Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A kategorija

30. ožujka 2009.

1. Odredi sve trojke uzastopnih neparnih prirodnih brojeva čiji je zbroj kvadrata jednak nekom četveroznamenkastom broju kojem su sve znamenke jednake.

2. Zadan je konveksan četverokut $ABCD$ koji nije paralelogram. Neka pravac koji prolazi kroz polovišta dijagonala četverokuta siječe stranice $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ redom u točkama M i N. Dokaži da trokuti ABN i CDM imaju jednake površine.

3. Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi, takvi da je $xyz = 1$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2} + \frac{y^3+z^3}{y^2+yz+z^2} + \frac{z^3+x^3}{z^2+zx+x^2} \geq 2.$$

4. Dan je pravilni deveterokut sa stranicom duljine a. Kolika je razlika duljina njegove najdulje i najkraće dijagonale?

5. Dva igrača, A i B igraju sljedeću igru: A i B zapisuju naizmjenično po jednu znamenku sve dok ne napišu šesteroznamenkasti broj, pri čemu se niti jedna znamenka ne smije ponoviti. Prva znamenka mora biti različita od 0. Igrač A igra prvi, a znamenke se pišu redom s lijeva na desno. Igrač A pobjeđuje ako je napisani šesteroznamenkasti broj djeljiv s 2, 3 ili 5, a u suprotnom pobjeđuje igrač B. Dokaži da igrač A ima strategiju za pobjedu, tj. može pobijediti neovisno o igri igrača B.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A kategorija

30. ožujka 2009.

1. Neka su a i b cijeli brojevi takvi da je $a^2 + 2b$ kvadrat cijelog broja. Dokaži da se broj $a^2 + b$ može prikazati kao zbroj kvadrata dvaju cijelih brojeva.

2. Dan je četverokut $ABCD$. Opisana kružnica trokuta ABC siječe stranice $\overline{CD}$ i $\overline{DA}$ redom u točkama P i Q, a opisana kružnica trokuta CDA stranice $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ redom u točkama R i S. Pravci BP i BQ sijeku pravac RS redom u točkama M i N. Dokaži da točke M, N, P i Q leže na istoj kružnici.

3. Nađi sve parove kompleksnih brojeva (w, z), $w \neq z$, koji zadovoljavaju sustav jednadžbi
$$w^5 + w = z^5 + z,$$
$$w^5 + w^2 = z^5 + z^2.$$

4. Odredi najveću vrijednost realne konstante λ takve da za sve pozitivne realne brojeve u, v, w za koje je $u\sqrt{vw} + v\sqrt{wu} + w\sqrt{uv} \geq 1$ vrijedi nejednakost $u + v + w \geq \lambda$.

5. U svako polje tablice $m \times n$ (m, $n \in \mathbb{N}$) upisano je slovo A ili B. Pritom nikoja dva susjedna polja (sa zajedničkom stranicom) ne sadrže isto slovo. U jednom koraku biraju se dva susjedna polja, i oba slova na tim poljima zamijene se novim slovima po sljedećem pravilu:
   - umjesto slova A upisuje se slovo B,
   - umjesto slova B upisuje se slovo C,
   - umjesto slova C upisuje se slovo A.

   Za koje m i n nakon konačno mnogo koraka možemo postići da u svim poljima u kojima je na početku bilo napisano slovo A sada piše slovo B, a u svim poljima u kojima je na početku bilo napisano slovo B sada piše slovo A?

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A kategorija

30. ožujka 2009.

1. Odredi sve prirodne brojeve m i n za koje je $6^m + 2^n + 2$ potpun kvadrat.

2. Neka je ABC trokut u kojem vrijedi $|AC| > |BC|$. Izrazi površinu trokuta određenog stranicom $\overline{AB}$, simetralom stranice $\overline{AB}$ i simetralom kuta $\sphericalangle ACB$ pomoću duljina stranica trokuta ABC.

3. Neka je ABC trokut sa stranicama duljina a, b i c i neka je P točka u njegovoj unutrašnjosti. Neka pravac AP ponovno siječe kružnicu opisanu trokutu BCP u točki A' i neka su B' i C' točke definirane analogno. Dokaži da za opseg O šesterokuta $AB'CA'BC'$ vrijedi
$$O \geq 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}).$$

4. Neka je $n \in \mathbb{N}$ te $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitivni realni brojevi za koje vrijedi
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \ldots + \frac{1}{a_n^2}.$$
Dokaži da za svaki $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ postoji m brojeva iz skupa $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ čiji je zbroj barem m.

5. U jednom vrhu kocke nalaze se dva pauka, a u suprotnom vrhu muha. Pauci i muha kreću se isključivo po bridovima kocke jednakim konstantnim brzinama. U svakom trenutku paucima je poznata pozicija muhe i muhi je poznata pozicija pauka. Dokaži da pauci mogu uhvatiti muhu. Smatra se da je muha uhvaćena ako se nađe u istoj točki kao i jedan od paukova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A kategorija

30. ožujka 2009.

1. Neka je $\overline{CH}$ visina šiljastokutnog trokuta ABC, a točka O središte njemu opisane kružnice. Ako je T nožište okomice iz točke C na pravac AO, dokaži da pravac TH prolazi polovištem dužine $\overline{BC}$.

2. Dani su realni brojevi $x_0 > x_1 > x_2 > \cdots > x_n$. Dokaži da je

$$x_0 - x_n + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geq 2n.$$

Kada vrijedi jednakost?

3. Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je

$$f(x) = \max_{y \in \mathbb{R}} \big(2xy - f(y)\big)$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$.

4. Odredi sve parove prirodnih brojeva (m, n), $m, n > 1$, za koje je $n^3 - 1$ djeljivo s $mn - 1$.

5. Unutar kvadrata stranice duljine 38 smješteno je 100 konveksnih mnogokuta, pri čemu je površina svakog od njih najviše π, a opseg najviše 2π. Dokaži da unutar tog kvadrata postoji krug polumjera 1 koji ne siječe niti jedan od danih 100 mnogokuta.