DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A kategorija

30. ožujka 2009.

Zadatak A-1.1.

Odredi sve trojke uzastopnih neparnih prirodnih brojeva čiji je zbroj kvadrata jednak nekom četveroznamenkastom broju kojem su sve znamenke jednake.

Rješenje.

Tražimo prirodan broj k i znamenku $x \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ takve da vrijedi:

$$\begin{aligned} (2k-1)^2 + (2k+1)^2 + (2k+3)^2 &= \overline{xxxx} \\ 12k^2 + 12k + 11 &= 1111x \\ 12(k^2+k) + 11 &= 12 \cdot 92x + 7x. \end{aligned}$$

Slijedi da je $7x - 11$ djeljivo s 12.

Stoga x mora biti neparan.

Za $x \in \{1, 3, 7, 9\}$, $7x - 11$ nije djeljivo s 12.

Za $x = 5$ imamo $7 \cdot 5 - 11 = 24 = 2 \cdot 12$. Tada je:

$$\begin{aligned} 12k^2 + 12k + 11 &= 5555 \\ 12k^2 + 12k &= 5544 \ / : 12 \\ k^2 + k = k(k+1) &= 462 = 21 \cdot 22. \end{aligned}$$

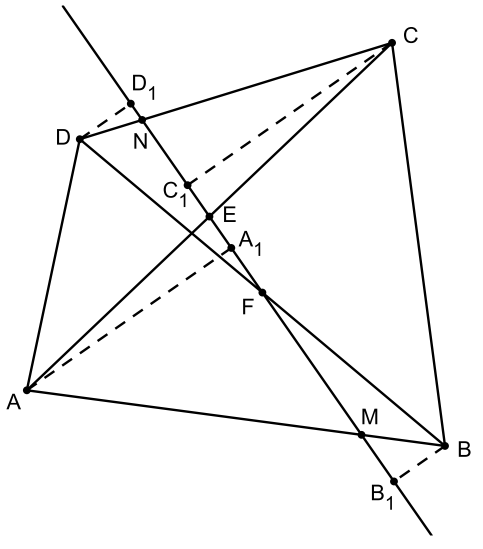
Dakle, $k = 21$, a traženi brojevi su 41, 43 i 45.

Zadatak A-1.2.

Zadan je konveksan četverokut $ABCD$ koji nije paralelogram. Neka pravac koji prolazi kroz polovišta dijagonala četverokuta siječe stranice $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ redom u točkama M i N. Dokaži da trokuti ABN i CDM imaju jednake površine.

Rješenje.

Neka su E i F redom polovišta dijagonala $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$. Nadalje, neka su A_1, B_1, C_1, D_1 redom nožišta okomica iz vrhova A, B, C, D na pravac EF.



Zbog $\sphericalangle AEA_1 = \sphericalangle CEC_1$ (vršni kutevi) i $|AE| = |EC|$, vrijedi da su pravokutni trokuti AA_1E i CC_1E sukladni. Zbog toga je $|AA_1| = |CC_1|$.

Analogno, trokuti BB_1F i DD_1F su sukladni i vrijedi $|BB_1| = |DD_1|$.

Vrijedi

$$\begin{aligned} P(ABN) &= P(AMN) + P(MBN) \\ &= \frac{|MN| \cdot |AA_1|}{2} + \frac{|MN| \cdot |BB_1|}{2} \\ &= \frac{1}{2}|MN|\big(|AA_1| + |BB_1|\big) \end{aligned}$$

i slično:

$$\begin{aligned} P(CDM) &= P(CMN) + P(MDN) \\ &= \frac{|MN| \cdot |CC_1|}{2} + \frac{|MN| \cdot |DD_1|}{2} \\ &= \frac{1}{2}|MN|\big(|CC_1| + |DD_1|\big). \end{aligned}$$

Dakle,

$$P(ABN) = \frac{1}{2}|MN|\big(|AA_1| + |BB_1|\big) = \frac{1}{2}|MN|\big(|CC_1| + |DD_1|\big) = P(CDM).$$

Zadatak A-1.3.

Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi, takvi da je $xyz = 1$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}+\frac{y^3+z^3}{y^2+yz+z^2}+\frac{z^3+x^3}{z^2+zx+x^2} \geq 2.$$

Rješenje.

Najprije uočimo da

$$\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2} \geq \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 3\left(x^2-xy+y^2\right) \geq x^2+xy+y^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2(x-y)^2 \geq 0,$$

pa je $\dfrac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2} = \dfrac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2} \cdot (x+y) \geq \dfrac{1}{3}(x+y).$

Zato vrijedi

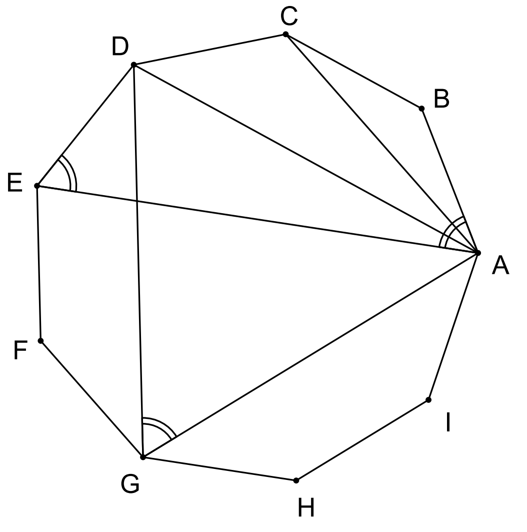
$$\begin{aligned}\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}&+\frac{y^3+z^3}{y^2+yz+z^2}+\frac{z^3+x^3}{z^2+zx+x^2}\\ &\geq \frac{1}{3}(x+y)+\frac{1}{3}(y+z)+\frac{1}{3}(z+x)=\frac{2}{3}(x+y+z)\end{aligned}$$

Konačno, zbog nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine i zbog uvjeta zadatka vrijedi $\dfrac{2}{3}(x+y+z) \geq 2\sqrt[3]{xyz} = 2\sqrt[3]{1} = 2,$ čime je nejednakost dokazana.

Zadatak A-1.4.

Dan je pravilni deveterokut sa stranicom duljine a. Kolika je razlika duljina njegove najdulje i najkraće dijagonale?

Rješenje.



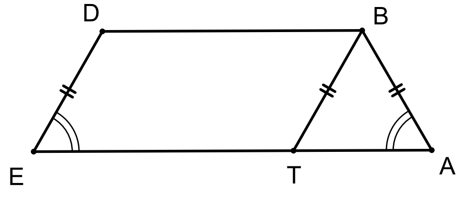
Bez smanjenja općenitosti, gledamo dužine iz vrha A. Duljina najdulje dijagonale je $|AE|$, a najkraće $|AC|$ i traži se $|AE| - |AC|$.

Primijetimo da su trokuti ADG i BEH jednakostranični. Zato, i zbog jednakosti kuteva nad istim lukom deveterokutu opisane kružnice, vrijedi:

$$\sphericalangle AED = \sphericalangle AGD = 60^\circ \quad \text{i} \quad \sphericalangle EAB = \sphericalangle EHB = 60^\circ.$$

Prema tome, četverokut $ABDE$ je jednakokračan trapez.

Povucimo kroz vrh B pravac paralelan s $\overline{DE}$. Neka je T njegovo sjecište s $\overline{AE}$.



Četverokut $TEDB$ je paralelogram i vrijedi

$$|AE| - |AC| = |AE| - |BD| = |AE| - |TE| = |AT|.$$

Primijetimo da je trokut ABT jednakostraničan pa vrijedi:

$$|AE| - |AC| = |AT| = |AB| = a.$$

Zadatak A-1.5.

