ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A kategorija

23. veljače 2009.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-1.1.

Za kupnju školskog autobusa koji će prevoziti djecu iz četiri mjesta A, B, C, D potrebno je 1 050 000 kn. Mjesta će snositi dio troškova srazmjerno broju stanovnika. U mjestu D je stanovnika koliko u mjestima A i C zajedno, u mjestu A je 25% manje stanovnika nego u B, a 20% više nego u C. Odredi kolike će iznose platiti pojedina mjesta.

Rješenje.

Označimo broj stanovnika u mjestima A, B, C, D s a, b, c, d redom.

Prema uvjetima zadatka vrijedi:

$$d = a + c, \qquad a = \frac{3}{4}b, \qquad a = \frac{6}{5}c, \qquad \text{(4 boda)}$$

pa možemo te brojeve izraziti pomoću a:

$$b = \frac{4}{3}a, \quad c = \frac{5}{6}a, \quad d = a + \frac{5}{6}a = \frac{11}{6}a. \qquad \text{(6 bodova)}$$

Dakle

$$a : b : c : d = 1 : \frac{4}{3} : \frac{5}{6} : \frac{11}{6} = 6 : 8 : 5 : 11.$$

(5 bodova)

U dobivenom omjeru treba podijeliti iznos od 1050000 kn. Označimo iznose koje treba platiti pojedino mjesto s A, B, C, D.

Uvrštavanjem $A = 6k$, $B = 8k$, $C = 5k$, $D = 11k$
u izraz $A + B + C + D = 1050000$ dobivamo:

$$6k + 8k + 5k + 11k = 1050000, \qquad \text{(2 boda)}$$

$$k = 35000. \qquad \text{(1 bod)}$$

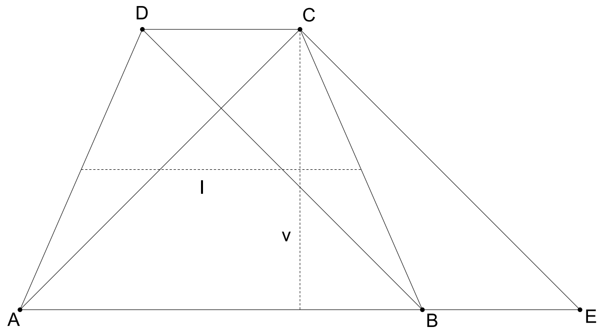
Iznosi troškova za pojedina mjesta su:

$$A = 210000\,\text{kn}, \quad \mathrm{B} = 280000\,\text{kn}, \quad \mathrm{C} = 175000\,\text{kn}, \quad \mathrm{D} = 385000\,\text{kn}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Zadatak A-1.2.

U jednakokračnom trapezu srednjica je duljine l, a dijagonale su međusobno okomite. Odredi površinu trapeza.

Prvo rješenje.



Označimo: $|AB| = a$, $|CD| = c$, $|BD| = d$, a visinu trapeza sa v.

Primijetimo da su u jednakokračnom trapezu dijagonale sukladne, pa je $|AC| = |BD| = d$.

Prema uvjetima zadatka vrijedi $l = \dfrac{a+c}{2}$.

Produžimo dužinu $\overline{AB}$ do točke E tako da vrijedi $|BE| = |DC|$.

Tada je $BECD$ paralelogram i vrijedi $|CE| = |DB|$, i $\overline{CE} \parallel \overline{DB}$, pa je $|CE| = d$.

(5 bodova)

Trokut AEC je jednakokračan pravokutan trokut s katetama duljine d,
jer je $|AC| = |CE| = d$ i $AC \perp CE$ $(CE \parallel BD,\ BD \perp AC)$. (5 bodova)

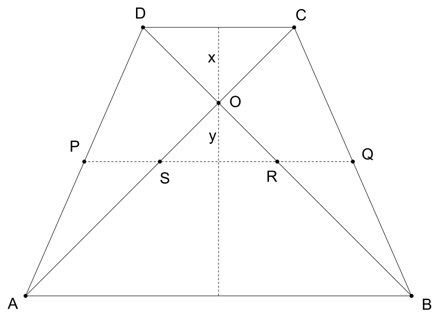
Zato je visina v jednaka polovini duljine hipotenuze pravokutnog trokuta ACE, tj. $v = \dfrac{1}{2}|AE| = \dfrac{a+c}{2} = l$. (5 bodova)

Konačno

$$P(ABCD) = \frac{a+c}{2} \cdot v = l \cdot v = l^2.$$ (5 bodova)

Drugo rješenje.

Označimo: $|AB| = a$, $|CD| = c$. Neka je O sjecište dijagonala i neka su P, Q, R, S redom polovišta dužina $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{AC}$.



Tada je $\overline{PQ}$ srednjica trapeza $ABCD$, $\overline{PS}$ srednjica trokuta ACD,

a $\overline{PR}$ srednjica trokuta DAB,

pa je $|PS| = \dfrac{c}{2}$, $|PR| = \dfrac{a}{2}$. (3 boda)

Slijedi $|SR| = |PR| - |PS| = \dfrac{a-c}{2}$. (2 boda)

Trokuti OSR i OCD su jednakokračni pravokutni trokuti,

pa su njihove visine x, y iz vrha O (vidi sliku) jednake polovici odgovarajuće hipotenuze,

tj. $x = \dfrac{1}{2}\,c$, $y = \dfrac{1}{2}\,|SR|$. (5 bodova)

Zato je visina cijelog trapeza $v = 2(x+y) = 2\left(\dfrac{c}{2} + \dfrac{a-c}{4}\right) = \dfrac{a+c}{2} = l$. (5 bodova)

Konačno, površina trapeza $ABCD$ je $P = \dfrac{a+c}{2} \cdot v = l \cdot l = l^2$. (5 bodova)

Napomena: Površinu trapeza možemo izraziti pomoću d, jer je to četverokut s okomitim dijagonalama: $P = \frac{1}{2}d^2$. Tada je još potrebno izraziti d preko l, jer je l zadana veličina. Kao u prvom rješenju, potreban nam je trokut ACE iz kojeg po Pitagorinom poučku slijedi $d^2 + d^2 = (a+c)^2 = (2l)^2 \Rightarrow d = l\sqrt{2}$.

Zadatak A-1.3.

Dokaži da za sve $x, y > 0$ vrijedi nejednakost

$$x^4 + y^3 + x^2 + y + 1 > \frac{9}{2}xy.$$

Rješenje.

Vrijedi $x^4 + 1 \geq 2x^2$ (1)

i $y^3 + y \geq 2y^2$, (2)

pa zbrajanjem (1) i (2) dobivamo $x^4 + y^3 + y + 1 \geq 2x^2 + 2y^2$

iz čega je $x^4 + y^3 + x^2 + y + 1 \geq 3x^2 + 2y^2$. (10 bodova)

Treba još dokazati da vrijedi $3x^2 + 2y^2 > \frac{9}{2}xy$.

Primjenom A-G nejednakosti dobivamo $3x^2 + 2y^2 \geq 2\sqrt{6}xy$, (5 bodova)

pa budući da je $2\sqrt{6} = \sqrt{24} > \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{9}{2}$, (3 boda)

vrijedi $x^4 + y^3 + x^2 + y + 1 \geq 2\sqrt{6}xy > \frac{9}{2}xy$. (2 boda)

Napomena: Ukoliko učenik dobije samo jednu od nejednakosti (1) i (2) dobiva 2 boda, a ukoliko dobije obje nejednakosti ali ih ne zbroji, dobiva 8 bodova.

U zadatku smo više puta primijenili nejednakost $a^2 + b^2 \geq 2ab$ koja vrijedi za $a, b \in \mathbb{R}$.

Zadatak A-1.4.

Ima li jednadžba $x^2 + y^2 - 8z = 14$ cjelobrojnih rješenja? Ako ima, odredi ih. Ako nema, dokaži.

Rješenje.

Brojevi x i y moraju biti iste parnosti, jer bi inače $x^2 + y^2$ bilo neparno, pa bi na lijevoj strani bio neparan broj, a na desnoj strani 14. (4 boda)

Ako su oba broja x i y parna, lijeva strana je djeljiva sa 4, a desna nije. (4 boda)

Neka su oba broja x i y neparna. Tada je $x = 2m + 1$, $y = 2n + 1$ za neke $m, n, \in \mathbb{Z}$. Uvrštavanjem u danu jednadžbu slijedi:

$$\begin{aligned}
(2m+1)^2 + (2n+1)^2 - 8z &= 14 \\
4m^2 + 4m + 1 + 4n^2 + 4n + 1 - 8z &= 14 \\
m(m+1) + n(n+1) - 2z &= 3
\end{aligned}$$

(6 bodova)

Brojevi $m(m+1)$, $n(n+1)$ su parni (umnožak dva uzastopna prirodna broja), pa je na lijevoj strani paran broj, a na desnoj neparan.
Stoga ova jednadžba nema cjelobrojnih rješenja, (6 bodova)
pa ni dana jednadžba nema rješenja.

Zadatak A-1.5.

Marko je nacrtao pravokutnik dimenzija 20×15 i crtama ga podijelio na jedinične kvadrate. Koliko ukupno kvadrata ima na toj slici?

Prvo rješenje.

Brojimo kvadrate ovisno o dimenziji, tj. duljini stranice:

kvadrata stranice duljine 1 ima $20 \cdot 15$
kvadrata stranice duljine 2 ima $19 \cdot 14$
kvadrata stranice duljine 3 ima $18 \cdot 13$
⋮ ⋮
kvadrata stranice duljine 15 ima $6 \cdot 1$ (12 bodova*)

Ukupan broj kvadrata je:

$$\begin{aligned} S &= 20 \cdot 15 + 19 \cdot 14 + 18 \cdot 13 + \cdots + 7 \cdot 2 + 6 \cdot 1 && \text{(3 boda)} \\ &= 300 + 266 + 234 + 204 + 176 + 150 + 126 + 104 + 84 + 66 + 50 + 36 + 24 + 14 + 6 \\ &= 1840. && \text{(5 bodova)} \end{aligned}$$

* ***Napomena.*** Ako je određen broj kvadrata stranice duljine d samo za nekoliko vrijednosti broja d dati najviše 5 bodova, i to: 1 bod za $d = 1$, 2 boda za bilo koji drugi d, a 5 bodova za najmanje tri različite vrijednosti od d.

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju ustanovimo da kvadrata stranice duljine d ima $(21 - d)(16 - d)$. (12 bodova)

Zato je ukupan broj kvadrata:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{d=1}^{15} (21 - d)(16 - d) && \text{(3 boda)} \\ &= \sum_{d=1}^{15} (21 \cdot 16 - 37d + d^2) = 15 \cdot 21 \cdot 16 - 37 \sum_{d=1}^{15} d + \sum_{d=1}^{15} d^2 \\ &= 15 \cdot 21 \cdot 16 - 37 \cdot \frac{15 \cdot (15+1)}{2} + \frac{15 \cdot (15+1) \cdot (2 \cdot 15 + 1)}{6} && \text{(2+2 boda)} \\ &= 16 \cdot 15 \cdot \left(21 - \frac{37}{2} + \frac{31}{6}\right) = 240 \cdot \frac{23}{3} = 1840. && \text{(1 bod)} \end{aligned}$$

Napomena. U predzadnjem retku dati učeniku 2 boda za točno određen zbroj $\sum_{d=1}^{15} d$, i druga 2 boda za točno određen zbroj $\sum_{d=1}^{15} d^2$.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A kategorija

23. veljače 2009.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-2.1.

Odredi, ako postoji, realni parametar k takav da je maksimalna vrijednost funkcije

$$f_1(x) = (k-8)x^2 - 2(k-5)x + k - 9$$

jednaka minimalnoj vrijednosti funkcije

$$f_2(x) = (k-4)x^2 - 2(k-1)x + k + 7.$$

Rješenje.

Da bi funkcija $f_1(x)$ imala maksimum, mora biti $k - 8 < 0$, tj. $k < 8$, (2 boda)

a da bi funkcija $f_2(x)$ imala minimum, mora biti $k - 4 > 0$, tj. $k > 4$. (2 boda)

Maksimalna vrijednost funkcije $f_1(x)$ je $\dfrac{4(k-8)(k-9) - 4(k-5)^2}{4(k-8)}$, (2 boda)

tj. $\max\limits_{x \in \mathbb{R}} f_1(x) = \dfrac{47 - 7k}{k - 8}$. (2 boda)

Minimalna vrijednost funkcije $f_2(x)$ je $\dfrac{4(k-4)(k+7) - 4(k-1)^2}{4(k-4)}$, (2 boda)

tj. $\min\limits_{x \in \mathbb{R}} f_2(x) = \dfrac{5k - 29}{k - 4}$. (2 boda)

Ekstremne vrijednosti tih funkcija se podudaraju pa vrijedi:

$$\frac{47 - 7k}{k - 8} = \frac{5k - 29}{k - 4}. \qquad \text{(4 boda)}$$

Sređivanjem dobivamo kvadratnu jednadžbu $k^2 - 12k + 35 = 0$
čija su rješenja $k = 5$, $k = 7$. (2 boda)

Oba broja zadovoljavaju uvjete ($4 < k < 8$), pa su to traženi parametri. (2 boda)

Napomena: Učenik koji ne postavi uvjet $4 < k < 8$, ali na kraju provjeri da se ekstremne vrijednosti funkcija podudaraju, treba dobiti sve bodove.

