina pločice u predvorju.
Tada je $2d$ duljina pločice u predvorju, d širina pločice na terasi i $\frac{4}{5}d$ duljina pločice na terasi. 1 BOD
Također je $b = 7c$, $b_1 = 7c_1$, $a = 6b$, $a_1 = 6b_1$. 1 BOD
Ukupan broj pločica u predvorju je $a + b + c = 6b + b + c = 7b + c = 7 \cdot 7c + c = 50c$,
a površina jedne pločice u predvorju je $d \cdot 2d = 2d^2$, pa vrijedi
$(50c) \cdot (2d^2) = 800 \cdot 1500\ \text{cm}^2$, odnosno $c \cdot d \cdot d = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^3$. 1 BOD
Kako je $d \in \mathbf{N}$, imamo sljedeću tablicu:

c	12000	3000	750	480	120	30
d	1	2	4	5	10	20

S obzirom da je $80 < c < 160$, vrijedi $c = 120$ cm, $d = 10$ cm. 2 BODA
Dalje je $c_1 = \frac{3}{4}c = 90$, $b_1 = 7c_1 = 630$, $a_1 = 6b_1 = 3780$,
pa je ukupan broj pločica na terasi $a_1 + b_1 + c_1 = 4500$. 2 BODA
Površina jedne pločice na terasi je $d \cdot \frac{4}{5}d = 80\ \text{cm}^2$. 1 BOD
Konačno, neka je t duljina terase. Tada je $t^2 = 4500 \cdot 80 = 360000$, odakle je $t = 600$ cm.
Dakle, duljina terase je $t = 600$ cm, odnosno 6 m. 2 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA

4.



1 BOD

Neka je $|AD| = b$, $|DC| = a$ i $|AB| = |BC| = x$. Primjenom Pitagorinog poučka na trokute ABC i ACD dobivamo:

$$a^2 + b^2 = |AC|^2 \qquad \text{i} \qquad 2x^2 = |AC|^2.$$

2 BODA

Izjednačavanjem tih dviju relacija dobivamo da je $a^2 + b^2 = 2x^2$. Nadalje, kako je $a + b = 12$, kvadriranjem dobivamo da je $a^2 + 2ab + b^2 = 144$, odakle je $a^2 + b^2 = 144 - 2ab$.

Zbog toga je $144 - 2ab = 2x^2$, odakle je $ab + x^2 = 72$. 3 BODA

S druge strane, površina četverokuta $ABCD$ jednaka je zbroju površina dvaju pravokutnih trokuta ABC i ACD, pa je

$$P(ABCD) = P(ACD) + P(ABC) = \frac{ab}{2} + \frac{x^2}{2} = \frac{ab + x^2}{2}.$$

2 BODA

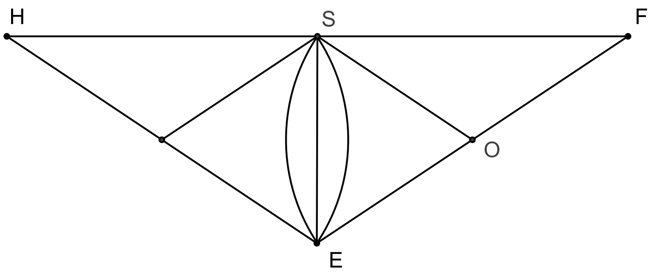
Konačno, iz dobivenih formula slijedi

$$P(ABCD) = \frac{ab + x^2}{2} = \frac{72}{2} = 36 \text{ cm}^2.$$

2 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

5.



1 BOD

Kako je trokut EFS pravokutan, prema obratu Talesovog poučka, točka S se nalazi na kružnici s promjerom $\overline{EF}$. Analogno je točka S na kružnici s promjerom $\overline{HE}$. 1 BOD

Neka je točka O polovište dužine $\overline{EF}$. Očito, točka O je središte kružnice s promjerom $\overline{EF}$ te je $|OS| = |OE| = |OF|$. 1 BOD

Primjenom Pitagorinog poučka na trokut EFS slijedi da je $|EF|^2 = |ES|^2 + |FS|^2 = (\sqrt{6})^2 + (3\sqrt{2})^2 = 6 + 18 = 24$, odakle je $|EF| = 2\sqrt{6}$. 1 BOD

Zbog toga je $|OS| = |OE| = \sqrt{6}$. Kako je $|ES| = \sqrt{6}$, slijedi da je trokut OSE jednakostraničan, pa je $\sphericalangle EOS = 60°$. 1 BOD

Površina P_1 kružnog isječka sa središnjim kutom $\sphericalangle EOS$ je $P_1 = \dfrac{1}{6} \cdot (\sqrt{6})^2 \pi = \pi$,

a površina P_2 jednakostraničnog trokuta OSE je $P_2 = \dfrac{(\sqrt{6})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \dfrac{3}{2}\sqrt{3}$. 2 BODA

Zbog simetričnosti s obzirom na pravac p, za traženu površinu P vrijedi $P = 2(P_1 - P_2)$.

Dakle, vrijedi $P = 2\left(\pi - \dfrac{3}{2}\sqrt{3}\right) = 2\pi - 3\sqrt{3}$. 3 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA