DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
7. razred – rješenja

Pula, 30. ožujka 2009.

1. Neka su duljine stranica trokuta a, b i c, te duljine odgovarajućih visina v_a, v_b i v_c.
Kako je $v_a : v_b : v_c = 3 : 4 : 5$, slijedi da je $v_a = 3k$, $v_b = 4k$, $v_c = 5k$, $k \in \mathbb{Q}$.
Kako je površina trokuta jednaka polovini umnoška duljine stranice i duljine odgovarajuće visine, imamo da je

$$a = \frac{2P}{3k}, \qquad b = \frac{2P}{4k}, \qquad c = \frac{2P}{5k},$$

pri čemu P označava površinu trokuta. Zbog toga vrijedi razmjer $a : b : c = \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5}$.
Svođenjem na zajednički nazivnik imamo da je $a : b : c = \frac{20}{60} : \frac{15}{60} : \frac{12}{60}$, odnosno $a : b : c = 20 : 15 : 12$.
Stoga je $a = 20l$, $b = 15l$, $c = 12l$, $l \in \mathbb{Q}$. Očito je a najdulja stranica, pa je $20l = 12$, odakle je $l = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$.
Konačno, opseg trokuta je $o = a + b + c = 20l + 15l + 12l = 47l = 47 \cdot \frac{3}{5} = \frac{141}{5} = 28.2$ cm.
. . . . UKUPNO 10 BODOVA

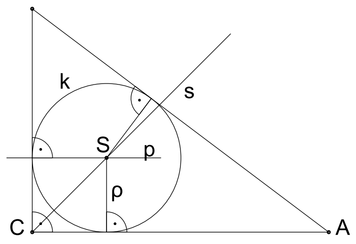
2. Neka prva tvornica proizvodi dnevno x automobila, a druga y automobila. Prema uvjetu zadatka moraju vrijediti sljedeće tri nejednakosti:

$$x + y < 18, \quad y < 2x, \quad x + 2 < y - 2.$$

Zbrojimo li prvu i treću nejednakost dobivamo da je $x + y + x + 2 < 18 + y - 2$, odakle je $2x < 14$, tj. $x < 7$.
Druga i treća nejednakost daju $x + 4 < y < 2x$, odakle je $x + 4 < 2x$, pa je $x > 4$. Stoga je $x = 5$ ili $x = 6$.
Ako je $x = 5$, iz druge i treće nejednakosti dobivamo da istovremeno mora biti $y < 10$ i $y > 9$, što nije moguće.
Dakle, mora biti $x = 6$, odakle opet iz druge i treće nejednakosti dobivamo da je $y < 12$ i $y > 10$, pa je $y = 11$.
Neposrednom provjerom uočavamo kako $x = 6$ i $y = 11$ zadovoljavaju uvjete zadatka.
. . . . UKUPNO 10 BODOVA

3. Neka je $\overline{abc}$ troznamenkasti broj koji zadovoljava uvjete zadatka.
Tada je $a \neq b \neq c$ i razlomci $\frac{\overline{abc}}{\overline{ab}}$, $\frac{\overline{abc}}{\overline{bc}}$, $\frac{\overline{abc}}{\overline{ac}}$ su cijeli brojevi.
1° Kako je $\frac{\overline{abc}}{\overline{ab}} = \frac{\overline{ab0} + c}{\overline{ab}} = 10 + \frac{c}{\overline{ab}}$, slijedi da je $\frac{c}{\overline{ab}}$ cijeli broj, a to je moguće samo ako je $c = 0$.
2° Sada imamo da je $\frac{\overline{ab0}}{\overline{a0}} = \frac{\overline{ab}}{a} = \frac{10a + b}{a} = 10 + \frac{b}{a}$, pa b mora biti višekratnik od a.
Kako je $a \neq b$, slijedi da znamenka a može poprimiti vrijednosti iz skupa $\{1, 2, 3, 4\}$.
3° Nadalje, $\frac{\overline{ab0}}{\overline{b0}} = \frac{\overline{ab}}{b} = \frac{10a + b}{b} = 1 + \frac{10a}{b}$, pa b mora biti djelitelj od $10a$.
Konačno, kombiniranjem uvjeta 2° i 3° dobivamo pet rješenja: 120, 150, 240, 360, 480.
. . . . UKUPNO 10 BODOVA