Za $k = 5$, $\max f_1(x) = -4 = \min f_2(x)$; za $k = 7$, $\max f_1(x) = 2 = \min f_2(x)$.

Zadatak A-2.2.

Odredi sve prirodne brojeve n za koje postoji prirodni broj x, takav da je

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{x+n}+\sqrt{x+n+1}}=1.$$

Rješenje.

Racionaliziranjem pojednostavnimo dane razlomke. Za $k=0,1,\ldots,n$ vrijedi

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{x+k}+\sqrt{x+k+1}} &= \frac{\sqrt{x+k}-\sqrt{x+k+1}}{(\sqrt{x+k}+\sqrt{x+k+1})(\sqrt{x+k}-\sqrt{x+k+1})}\\ &= \frac{\sqrt{x+k}-\sqrt{x+k+1}}{(x+k)-(x+k+1)}\\ &= \sqrt{x+k+1}-\sqrt{x+k}.\end{aligned}$$

(5 bodova)

Tako dobivamo novu jednakost

$$(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})+(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})+\cdots+(\sqrt{x+n+1}-\sqrt{x+n})=1,$$

tj.

$$\sqrt{x+n+1}-\sqrt{x}=1,$$

(5 bodova)

odnosno $\sqrt{x+n+1}=\sqrt{x}+1$.

Nakon kvadriranja dobivamo $x+n+1=x+1+2\sqrt{x}$,

odakle je $n=2\sqrt{x}$, (5 bodova)

odnosno $x=\dfrac{n^2}{4}$.

Broj x je prirodan broj ako i samo ako je n paran, tj. $n=2k$, $k\in\mathbb{N}$. (5 bodova)

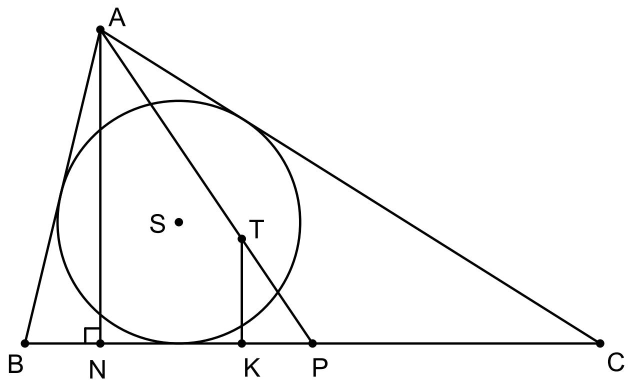
Zadatak A-2.3.

Ako je zbroj duljina dviju stranica raznostraničnog trokuta jednak dvostrukoj duljini treće stranice, dokaži da je pravac kroz središte upisane kružnice i težište trokuta paralelan sa stranicom koja je srednja po duljini.

Rješenje.

Neka su a, b, c duljine stranica trokuta, i neka je a srednja po duljini. Tada vrijedi $2a = b + c$.
Opseg trokuta jednak je $3a$. (3 boda)

Neka je T težište trokuta, N nožište visine na stranicu duljine a, a K nožište okomice iz točke T na stranicu duljine a. Označimo s v duljinu visine na tu stranicu, s r polumjer upisane kružnice trokuta, a s P njegovu površinu.



Tada, zbog sličnosti trokuta TKP i ANP, vrijedi $|TK| = \frac{1}{3}v$. (5 bodova)

Kako je $P = \frac{1}{2}av = rs$, gdje smo sa s označili poluopseg trokuta,

slijedi $v = \frac{2P}{a} = \frac{2rs}{a} = \frac{2r \cdot \frac{3a}{2}}{a} = 3r$. (8 bodova)

Stoga je $|TK| = r$, što upravo znači da središte upisane kružnice i težište trokuta leže na pravcu koji je paralelan sa stranicom duljine a. (4 boda)

Zadatak A-2.4.

Ako je zbroj kvadrata triju prostih brojeva a, b, c prost broj, dokaži da je barem jedan od brojeva a, b, c jednak 3.

Prvo rješenje.

Pretpostavimo suprotno, da postoje prosti brojevi a, b, c različiti od 3, takvi da je $a^2 + b^2 + c^2$ prost broj.

Tada svaki od njih pri dijeljenju s 3 daje ostatak 1 ili 2 (jer ne može biti djeljiv s 3), tj. može se zapisati u obliku $3k + 1$ ili $3k + 2$ za neki $k \in \mathbb{Z}$. (3 boda)

Kvadrati takvih brojeva daju ostatak 1 pri dijeljenju s 3: (3 boda)

$$\begin{aligned}(3k+1)^2 &= 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1, \\ (3k+2)^2 &= 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1.\end{aligned}$$

Znači da svaki od brojeva a^2, b^2, c^2 daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3,

pa je njihov zbroj djeljiv s 3. (8 bodova)

Stoga njihov zbroj nije prost broj (jer je očito veći od 3). (4 boda)

Sada je jasno da je pretpostavka bila pogrešna, pa zaključujemo da je barem jedan od brojeva a, b, c jednak 3. (2 boda)

Drugo rješenje.

Ovo rješenje temelji se na poznatoj činjenici da su svi prosti brojevi osim 2 i 3 oblika $6k + 1$ ili $6k - 1$ za neki $k \in \mathbb{Z}$. (3 boda)

Kvadrat takvog broja daje ostatak 1 pri dijeljenju sa 6. (2 boda)

Slično kao u prvom rješenju, uz istu pretpostavku, zaključujemo da ne mogu svi brojevi a, b, c biti veći od 3:

Kad bi brojevi a, b, c svi bili različiti od 2 i 3, tada bi $a^2 + b^2 + c^2$ davao ostatak 3 pri dijeljenju sa 6, (6 bodova)

tj. taj broj bi bio djeljiv s 3 i očito veći od 3, pa ne bi mogao biti prost broj. (3 boda)

Preostaje eliminirati mogućnost da su jedan, dva ili sva tri od brojeva a, b, c jednaki 2, a nijedan jednak 3:

Kad bi sva tri bila jednaka 2, tada bi bilo $a^2 + b^2 + c^2 = 12$, što nije prost broj. (1 bod)

Ako su dva među njima jednaka 2, a treći veći od 3, onda zbroj njihovih kvadrata $a^2 + b^2 + c^2$ daje ostatak 3 pri dijeljenju sa 6, a kako je veći od 3, ne može biti prost broj. (2 boda)

Ako je jedan od njih jednak 2, a preostala dva veća od 3, tada je zbroj njihovih kvadrata djeljiv sa 6, pa opet zaključujemo da $a^2 + b^2 + c^2$ nije prost broj. (2 boda)

Dakle, jedan od ta tri broja mora biti jednak 3. (1 bod)

Napomena: Oba rješenja mogu se zapisati i pomoću kongruencija.

Zadatak A-2.5.

Tri skakavca sjede u tri vrha kvadrata. Svake minute jedan od njih preskoči nekog od preostala dva te se smjesti u točku simetričnu onoj iz koje je skočio u odnosu na skakavca kojeg je preskočio. Može li barem jedan od njih nakon konačno mnogo takvih skokova stići u četvrti vrh kvadrata?

Rješenje.

Uvedimo koordinatni sustav takav da je ishodište u četvrtom ("praznom") vrhu kvadrata, a skakavci u točkama $(0,1)$, $(1,0)$ i $(1,1)$. (3 boda)

Kretanjem opisanim u zadatku jedna ili obje koordinate skakavca nakon skoka povećaju se ili smanje za 2, (7 bodova)

tako da svaki skakavac uvijek ima barem jednu neparnu koordinatu, jer je tako bilo na početku. (7 bodova)

Stoga niti jedan od njih ne može stići u točku $(0,0)$. (3 boda)

Napomena: Dati 5 bodova učeniku koji crtanjem i isprobavanjem zaključi, ali ne obrazloži, da skakavci mogu stići u sva polja s barem jednom neparnom koordinatom, ali ne i u polja s obje neparne koordinate. Pritom naravno nije potrebno da učenik spominje koordinate.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A kategorija

23. veljače 2009.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-3.1.

Nađi sva rješenja jednadžbe

$$\operatorname{ctg}\left(2\pi\cos^2(2\pi x)\right)=0.$$

Prvo rješenje.

Jednakost $\operatorname{ctg}(2\pi\cos^2(2\pi x))=0$ je ispunjena ako i samo ako vrijedi

$$2\pi\cos^2(2\pi x)=\frac{\pi}{2}+k\pi, \qquad \text{za neki } k\in\mathbb{Z}, \tag{2 boda}$$

odnosno

$$\cos^2(2\pi x)=\frac{1}{4}+\frac{k}{2}, \qquad k\in\mathbb{Z}. \tag{$*$}$$

Vrijednosti funkcije $\cos^2(2\pi x)$ su iz intervala $[0,1]$, pa k može biti samo 0 ili 1.

(2 boda)

Za $k=0$ dobivamo jednadžbu $\cos^2(2\pi x)=\dfrac{1}{4}$,

pa vrijedi $\quad \cos(2\pi x)=\dfrac{1}{2} \quad$ ili $\quad \cos(2\pi x)=-\dfrac{1}{2}$.

Rješenja jednadžbe $\cos(2\pi x)=\frac{1}{2}$ su:

$$x\in\left\{\frac{1}{6}+m \mid m\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{5}{6}+m \mid m\in\mathbb{Z}\right\}, \tag{2+2 boda}$$

a rješenja jednadžbe $\cos(2\pi x)=-\frac{1}{2}$:

$$x\in\left\{\frac{1}{3}+m \mid m\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{2}{3}+m \mid m\in\mathbb{Z}\right\}, \tag{2+2 boda}$$

Do sada nađena rješenja se mogu zapisati i ovako:

$$x\in\left\{\frac{1}{6}+\frac{m}{2} \mid m\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{1}{3}+\frac{m}{2} \mid m\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Za $k=1$ dobivamo jednadžbu $\cos^2(2\pi x)=\frac{3}{4}$,

pa vrijedi $\cos(2\pi x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ili $\cos(2\pi x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Rješenje jednadžbe $\cos(2\pi x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ su:

$$x\in\left\{\frac{1}{12}+m \mid m\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{11}{12}+m \mid m\in\mathbb{Z}\right\},\qquad \text{(2+2 boda)}$$

a rješenja jednadžbe $\cos(2\pi x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$x\in\left\{\frac{5}{12}+m \mid m\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{7}{12}+m \mid m\in\mathbb{Z}\right\},\qquad \text{(2+2 boda)}$$

Ta rješenja se mogu zapisati i ovako:

$$x\in\left\{\frac{1}{12}+\frac{m}{2} \mid m\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{5}{12}+\frac{m}{2} \mid m\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Skup svih rješenja dane jednadžbe možemo zapisati još jednostavnije:

$$x\in\left\{\frac{1}{12}+\frac{m}{4} \mid m\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{1}{6}+\frac{m}{4} \mid m\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Drugo rješenje.

Jednakost $\operatorname{ctg}\left(2\pi\cos^2(2\pi x)\right)=0$ je ispunjena ako i samo ako vrijedi

$$2\pi\cos^2(2\pi x)=\frac{\pi}{2}+k\pi,\qquad \text{za neki } k\in\mathbb{Z},\qquad \text{(2 boda)}$$

odnosno

$$\cos^2(2\pi x)=\frac{1}{4}+\frac{k}{2},\qquad k\in\mathbb{Z}.\qquad (*)$$

Jednadžba (*) ekvivalentna je s $\cos(4\pi x)=k-\frac{1}{2}$.

Vrijednosti funkcije $\cos(4\pi x)$ su iz intervala $[-1,1]$, pa k može biti samo 0 ili 1.

(2 boda)

Za $k=0$ dobivamo jednadžbu $\cos(4\pi x)=-\frac{1}{2}$ koja ima rješenja:

$$x\in\left\{\frac{1}{6}+\frac{m}{2} \mid m\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{1}{3}+\frac{m}{2} \mid m\in\mathbb{Z}\right\}.\qquad \text{(4+4 boda)}$$

Za $k=1$ dobivamo jednadžbu $\cos(4\pi x)=\frac{1}{2}$ koja ima rješenja:

$$x\in\left\{\frac{1}{12}+\frac{m}{2} \mid m\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{5}{12}+\frac{m}{2} \mid m\in\mathbb{Z}\right\}.\qquad \text{(4+4 boda)}$$

Zadatak A-3.2.

Neka su a, b i c stranice trokuta te α, β i γ njima nasuprotni kutovi, redom. Dokaži da vrijedi

$$(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) \cdot (\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) \cdot \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}\right).$$

Rješenje.

Transformirajmo lijevu stranu jednakosti koristeći formulu za površinu P trokuta

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \frac{2P}{bc} + \frac{2P}{ac} + \frac{2P}{ab} \qquad \text{(8 bodova)}$$

i poučak o kosinusima:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{\frac{2P}{bc}} = \frac{b^2+c^2-a^2}{4P}; \qquad \text{(6 bodova)}$$

analogno

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{4P}, \quad \operatorname{ctg}\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{4P}.$$

Stoga je

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = \frac{a^2+b^2+c^2}{4P}. \qquad \text{(4 boda)}$$

Nakon množenja prve i zadnje jednakosti te skraćivanja sa $2P$ dobivamo jednakost koju je trebalo dokazati. (2 boda)

Zadatak A-3.3.

U sferu S polumjera R upisan je prsten sastavljen od osam jednakih sfera manjeg polumjera, od kojih svaka dodiruje dvije susjedne, a sve dodiruju sferu S uzduž iste kružnice polumjera R. Sfera S_1 dodiruje svih osam manjih sfera i sferu S. Odredi polumjer sfere S_1 u ovisnosti o R. Konačno rješenje zapiši ne koristeći trigonometrijske funkcije.

Rješenje.

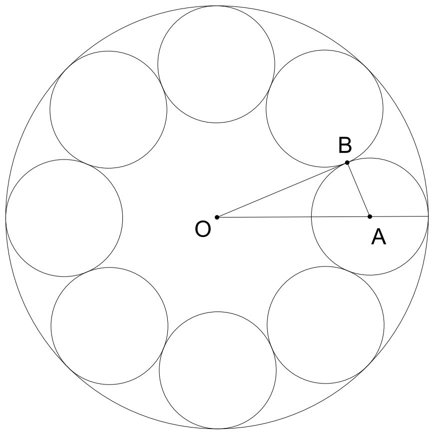
Označimo sa r polumjer svake od osam malih sfera, a s ρ traženi polumjer sfere S_1. Velika sfera S ima polumjer R.

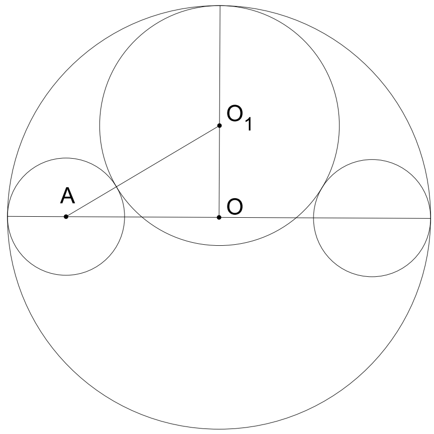
Promatrajmo presjek sfere S i danih osam sfera ravninom koja sadrži njihova dirališta sa sferom S. Želimo odrediti polumjer svake od osam malih sfera.

Promatrajući trokut AOB (vidi sliku) zaključujemo: $\dfrac{r}{R-r} = \sin\dfrac{\pi}{8}$ (5 bodova)

pa dobivamo

$$r = R \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{8}}{1+\sin\frac{\pi}{8}}. \qquad \text{(2 boda)}$$





Promatrajmo sada presjek ravninom koja prolazi kroz središte O sfere S, središte O_1 sfere S_1 i središte jedne od malih sfera.

Iz trokuta AOO_1 (vidi sliku) imamo

$$(r+\rho)^2 = (R-r)^2 + (R-\rho)^2. \qquad \text{(5 bodova)}$$

Odavde je $\rho = R \cdot \dfrac{R-r}{R+r}$. (2 boda)

Koristeći dobiveni izraz za r dobivamo

$$\rho = R \cdot \frac{1 - \frac{\sin\frac{\pi}{8}}{1+\sin\frac{\pi}{8}}}{1 + \frac{\sin\frac{\pi}{8}}{1+\sin\frac{\pi}{8}}} = \frac{R}{1 + 2\sin\frac{\pi}{8}}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Na kraju još izračunajmo $\sin\frac{\pi}{8}$:

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Konačno je $\rho = \dfrac{R}{1+\sqrt{2-\sqrt{2}}}$. (2 boda)

Zadatak A-3.4.

Ako su $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$ svi djelitelji prirodnog broja $n > 1$, dokaži da vrijedi

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_k > k\sqrt{n}.$$

Prvo rješenje.

Neka je $S = d_1 + d_2 + \ldots + d_k$.

Ako je d djeljitelj broja n, onda je i $\frac{n}{d}$ djelitelj broja n, pa je $d_{k+1-i} = \frac{n}{d_i}$, (5 bodova)

Zbog nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine dobivamo

$$\begin{aligned} 2S &= \sum_{i=1}^{k}(d_i + d_{k+1-i}) \\ &\geq 2k \sqrt[2k]{\prod_{i=1}^{k}(d_i \cdot d_{k+1-i})} && \text{(5 bodova)} \\ &= 2k \sqrt[2k]{n^k} = 2k\sqrt{n}\ . && \text{(5 bodova)} \end{aligned}$$

te stoga vrijedi $S \geq k\sqrt{n}$.

Vrijedi stroga nejednakost $S > k\sqrt{n}$, jer zbog $n > 1$ nisu svi djeljitelji d_i međusobno jednaki. (5 bodova)

Napomena: Rješenje je moguće dovršiti i primjenom A-G nejednakosti na parove djelitelja: $2S = \sum_{i=1}^{k}(d_i + \frac{n}{d_i}) > 2\sum_{i=1}^{k}\sqrt{d_i \cdot \frac{n}{d_i}} = 2\sum_{i=1}^{k}\sqrt{n} = 2k\sqrt{n}$, pa je $S > k\sqrt{n}$.

Drugo rješenje.

Istu ideju rješavanja možemo provesti i bez promatranja dvostrukog zbroja $2S$, ali tada moramo posebno razmatrati slučajeve kada je k paran i kada je k neparan.

Započinjemo kao i u prethodnom rješenju. Neka je $S = d_1 + d_2 + \ldots + d_k$.

