

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B kategorija

23. veljače 2009.

1. Odredi nepoznate znamenke a , b , c , d tako da vrijedi $\overline{a3bc} \cdot 45 = \overline{37d15b}$.
(20)

2. U skupu realnih brojeva riješi jednadžbu
(20)

$$|x + 3| + 2\sqrt{x^2 + 2x + 1} = 7.$$

3. Duljine kateta pravokutnog trokuta su 8 cm i 6 cm. Unutar trokuta dana je točka
(20) T koja je od kraće katete udaljena za 1 cm, a od dulje 2 cm. Koliko je točka T udaljena od hipotenuze? Kolika je duljina visine na hipotenuzu?

4. Ako je $a + b = 1$, dokaži jednakost $\frac{a}{b^3 - 1} - \frac{b}{a^3 - 1} = \frac{2(b - a)}{a^2b^2 + 3}$.
(20)

5. Razlika dva neparna broja djeljiva je s 5. Kojom znamenkom završava razlika kubova
(20) tih brojeva?

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B kategorija

23. veljače 2009.

1. Odredi sve kompleksne brojeve z takve da su moduli brojeva z , $\frac{1}{z}$, $1 - z$ jednaki.
(20)

2. U skupu kompleksnih brojeva odredi sva rješenja jednadžbe
(20)

$$x^8 + 4x^6 - 10x^4 + 4x^2 + 1 = 0.$$

3. Pojednostavni izraz
(20)

$$-x^{-x^{-x}} \left(\frac{x^{-x^x} + x^{x^{-x}}}{x^{-x^{-x}} + x^{x^x}} \right)$$

za $x > 0$.

4. Dvije kružnice duljina promjera 6 cm i 18 cm diraju se izvana. Izračunaj površinu
(20) lika omeđenog kružnicama i njihovom zajedničkom vanjskom tangentom.

5. Duljina stranice kvadrata je 6 cm. Na stranicama \overline{AB} i \overline{AD} zadane su točke K i L
(20) takve da je $|AK| = 2$ cm i $|AL| = 3$ cm. Kvadratu je upisan trapez s osnovicom \overline{KL} . Kolika je najveća moguća površina upisanog trapeza?

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B kategorija

23. veljače 2009.

1. Duljina hipotenuze pravokutnog trokuta je c , a duljina simetrale jednog od šiljastih
(20) kutova je $\frac{c\sqrt{3}}{3}$. Kolike su duljine kateta?

2. Riješi nejednadžbu
(20)

$$\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2(16x) < 1.$$

3. Od kocke duljine brida 3 cm odsječeno je svih osam vrhova tako da novo tijelo ima
(20) sve bridove jednakih duljina. Koliki je volumen novonastalog tijela?

4. Izračunaj zbroj
(20)

$$\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \dots + \sin^2 90^\circ.$$

5. Duljine visina trokuta ABC odnose se kao $v_a : v_b : v_c = 6 : 2\sqrt{3} : 3$, a opseg opisane
(20) mu kružnice iznosi 8π cm. Odredi duljine stranica i veličine kutova trokuta ABC .

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B kategorija

23. veljače 2009.

1. Riješi sustav jednadžbi (u skupu prirodnih brojeva)
(20)

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y + 2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x \\ 2 \end{pmatrix} = 153. \end{cases}$$

2. U jednakokračnom trokutu ABC ($|AC| = |BC|$) točka D je polovište baze \overline{AB} , dužina \overline{DE} je visina trokuta DBC , a M polovište dužine \overline{DE} . Dokaži da su pravci AE i CM međusobno okomiti.
3. Svaka stranica kvadrata, duljine a , podijeljena je u omjeru $1 : x$ ($x > 1$). Dobivene točke su vrhovi novog kvadrata upisanog polaznom. Isti postupak se nastavlja sa svakim novim kvadratom. Koliki je zbroj površina polaznog i svih tako dobivenih kvadrata?
4. Veličine kutova $\alpha < \beta < \gamma$ trokuta uzastopni su članovi aritmetičkog niza, a duljine njegovih stranica su a, b, c . Dokaži jednakost $(a + c)^2 = b^2 + 3ac$.
5. Pravac kroz ishodište siječe pravce dane jednadžbama $x + y - 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$ u točkama A i B . Odredi geometrijsko mjesto polovišta dužina \overline{AB} .