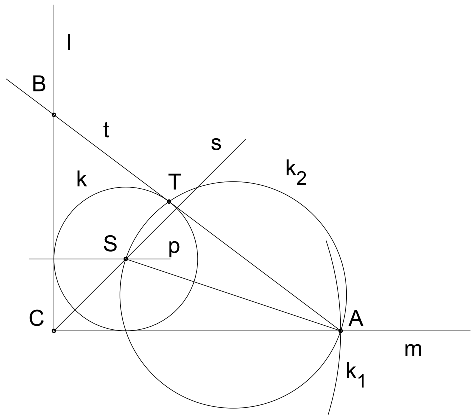
4. ANALIZA



Središte S upisane kružnice je presjek simetrale s kuta γ i pravca p usporednog s $\overline{AC}$ i udaljenog od $\overline{AC}$ za ϱ. Vrh B je presjek tangente iz točke A na upisanu kružnicu k i okomice na $\overline{AC}$ u točki C.

KONSTRUKCIJA

1° Konstruirati pravi kut γ s vrhom C i krakovima m i l.
2° Konstruirati simetralu s kuta γ.
3° Konstruirati dužinu $\overline{AC}$, pri čemu je točka A sjecište kraka m i kružnice $k_1(C, b)$.
4° Konstruirati pravac p usporedan s $\overline{AC}$ i udaljen od $\overline{AC}$ za ϱ. Sjecište pravaca s i p je središte S trokutu upisane kružnice.
5° Konstruirati upisanu kružnicu $k(S, \varrho)$.
6° Konstruirati kružnicu k_2 nad promjerom $\overline{SA}$. Neka je T sjecište kružnica k i k_2, koje ne pripada kraku m. Kako je $\sphericalangle ATS$ obodni kut nad promjerom kružnice k_2, to je $\sphericalangle ATS = 90°$, pa je pravac $t = AT$ tangenta kružnice k. Sjecište tangente t i kraka l određuje vrh B trokuta ABC.

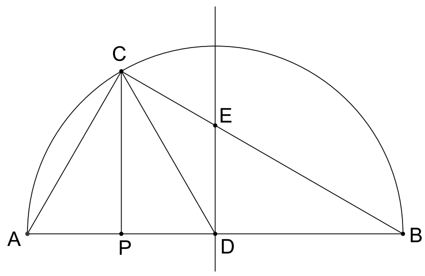


RASPRAVA

Zadatak ima jedinstveno rješenje.

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

5. Neka je D polovište hipotenuze $\overline{AB}$, neka je P nožište visine iz vrha C te neka je E sjecište simetrale hipotenuze sa stranicom $\overline{BC}$.



Kako je površina trokuta DBE tri puta manja od površine trokuta ABC i budući je $|DB| = \frac{|AB|}{2}$, slijedi jednakost

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{|AB|}{2} \cdot |ED| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}|AB| \cdot |CP|,$$

odakle dobivamo razmjer

$$\frac{|CP|}{|ED|} = \frac{3}{2}.$$

Nadalje, iz sličnosti trokuta DBE i PBC dobivamo da je

$$\frac{|BP|}{|BD|} = \frac{|CP|}{|ED|} = \frac{3}{2}.$$

Zbog toga je $|BP| = \frac{3}{2}|BD| = \frac{3}{2} \cdot \frac{|AB|}{2} = \frac{3}{4}|AB|$, pa je $|AP| = |AB| - |BP| = \frac{1}{4}|AB|$. Stoga je i $|PD| = \frac{1}{4}|AB|$.
Prema tome, točka P je polovište dužine $\overline{AD}$, pa je trokut ADC jednakokračan, tj. $|AC| = |DC|$.
No, točka D je središte opisane kružnice pravokutnog trokuta ABC, pa je $|AD| = |DC|$.
Dakle, trokut ADC je jednakostraničan, pa je $\sphericalangle CAB = 60°$.
Konačno, kako je zbroj kutova u trokutu jednak 180°, lagano dobivamo da je $\sphericalangle ABC = 30°$.

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
8. razred – rješenja
Pula, 30. ožujka 2009.