Ako je d djeljitelj broja n, onda je i $\frac{n}{d}$ djelitelj broja n, pa je $d_{k+1-i} = \frac{n}{d_i}$. (5 bodova)

Za paran broj djeljitelja k imamo

$$S = \sum_{i=1}^{k/2}(d_i + d_{k+1-i}) \geq k\sqrt[k]{\prod_{i=1}^{k/2}(d_i \cdot d_{k+1-i})} = k\sqrt[k]{n^{k/2}} = k\sqrt{n}\ . \quad \text{(5 bodova)}$$

Vrijedi stroga nejednakost $S > k\sqrt{n}$, jer zbog $n > 1$ nisu svi djeljitelji d_i međusobno jednaki. (5 bodova)

Razmotrimo slučaj kada je broj djeljitelja k neparan.

Broj djeljitelja je neparan ako i samo ako je n potpun kvadrat, a to znači da je jedan od njegovih djelitelja $d_{\frac{k+1}{2}} = \sqrt{n}$, a ostali se djelitelji mogu podijeliti u parove d_i, d_{k+1-i}, $i = 1, \ldots, \frac{k-1}{2}$ takve da je $d_i \cdot d_{k+1-i} = n$.

Sada, za neparan k, vrijedi

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{n} + \sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} (d_i + d_{k+1-i}) \\ &\geq \sqrt{n} + (k-1) \sqrt[k-1]{\prod_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} (d_i \cdot d_{k+1-i})} \\ &= \sqrt{n} + (k-1) \sqrt[k-1]{n^{\frac{k-1}{2}}} = k\sqrt{n}\ . \end{aligned} \qquad \text{(5 bodova)}$$

Iz istih razloga kao i za paran k vrijedi stroga nejednakost.

Napomena: I ovo je rješenje je moguće dovršiti i primjenom A-G nejednakosti na parove djelitelja, kako je opisano u napomeni uz prvo rješenje.

Treće rješenje.

Neka je $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_i^{\alpha_i}$.

Tada je broj djeljitelja broja n jednak $k = (1+\alpha_1) \cdot \ldots \cdot (1+\alpha_i)$,

a zbroj svih djeljitelja broja n

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_k = (1 + p_1 + \ldots + p_1^{\alpha_1}) \cdot \ldots \cdot (1 + p_i + \ldots + p_i^{\alpha_i}). \qquad \text{(3 boda)}$$

Dakle, treba dokazati

$$(1 + p_1 + \ldots + p_1^{\alpha_1}) \cdot \ldots \cdot (1 + p_i + \ldots + p_i^{\alpha_i}) > (1+\alpha_1) \cdot \ldots \cdot (1+\alpha_i) \cdot \sqrt{p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_i^{\alpha_i}} \qquad (*)$$

Primjenom A-G nejednakosti dobivamo

$$\frac{1 + p + \ldots + p^{\alpha}}{\alpha + 1} \geq \sqrt[\alpha+1]{p^{1+2+\ldots+\alpha}} \qquad \text{(5 bodova)}$$

odnosno

$$1 + p + \ldots + p^{\alpha} \geq (\alpha+1) \sqrt[\alpha+1]{p^{\frac{\alpha\cdot(\alpha+1)}{2}}} = (\alpha+1)\sqrt{p^{\alpha}}\ . \qquad \text{(4 boda)}$$

Zbog $p > 1$ vrijedi i stroga nejednakost

$$1 + p + \ldots + p^{\alpha} > (1+\alpha)\sqrt{p^{\alpha}}\ . \qquad \text{(5 bodova)}$$

Primijenimo gornju nejednakost uvrštavajući redom $p_1, \ldots, p_i$ na mjesto p i pomnožimo sve te nejednakosti. Time dobivamo (*). (3 boda)

Zadatak A-3.5.

Kvadratna tablica 2009×2009 popunjena je brojevima $1, 2, 3, \ldots, 2009$ tako da se u svakom retku i svakom stupcu pojavljuje svaki od tih brojeva. Ako je tablica simetrična u odnosu na jednu dijagonalu, onda se i na toj dijagonali pojavljuju svi brojevi $1, 2, 3, \ldots,$ 2009. Dokaži!

Rješenje.

Uočimo da se, zbog uvjeta zadatka, svaki od brojeva $1, 2, \ldots, 2009$ pojavljuje u tablici točno 2009 puta. (2 boda)

Zbog simetričnosti, svaki broj se pojavljuje jednako mnogo puta ispod i iznad uočene dijagonale, pa je broj pojavljivanja pojedinog broja izvan te dijagonale paran. (10 bodova)

Stoga se svaki broj mora na promatranoj dijagonali pojaviti neparni broj puta. (3 boda)

Zaključujemo da se svaki broj mora pojaviti na toj dijagonali bar jednom, (3 boda)

a kako je brojeva jednako koliko i mjesta na dijagonali, svaki se od brojeva $1, 2, \ldots, 2009$ na njoj pojavljuje točno jednom. (2 boda)

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A kategorija

23. veljače 2009.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-4.1.

Dan je niz (a_n),

$$a_1 = 1, \qquad a_n = 3a_{n-1} + 2^{n-1}, \text{ za } n \geq 2.$$

Izrazi opći član niza a_n pomoću n.

Prvo rješenje.

Vrijedi

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 3a_1 + 2 \\ a_3 &= 3a_2 + 2^2 \\ &\dots \\ a_{n-1} &= 3a_{n-2} + 2^{n-2} \\ a_n &= 3a_{n-1} + 2^{n-1} \end{aligned}$$

(2 boda)

Pomnožimo prvu jednakost s 3^{n-1}, drugu s 3^{n-2}, treću s 3^{n-3},..., predzadnju s 3,

$$\begin{aligned} 3^{n-1}a_1 &= 3^{n-1} \\ 3^{n-2}a_2 &= 3^{n-1}a_1 + 2 \cdot 3^{n-2} \\ 3^{n-3}a_3 &= 3^{n-2}a_2 + 2^2 \cdot 3^{n-3} \\ &\dots \\ 3a_{n-1} &= 3^2 a_{n-2} + 2^{n-2} \cdot 3 \\ a_n &= 3a_{n-1} + 2^{n-1} \end{aligned}$$

te ih sve zbrojimo. Dobivamo:

$$a_n = 3^{n-1} + 2 \cdot 3^{n-2} + 2^2 \cdot 3^{n-3} + \ldots + 2^{n-1}$$

(10 bodova)

$$= 3^{n-1} + \frac{2}{3} \cdot 3^{n-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 3^{n-1} + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot 3^{n-1}$$

$$= 3^{n-1} \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} = 3^n - 2^n.$$

(8 bodova)

Dakle, $a_n = 3^n - 2^n$.