Dva igrača, A i B igraju sljedeću igru: A i B zapisuju naizmjenično po jednu znamenku sve dok ne napišu šesteroznamenkasti broj, pri čemu se niti jedna znamenka ne smije ponoviti. Prva znamenka mora biti različita od 0. Igrač A igra prvi, a znamenke se pišu redom s lijeva na desno. Igrač A pobjeđuje ako je napisani šesteroznamenkasti broj djeljiv s 2, 3 ili 5, a u suprotnom pobjeđuje igrač B. Dokaži da igrač A ima strategiju za pobjedu, tj. može pobijediti neovisno o igri igrača B.

Rješenje.

Neka su a_1, a_2, a_3 znamenke koje izabire A, a b_1, b_2, b_3 znamenke koje izabire B. Dobiveni broj je $x = \overline{a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3}$.

Neka je $M = \{0, 2, 4, 5, 6, 8\}$ i $N = \{1, 3, 7, 9\}$. Ako je $b_3 \in M$, broj x je djeljiv s 2 ili 5. Stoga B ne smije svoju zadnju znamenku odabrati iz skupa M.

Zato A bira svoje prve dvije znamenke iz N prisiljavajući time igrača B da svoje prve dvije znamenke bira iz M (u suprotnom bi A mogao potrošiti zadnju znamenku iz N prije zadnjeg poteza igrača B, pa bi bilo $b_3 \in M$ i A pobjeđuje).

Igrač A mora postići da broj x bude djeljiv s 3. Neka je $a_1 = 3$, $a_2 = 9$. Tada je $b_3 \equiv 1 \pmod 3$ jer iz skupa N preostaju znamenke 1 i 7.

Broj x bit će djeljiv s 3 ako je $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3$ djeljivo s 3. Ovisno o odabiru b_1 i b_2, imamo 3 mogućnosti:

(1) $b_1 + b_2 \equiv 0 \pmod 3$. Tada je $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 \equiv a_3 + 1 \pmod 3$.

Igrač A može odabrati za a_3 jednu od znamenaka 2, 5 ili 8 (barem jedna od njih je još neiskorištena).

(2) $b_1 + b_2 \equiv 1 \pmod 3$. Tada je $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 \equiv a_3 + 2 \pmod 3$.

Sada A može odabrati $a_3 = 1$.

(3) $b_1 + b_2 \equiv 2 \pmod 3$. Tada je $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 \equiv a_3 \pmod 3$.

U ovom slučaju A bira $a_3 = 0$ ili $a_3 = 6$. Barem jedan on njih je na raspolaganju, jer da je B odabrao oba, bilo bi $b_1 + b_2 \equiv 0 \pmod 3$.

U svakom slučaju suma znamenaka bit će djeljiva s 3, pa će i x biti djeljiv s 3, a igrač A pobjednik.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A kategorija

30. ožujka 2009.

Zadatak A-2.1.

Neka su a i b cijeli brojevi takvi da je $a^2 + 2b$ kvadrat cijelog broja. Dokaži da se broj $a^2 + b$ može prikazati kao zbroj kvadrata dvaju cijelih brojeva.

Rješenje.

Prema uvjetu zadatka je

$$a^2 + 2b = m^2, \tag{1}$$

za neki $m \in \mathbb{Z}$. Odatle je $b = \dfrac{m^2 - a^2}{2}$ pa imamo

$$a^2 + b = a^2 + \frac{m^2 - a^2}{2} = \frac{m^2 + a^2}{2}.$$

No, vrijedi

$$\frac{m^2 + a^2}{2} = \frac{(m+a)^2 + (m-a)^2}{4} = \left(\frac{m+a}{2}\right)^2 + \left(\frac{m-a}{2}\right)^2.$$

Još treba provjeriti da su brojevi $\dfrac{m+a}{2}$ i $\dfrac{m-a}{2}$ cijeli.