1. Kvadriranjem zadane jednakosti dobivamo da je

$$x + y + 2\sqrt{xy} = xy + x + y,$$

odakle je $2\sqrt{xy} = xy$, odnosno, nakon ponovnog kvadriranja, $4xy = x^2y^2$. Odatle je

$$x^2y^2 - 4xy = xy(xy - 4) = 0.$$

Sada, kako su x i y prirodni brojevi, slijedi da je $xy - 4 = 0$, tj. $xy = 4$. Konačno, kako su x i y prirodni brojevi čiji je umnožak jednak 4, dobivamo tri uređena para koji zadovoljavaju uvjete zadatka: $(1, 4)$, $(2, 2)$, $(4, 1)$.
. . . . UKUPNO 10 BODOVA

2. Neka su a i b neparni brojevi. Tada ih možemo prikazati u obliku $a = 2m + 1$ i $b = 2n + 1$, pri čemu su m i n cijeli brojevi. Sada je

$$a^2 - b^2 = (2m + 1)^2 - (2n + 1)^2 = (4m^2 + 4m + 1) - (4n^2 + 4n + 1) = 4(m^2 + m - n^2 - n),$$

odakle odmah slijedi da je razlika kvadrata djeljiva s 4.
Preostaje još dokazati da je broj $m^2 + m - n^2 - n$ paran, tj. djeljiv s 2. Naime, taj broj možemo zapisati u obliku $m^2 + m - n^2 - n = m(m + 1) - n(n + 1)$.
Sada, brojevi $m(m + 1)$ i $n(n + 1)$ su umnošci dvaju uzastopnih cijelih brojeva, pa su oni parni.
Stoga je i njihova razlika paran broj, odakle slijedi da je broj $m^2 + m - n^2 - n$ djeljiv s 2.
Dakle, razlika kvadrata dvaju neparnih brojeva je djeljiva s $4 \cdot 2 = 8$, što je i trebalo dokazati.
. . . . UKUPNO 10 BODOVA

3. Pogledajmo prvo koliko ima šesteroznamenkastih brojeva koji počinju s izabranom znamenkom $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

$$\underline{a}\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_ .$$

Njih ima $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$, zato jer za svaku iduću znamenku imamo jednu mogućnost manje.
Kako je $4 \cdot 120 = 480 < 500$ i $5 \cdot 120 = 600 > 500$, slijedi da je $a = 5$, pa traženi broj počinje znamenkom 5.
Promatramo sada brojeve

$$\underline{5}\ \underline{b}\ \_\ \_\ \_\ \_ ,$$

pri čemu je $b \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ izabrana znamenka. Takvih brojeva ima $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
Sada, kako je $480 + 24 = 504 > 500$, mora biti $b = 1$.
Postupak nastavljamo dalje. Promatramo brojeve

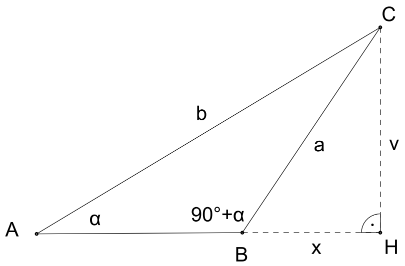
$$\underline{5}\ \underline{1}\ \underline{c}\ \_\ \_\ \_ ,$$

pri čemu je $c \in \{2, 3, 4, 6\}$ izabrana znamenka. Takvih brojeva ima $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.
Kako je $480 + 3 \cdot 6 = 498 < 500$ i $480 + 4 \cdot 6 = 504 > 500$, slijedi da je $c = 6$.
Nadalje, promatramo brojeve

$$\underline{5}\ \underline{1}\ \underline{6}\ \underline{d}\ \_\ \_ ,$$

pri čemu je $d \in \{2, 3, 4\}$. Za izabranu znamenku d, tih brojeva ima $2 \cdot 1 = 2$.
Konačno, kako je $480 + 3 \cdot 6 + 2 = 500$, mora biti $d = 2$. Štoviše, kako je $480 + 3 \cdot 6 + 2 = 500$, traženi broj mora biti najveći broj oblika $\overline{5162ef}$ iz promatranog skupa brojeva, pa je $e = 4$, $f = 3$.
Dakle, na petstotom mjestu se nalazi broj 516243.
. . . . UKUPNO 10 BODOVA

4. *Prvi način:* Uvedimo oznake $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|CA| = b$, $\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle BCA = \gamma$.
Prema uvjetu zadatka je $\beta = 90^\circ + \alpha$, pa je zadani trokut tupokutan.
Neka je H nožište visine iz vrha C, te neka je $|CH| = v$ i $|BH| = x$.