Drugo rješenje.

Zadatak se može riješiti i matematičkom indukcijom, ukoliko se formula za opći član uspije naslutiti.

Izračunajmo nekoliko prvih članova niza:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 3a_1 + 2 = 3 \cdot 1 + 2 = 5 \\ a_3 &= 3a_2 + 2^2 = 3 \cdot 5 + 4 = 19 \\ a_4 &= 3a_3 + 2^3 = 3 \cdot 19 + 8 = 65 \\ &\ldots \end{aligned}$$

Uočimo da je $a_1 = 3 - 2$, $a_2 = 9 - 4$, $a_3 = 27 - 8$, $a_4 = 81 - 16$.

Stoga naslućujemo da vrijedi $a_n = 3^n - 2^n$ za sve $n \in \mathbb{N}$. (5 bodova)
To ćemo dokazati matematičkom indukcijom.

Baza indukcije vrijedi.

Pretpostavimo da je za neki prirodan broj k, $a_k = 3^k - 2^k$.

Tada je

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \text{(prema danoj rekurziji)} = 3 \cdot a_k + 2^k \\ &= \text{(prema pretpostavci)} = 3 \cdot (3^k - 2^k) + 2^k \\ &= 3 \cdot 3^k - 3 \cdot 2^k + 2^k = 3^{k+1} - 2^{k+1}. \end{aligned}$$

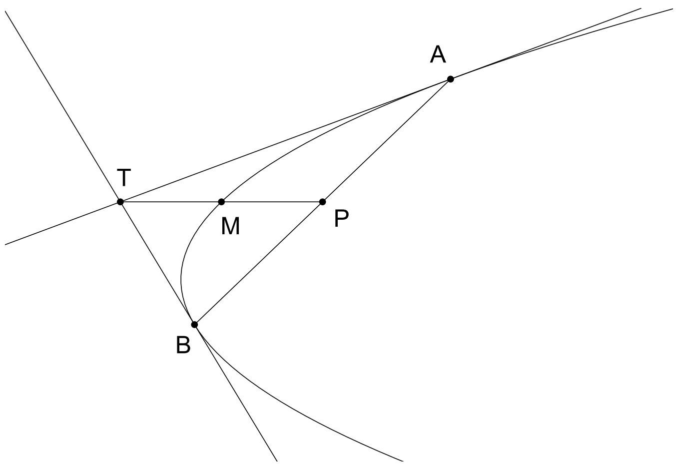
Dakle, ako je $a_k = 3^k - 2^k$, onda je $a_{k+1} = 3^{k+1} - 2^{k+1}$.

Sada prema principu matematičke indukcije zaključujemo da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_n = 3^n - 2^n$, što smo i htjeli pokazati. (15 bodova)

Zadatak A-4.2.

Točka P je polovište tetive parabole $\mathcal{P}$ u čijim su krajevima povučene tangente na tu parabolu. Neka je T sjecište tih tangenata. Dokaži da polovište dužine $\overline{PT}$ leži na paraboli.

Prvo rješenje.



Neka parabola ima jednadžbu $y^2 = 2px$, i neka je promatrana tetiva $\overline{AB}$.

Tangente parabole u točkama $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ imaju jednadžbe

$$y = \frac{p}{y_1}x + \frac{px_1}{y_1}, \qquad y = \frac{p}{y_2}x + \frac{px_2}{y_2}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Koordinate točke T dobit ćemo rješavajući taj sustav dviju jednadžbi.

Iz $\quad \left(\frac{p}{y_1} - \frac{p}{y_2}\right) x = p\left(\frac{x_2}{y_2} - \frac{x_1}{y_1}\right)$

dobivamo apscisu $\quad x = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{y_2 - y_1}$. (3 boda)

Pripadna ordinata je $\quad y = \frac{p}{y_1} \cdot \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{y_2 - y_1} + \frac{px_1}{y_1}$,

odnosno $\quad y = \frac{p(x_2 - x_1)}{y_2 - y_1}$. (3 boda)

Nadalje, budući da je $y_1^2 = 2px_1$ i $y_2^2 = 2px_2$, vrijedi $y = \frac{\frac{1}{2}y_2^2 - \frac{1}{2}y_1^2}{y_2 - y_1} = \frac{y_1 + y_2}{2}$

pa imamo $T\left(\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{y_2 - y_1}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$. (3 boda)

Polovište tetive $\overline{AB}$ je $P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$. (1 bod)

Računamo koordinate polovišta $M(x_m, y_m)$ dužine $\overline{PT}$:

$$\begin{aligned} x_m &= \frac{\dfrac{x_2y_1 - x_1y_2}{y_2 - y_1} + \dfrac{x_1 + x_2}{2}}{2} \\ &= \frac{x_2y_1 - x_1y_2 + x_2y_2 - x_1y_1}{4(y_2 - y_1)} = \frac{(x_2 - x_1)(y_1 + y_2)}{4(y_2 - y_1)}. \end{aligned}$$

Odmah se vidi da je $y_m = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$. (4 boda)

Konačno imamo:

$$\begin{aligned} 2\,p\,x_m &= \frac{(2px_2 - 2px_1)(y_1 + y_2)}{4(y_2 - y_1)} \\ &= \frac{(y_2^2 - y_1^2)(y_1 + y_2)}{4(y_2 - y_1)} = \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2 = {y_m}^2 \end{aligned}$$

što znači da točka $M(x_m, y_m)$ leži na paraboli. (4 boda)

Drugo rješenje.

Neka je $T(x_0, y_0)$. Ostale oznake kao u prvom rješenju.

Koordinate polovišta P tetive $\overline{AB}$ su $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$. (1 bod)

Polara $yy_0 = p(x + x_0)$ točke T (u odnosu na promatranu parabolu) je pravac AB, pa koordinate (x_1, y_1), (x_2, y_2) točaka A, B, zadovoljavaju sustav

$$\begin{cases} yy_0 = p(x + x_0) \\ y^2 = 2px \end{cases}$$ (2 boda)

te stoga i jednadžbu $y^2 = 2p\left(\dfrac{yy_0}{p} - x_0\right)$, tj. $y^2 = 2yy_0 - 2px_0$. (1 bod)

To je kvadratna jednadžba po y, pa vrijedi $y_1 + y_2 = 2y_0$. (2 boda)

Zaključujemo da je ordinata točke P jednaka y_0, dakle ordinati točke T. (3 boda)

Apscisa točke P dobije se iz uvjeta da P leži na polari, $x_p = \dfrac{y_p y_0}{p} - x_0 = \dfrac{y_0^2}{p} - x_0$, (3 boda)

pa je $P\left(\dfrac{y_0^2}{p} - x_0, y_0\right)$.