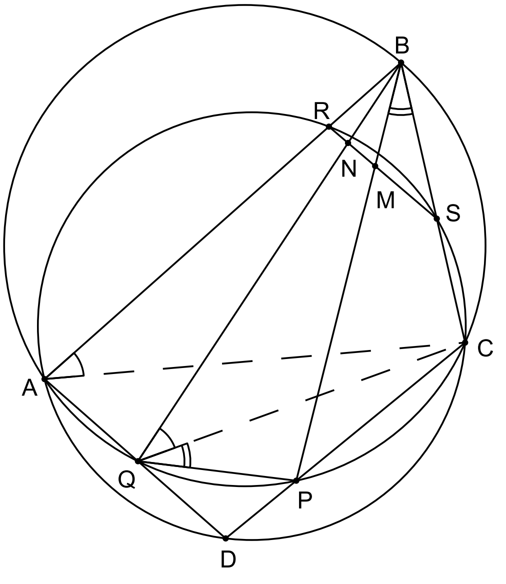
Zaista, iz relacije (1) slijedi da su brojevi m i a iste parnosti.

Zbog toga su $m + a$ i $m - a$ parni brojevi, pa su $\dfrac{m+a}{2}$ i $\dfrac{m-a}{2}$ cijeli brojevi.

Zadatak A-2.2.

Dan je četverokut $ABCD$. Opisana kružnica trokuta ABC siječe stranice $\overline{CD}$ i $\overline{DA}$ redom u točkama P i Q, a opisana kružnica trokuta CDA stranice $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ redom u točkama R i S. Pravci BP i BQ sijeku pravac RS redom u točkama M i N. Dokaži da točke M, N, P i Q leže na istoj kružnici.

Rješenje.



Vrijede jednakosti $\sphericalangle BQC = \sphericalangle BAC$ i $\sphericalangle CQP = \sphericalangle CBP$ (jednakost obodnih kuteva).

Četverokut $ACSR$ je tetivan pa je $\sphericalangle RSC + \sphericalangle RAC = 180°$, a odatle slijedi
$\sphericalangle BSR = 180° - \sphericalangle RSC = \sphericalangle RAC = \sphericalangle BAC = \sphericalangle BQC$.

Dalje imamo:

$$\begin{aligned}
180° - \sphericalangle PMN &= 180° - \sphericalangle BMS = \sphericalangle SBM + \sphericalangle BSM \\
&= \sphericalangle CBP + \sphericalangle BSR = \sphericalangle CQP + \sphericalangle BQC = \sphericalangle BQP \\
&= \sphericalangle NQP.
\end{aligned}$$

To znači da je četverokut $QPMN$ tetivan, odnosno da točke M, N, P i Q leže na istoj kružnici.

Zadatak A-2.3.

Nađi sve parove kompleksnih brojeva (w, z), $w \neq z$, koji zadovoljavaju sustav jednadžbi

$$w^5 + w = z^5 + z,$$

$$w^5 + w^2 = z^5 + z^2.$$

Rješenje.

Oduzimanjem zadanih jednadžbi dobivamo jednadžbu

$$w - w^2 = z - z^2$$

koja je ekvivalentna jednadžbi

$$(w - z)(w + z - 1) = 0.$$

Budući da je $w - z \neq 0$, slijedi

$$w + z = 1. \tag{1}$$

Kvadriranjem te jednakosti dobivamo

$$w^2 + z^2 = 1 - 2wz, \tag{2}$$

a ponovnim kvadriranjem

$$w^4 + z^4 = 1 - 4wz + 2(wz)^2. \tag{3}$$

Prva jednadžba danog sustava ekvivalentna je jednadžbi

$$\frac{w^5 - z^5}{w - z} = -1.$$

Ona se može zapisati u obliku

$$\frac{(w - z)(w^4 + w^3 z + w^2 z^2 + w z^3 + z^4)}{w - z} = -1,$$

$$w^4 + w^3 z + w^2 z^2 + w z^3 + z^4 + 1 = 0,$$

$$w^4 + z^4 + wz(w^2 + z^2 + wz) + 1 = 0.$$

Uvrštavanjem (2) i (3) i sređivanjem dobivamo jednadžbu

$$(wz)^2 - 3wz + 2 = 0,$$

rješavanjem koje slijedi da je $wz = 1$ ili $wz = 2$.