Pokažimo sada da su pravokutni trokuti AHC i BHC slični. Naime, očito je
$\sphericalangle CBH = 180^\circ - (90^\circ + \alpha) = 90^\circ - \alpha$, odakle je $\sphericalangle HCB = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha = \sphericalangle CAH$.
Dakle, pravokutni trokuti AHC i BHC imaju jednak šiljasti kut. Stoga im je jednak i drugi šiljasti kut, pa su oni slični. Iz dokazane sličnosti, uz istaknute oznake, vrijedi razmjer $\frac{b}{v} = \frac{a}{x}$, odakle je $x = \frac{av}{b}$.
S druge strane, primjenom Pitagorinog poučka na trokut BHC slijedi jednakost $x^2 + v^2 = a^2$.
Uvrstimo li u tu jednakost dobiveni izraz za x, imamo da je

$$\frac{a^2v^2}{b^2} + v^2 = a^2, \quad \text{tj.} \quad \frac{a^2v^2 + b^2v^2}{b^2} = a^2,$$

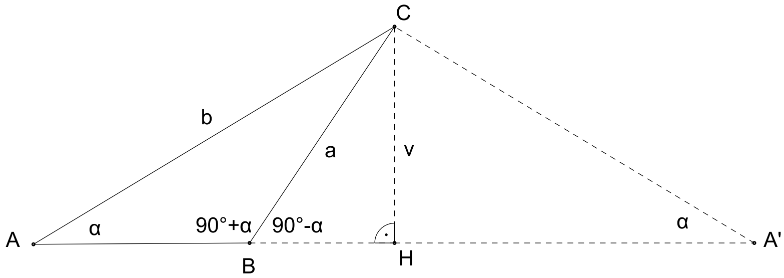
odakle je

$$v^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}, \quad \text{tj.} \quad v = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Konačno, kako je $a = 6$ cm, $b = 8$ cm, imamo da je

$$v = \frac{6 \cdot 8}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{48}{\sqrt{36 + 64}} = \frac{48}{\sqrt{100}} = \frac{48}{10} = 4.8 \text{ cm}.$$

Drugi način: U ovom rješenju koristimo iste oznake kao i u prvom rješenju.
Neka je A' centralno simetrična slika točke A u odnosu na točku H.



Tada je trokut $AA'C$ jednakokračan pa je $|A'C| = b$ i $\sphericalangle BA'C = \alpha$.
Uočimo da je trokut $BA'C$ pravokutan zato jer je $\sphericalangle A'CB = 180^\circ - (90^\circ - \alpha + \alpha) = 90^\circ$.
Dakle, visina $\overline{CH}$ trokuta ABC podudara se s visinom pravokutnog trokuta $BA'C$. Izrazimo li površinu pravokutnog trokuta $BA'C$ na dva načina, dobivamo jednakost

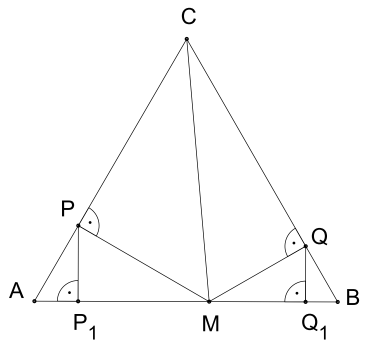
$$\frac{ab}{2} = \frac{|BA'|v}{2}.$$

Sada, prema Pitagorinom poučku je $|BA'| = \sqrt{a^2 + b^2}$, pa uvrštavanjem u prethodnu jednakost dobivamo da je

$$v = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

odakle kao i u prvom rješenju dobivamo da je $v = 4.8$ cm.
. . . . UKUPNO 10 BODOVA

5. Neka je duljina stranice trokuta ABC jednaka a.



Kako je površina trokuta ABC jednaka zbroju površina trokuta AMC i MBC, slijedi da je

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a \cdot |MP|}{2} + \frac{a \cdot |MQ|}{2},$$

odakle je

$$|MP| + |MQ| = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \tag{1}$$

Pravokutni trokut P_1MP ima šiljaste kutove od $30°$ i $60°$, pa je on polovina jednakostraničnog trokuta. Zbog toga je $\overline{P_1M}$ visina jednakostraničnog trokuta sa stranicom $\overline{PM}$, pa je

$$|P_1M| = \frac{|PM|\sqrt{3}}{2}.$$

Slično, pravokutni trokut MQ_1Q je polovina jednakostraničnog trokuta, pa je

$$|MQ_1| = \frac{|MQ|\sqrt{3}}{2}.$$

Stoga, zbog jednakosti (1) vrijedi

$$\begin{aligned} |P_1Q_1| &= |P_1M| + |MQ_1| = \frac{|PM|\sqrt{3}}{2} + \frac{|MQ|\sqrt{3}}{2} \\ &= (|PM| + |MQ|)\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{4} = \frac{3}{4}|AB|. \end{aligned}$$

. . . . UKUPNO 10 BODOVA