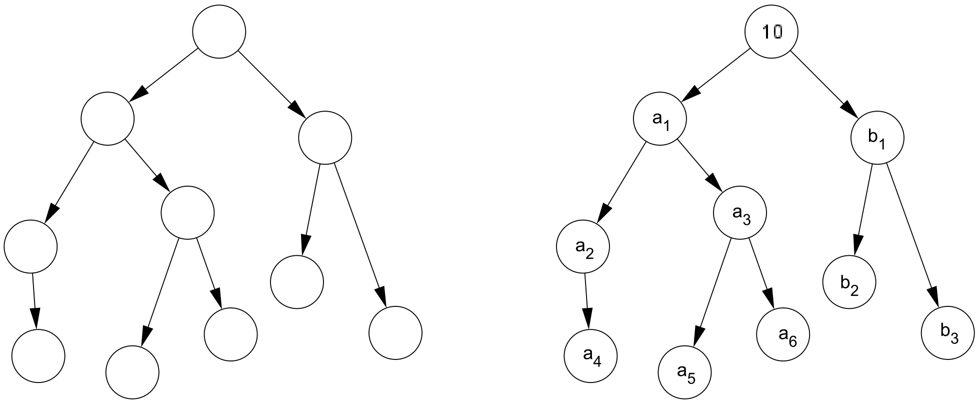
Polovište dužine $\overline{PT}$ je točka $M\left(\dfrac{x_0 + x_p}{2}, \dfrac{y_0 + y_p}{2}\right)$, tj. $M\left(\dfrac{y_0^2}{2p}, y_0\right)$. (4 boda)

Sada nije teško provjeriti da ona leži na paraboli, jer $2 \cdot p \cdot \dfrac{y_0^2}{2p} = y_0^2$. (4 boda)

(Alternativno, može se odrediti sjecište pravca PT s parabolom i provjeriti da je ta točka polovište od $\overline{PT}$.)

Zadatak A-4.3.

Na koliko načina možemo upisati brojeve 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 u kružiće na slici tako da svaka strelica pokazuje od većeg broja prema manjem ?



Rješenje.

Broj u gornjem kružiću očito mora biti 10. (1 bod)

Označimo preostale kružiće, odnosno brojeve u njima, s $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, b_1, b_2, b_3$ kao na slici.

Preostalih 9 brojeva možemo podijeliti u skupove $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ i $\{b_1, b_2, b_3\}$ na $\binom{9}{3} = 84$ načina. (4 boda)

Unutar odabranog skupa $\{b_1, b_2, b_3\}$, b_1 mora biti najveći, (1 bod)
dok b_2 i b_3 možemo odabrati na 2 načina. (1 bod)

Unutar skupa $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$, a_1 mora biti najveći, (1 bod)

a iz skupa $\{a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ možemo odabrati $\{a_2, a_4\}$ na $\binom{5}{2} = 10$ načina. (3 boda)

Mora biti $a_2 > a_4$, (1 bod)
a od preostalih brojeva $\{a_3, a_5, a_6\}$ najveći je a_3. (1 bod)

Konačno, a_5 i a_6 možemo odabrati na 2 načina. (1 bod)

Ukupan broj načina je umnožak (4 boda)

$$84 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 2 = 3360. \qquad \text{(2 boda)}$$

Zadatak A-4.4.

Neka je a prirodni broj veći od 1. Dokaži da je broj

$$n(2n+1)(3n+1)\ldots(an+1)$$

djeljiv sa svim prostim brojevima manjim od a, za svaki prirodan broj n.

Rješenje.

Neka je $p < a$ prost broj. Ako je n djeljiv s p, tvrdnja vrijedi. (2 boda)

Neka n nije djeljiv s p. Tada brojevi $2n+1$, $3n+1, \ldots, (p+1)n+1$ daju različite ostatke r_1, $r_2, \ldots, r_p$ (redom) pri dijeljenju s p. (5 bodova)

Zaista, kada bi bilo $r_i = r_j$ za $i, i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, $i \neq j$, onda bi broj

$$((i+1)n+1) - ((j+1)n+1) = (i-j)n$$

bio djeljiv sa p. Kako p ne dijeli n, broj $i-j$ morao bi biti djeljiv s p, što je nemoguće jer je $1 \leq |i-j| < p$. (8 bodova)

Kako imamo p različitih ostataka, jedan od njih je jednak nuli, a odgovarajući faktor promatranog produkta djeljiv s p. (5 bodova)

Zadatak A-4.5.

Prvih 2010 prirodnih brojeva napisano je u nizu bilo kojim redom, a zatim je svakom od njih pribrojen njegov redni broj u tom nizu. Dokaži da među tako dobivenim zbrojevima postoje dva čija je razlika djeljiva s 2010.

Rješenje.

Pretpostavimo da dobiveni zbrojevi s_1, $s_2, \ldots, s_{2010}$ pri dijeljenju s 2010 svi daju različite ostatke r_1, $r_2, \ldots, r_{2010}$. Ti su ostaci brojevi 0, 1, 2, ..., 2009 (u nekom poretku) pa je zbroj svih ostataka jednak

$$R = 0+1+2+\ldots+2009 = \frac{2010 \cdot 2009}{2} = 1005 \cdot 2009. \qquad \text{(5 bodova)}$$

Zbroj promatranih zbrojeva je

$$S = s_1 + s_2 + \ldots + s_{2010} = 2 \cdot \frac{2010 \cdot 2011}{2} = 2010 \cdot 2011. \qquad \text{(5 bodova)}$$

Naravno, razlika svakog od brojeva s_k i njegovog ostatka pri dijeljenju s 2010, r_k, je djeljiva s 2010, pa bi i zbroj tih razlika

$$\sum_{k=1}^{2010}(s_k - r_k) = \sum_{k=1}^{2010} s_k - \sum_{k=1}^{2010} r_k = S - R$$

trebao biti djeljiv s 2010. (5 bodova)

No, razlika $S - R = 2010 \cdot 2011 - 1005 \cdot 2009$ nije djeljiva s 2010, pa smo dobili kontradikciju.

Pretpostavka da su svi ostaci r_1, $r_2, \ldots, r_{2010}$ različiti je pogrešna, dakle postoje dva jednaka ostatka r_i, r_j, odnosno dva zbroja s_i i s_j čija je razlika djeljiva s 2010.

(5 bodova)