Uvrštavanjem $z = \frac{1}{w}$ i $z = \frac{2}{w}$ u (1) dobivamo kvadratne jednadžbe $w^2 - w + 1 = 0$ i $w^2 - w + 2 = 0$ odakle konačno dobivamo četiri rješenja

$$(w, z) = \left(\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \frac{1 \mp \sqrt{3}i}{2} \right) \quad \text{i} \quad (w, z) = \left(\frac{1 \pm \sqrt{7}i}{2}, \frac{1 \mp \sqrt{7}i}{2} \right).$$

Zadatak A-2.4.

Odredi najveću vrijednost realne konstante λ takve da za sve pozitivne realne brojeve u, v, w za koje je $u\sqrt{vw}+v\sqrt{wu}+w\sqrt{uv}\geq 1$ vrijedi nejednakost $u+v+w\geq\lambda$.

Rješenje.

Tvrdimo da je najveća moguća vrijednost konstante λ jednaka $\sqrt{3}$.

Naime, lako je vidjeti da za $u=v=w=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ vrijedi $u\sqrt{vw}+v\sqrt{wu}+w\sqrt{uv}=1$ i $u+v+w=\sqrt{3}$. Dakle, najveća vrijednost konstante λ je manja ili jednaka $\sqrt{3}$.

Pokazat ćemo da za $u,v,w>0$ za koje je $u\sqrt{vw}+v\sqrt{wu}+w\sqrt{uv}\geq 1$, vrijedi $u+v+w\geq\sqrt{3}$.

Prvi način. Iz danih uvjeta i nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine imamo

$$u\cdot\frac{v+w}{2}+v\cdot\frac{w+u}{2}+w\cdot\frac{u+v}{2}\geq u\sqrt{vw}+v\sqrt{wu}+w\sqrt{uv}\geq 1,$$

odnosno

$$uv+vw+wu\geq 1.$$

Kako vrijedi

$$(u-v)^2+(v-w)^2+(w-u)^2\geq 0,$$
$$u^2+v^2+w^2\geq uv+vw+wu\geq 1,$$

slijedi

$$(u+v+w)^2=u^2+v^2+w^2+2(uv+vw+wu)\geq 3,$$

odnosno $u+v+w\geq\sqrt{3}$. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $u=v=w=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Drugi način. Primjenom najprije aritmetičko-geometrijske, a zatim i Cauchyjeve nejednakosti imamo

$$\frac{(u+v+w)^4}{9}=\left(\frac{u+v+w}{3}\right)^3\cdot 3(u+v+w)\geq 3uvw(u+v+w)=$$

$$=(uvw+vwu+wuv)(u+v+w)\geq\left(u\sqrt{vw}+v\sqrt{wu}+w\sqrt{uv}\right)^2\geq 1.$$

Dakle, vrijedi $u+v+w\geq\sqrt{3}$. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $u=v=w=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Treći način. Stavimo $x=\sqrt{uv}$, $y=\sqrt{vw}$, $z=\sqrt{wu}$. Tada zbog zadanog uvjeta vrijedi

$$xy+yz+zx=v\sqrt{wu}+w\sqrt{uv}+u\sqrt{vw}\geq 1.$$

Primijetimo da je $u=\dfrac{zx}{y}$, $v=\dfrac{xy}{z}$, $w=\dfrac{yz}{x}$. Primjenom nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine imamo

$$2(u+v+w)=\left(\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\right)+\left(\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}\right)+\left(\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\right)\geq 2x+2y+2z,$$

odnosno $u+v+w \geq x+y+z$. Kao u prvom rješenju, dobivamo

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) \geq 3(xy+yz+zx) \geq 3,$$

te konačno

$$(u+v+w)^2 \geq (x+y+z)^2 \geq 3,$$

odnosno $u+v+w \geq \sqrt{3}$. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $u=v=w=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Zadatak A-2.5.

