Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A kategorija

23. veljače 2009.

1. Za kupnju školskog autobusa koji će prevoziti djecu iz četiri mjesta A, B, C, D potrebno je 1 050 000 kn. Mjesta će snositi dio troškova srazmjerno broju stanovnika. U mjestu D je stanovnika koliko u mjestima A i C zajedno, u mjestu A je 25% manje stanovnika nego u B, a 20% više nego u C. Odredi kolike će iznose platiti pojedina mjesta.

2. U jednakokračnom trapezu srednjica je duljine l, a dijagonale su međusobno okomite. Odredi površinu trapeza.

3. Dokaži da za sve $x, y > 0$ vrijedi nejednakost

$$x^4 + y^3 + x^2 + y + 1 > \frac{9}{2}xy.$$

4. Ima li jednadžba $x^2 + y^2 - 8z = 14$ cjelobrojnih rješenja? Ako ima, odredi ih. Ako nema, dokaži.

5. Marko je nacrtao pravokutnik dimenzija 20×15 i crtama ga podijelio na jedinične kvadrate. Koliko ukupno kvadrata ima na toj slici?

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A kategorija

23. veljače 2009.

1. Odredi, ako postoji, realni parametar k takav da je maksimalna vrijednost funkcije

$$f_1(x) = (k-8)x^2 - 2(k-5)x + k - 9$$

jednaka minimalnoj vrijednosti funkcije

$$f_2(x) = (k-4)x^2 - 2(k-1)x + k + 7.$$

2. Odredi sve prirodne brojeve n za koje postoji prirodni broj x, takav da je

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{x+n}+\sqrt{x+n+1}} = 1.$$

3. Ako je zbroj duljina dviju stranica raznostraničnog trokuta jednak dvostrukoj duljini treće stranice, dokaži da je pravac kroz središte upisane kružnice i težište trokuta paralelan sa stranicom koja je srednja po duljini.

4. Ako je zbroj kvadrata triju prostih brojeva a, b, c prost broj, dokaži da je barem jedan od brojeva a, b, c jednak 3.

5. Tri skakavca sjede u tri vrha kvadrata. Svake minute jedan od njih preskoči nekog od preostala dva te se smjesti u točku simetričnu onoj iz koje je skočio u odnosu na skakavca kojeg je preskočio. Može li barem jedan od njih nakon konačno mnogo takvih skokova stići u četvrti vrh kvadrata?

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A kategorija

23. veljače 2009.

1. Nađi sva rješenja jednadžbe

$$\operatorname{ctg}\left(2\pi\cos^2(2\pi x)\right) = 0.$$

2. Neka su a, b i c stranice trokuta te α, β i γ njima nasuprotni kutovi, redom. Dokaži da vrijedi

$$(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)\cdot(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma) = \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)\cdot\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\right).$$

3. U sferu S polumjera R upisan je prsten sastavljen od osam jednakih sfera manjeg polumjera, od kojih svaka dodiruje dvije susjedne, a sve dodiruju sferu S uzduž iste kružnice polumjera R. Sfera S_1 dodiruje svih osam manjih sfera i sferu S. Odredi polumjer sfere S_1 u ovisnosti o R. Konačno rješenje zapiši ne koristeći trigonometrijske funkcije.

4. Ako su $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$ svi djelitelji prirodnog broja $n > 1$, dokaži da vrijedi

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_k > k\sqrt{n}.$$

5. Kvadratna tablica 2009×2009 popunjena je brojevima 1, 2, 3,…, 2009 tako da se u svakom retku i svakom stupcu pojavljuje svaki od tih brojeva. Ako je tablica simetrična u odnosu na jednu dijagonalu, onda se i na toj dijagonali pojavljuju svi brojevi 1, 2, 3,…, 2009. Dokaži!

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

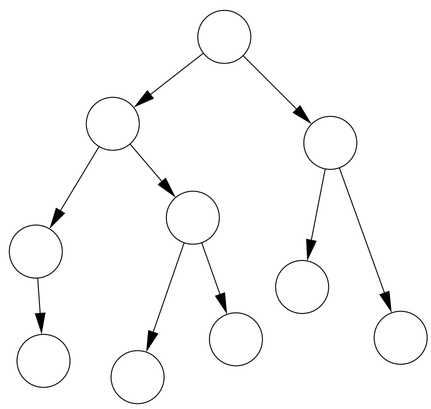
4. razred – srednja škola – A kategorija

23. veljače 2009.

1. Dan je niz (a_n),
$$a_1 = 1, \qquad a_n = 3a_{n-1} + 2^{n-1}, \text{ za } n \geq 2.$$
Izrazi opći član niza a_n pomoću n.

2. Točka P je polovište tetive parabole $\mathcal{P}$ u čijim su krajevima povučene tangente na tu parabolu. Neka je T sjecište tih tangenata. Dokaži da polovište dužine $\overline{PT}$ leži na paraboli.

3. Na koliko načina možemo upisati brojeve 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 u kružiće na slici tako da svaka strelica pokazuje od većeg broja prema manjem ?



4. Neka je a prirodni broj veći od 1. Dokaži da je broj
$$n(2n+1)(3n+1)\ldots(an+1)$$
djeljiv sa svim prostim brojevima manjim od a, za svaki prirodan broj n.

5. Prvih 2010 prirodnih brojeva napisano je u nizu bilo kojim redom, a zatim je svakom od njih pribrojen njegov redni broj u tom nizu. Dokaži da među tako dobivenim zbrojevima postoje dva čija je razlika djeljiva s 2010.