U svako polje tablice $m \times n$ $(m,\ n \in \mathbb{N})$ upisano je slovo A ili B. Pritom nikoja dva susjedna polja (sa zajedničkom stranicom) ne sadrže isto slovo. U jednom koraku biraju se dva susjedna polja, i oba slova na tim poljima zamijene se novim slovima po sljedećem pravilu:

- umjesto slova A upisuje se slovo B,
- umjesto slova B upisuje se slovo C,
- umjesto slova C upisuje se slovo A.

Za koje m i n nakon konačno mnogo koraka možemo postići da u svim poljima u kojima je na početku bilo napisano slovo A sada piše slovo B, a u svim poljima u kojima je na početku bilo napisano slovo B sada piše slovo A?

Rješenje.

Neka se u tablici $m \times n$ u konačno mnogo koraka mogu promijeniti slova u svim poljima na traženi način. Označimo broj polja u kojima se u početku nalazilo slovo A s a, a broj polja u kojima je u početku bilo upisano slovo B s b.

Kako se u i-tom polju u kojem je na početku bilo slovo A na kraju nalazi slovo B, na njemu je provedeno $3s_i+1$ opisanih operacija (za neko $s_i \in \mathbb{N}_0$). Slično, na i-tom polju u kojem je u početku bilo slovo B provedeno je $3t_i+2$ takvih operacija (za neko $t_i \in \mathbb{N}_0$).

Budući da se u svakom paru susjednih polja nalazi jedno polje na kojem je na početku pisalo A i jedno na kojem je pisalo B, vrijedi jednakost $\displaystyle\sum_{i=1}^{a}(3s_i+1) = \sum_{i=1}^{b}(3t_i+2)$.

Odatle je $a-2b = 3\displaystyle\sum_{i=1}^{b} t_i - 3\sum_{i=1}^{a} s_i$, pa vrijedi $3 \,\big|\, (a-2b)$, tj. $3 \,\big|\, (a+b)$ odnosno $3 \,\big|\, mn$, te zaključujemo da barem jedan od brojeva m i n mora biti djeljiv s 3.

S druge strane, ako je neki od m i n djeljiv s 3, tablica $m \times n$ se može podijeliti na dijelove 1×3 (ili 3×1). U njima se mogu provesti tražene operacije, npr. ovako:

$$\underline{A\,B}\,A \to B\,\underline{C\,A} \to B\,A\,B,$$

$$\underline{B\,A}\,B \to C\,\underline{B\,B} \to \underline{C\,C}\,C \to A\,\underline{A\,C} \to A\,B\,A.$$

Stoga se opisana zamjena slova može provesti i u tablici $m \times n$ koja je sastavljena od dijelova dimenzija 1×3.

Dakle, nužan i dovoljan uvjet da se ispuni zahtjev iz zadatka u tablici $m \times n$ jest da je barem jedan od brojeva m i n djeljiv s 3.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A kategorija

30. ožujka 2009.

Zadatak A-3.1.

Odredi sve prirodne brojeve m i n za koje je $6^m + 2^n + 2$ potpun kvadrat.

Rješenje.

Broj $6^m + 2^n + 2 = 2(3^m \cdot 2^{m-1} + 2^{n-1} + 1)$ je paran. Da bi bio potpun kvadrat, izraz u zagradi mora biti paran, odnosno točno jedan od brojeva 2^{m-1}, 2^{n-1} mora biti neparan. To znači da je jedan od brojeva m i n jednak 1, a drugi veći od 1.

Prvi slučaj. $m = 1$.
Tražimo prirodne brojeve n za koje je $6^1 + 2^n + 2 = 2^n + 8$ potpun kvadrat.
Kako je $2^n + 8 = 4(2^{n-2} + 2)$, zaključujemo da i $2^{n-2} + 2$ mora biti potpun kvadrat.
Ako je $n \geq 4$, onda je $2^{n-2} + 2$ paran broj koji nije djeljiv s 4, pa nije potpun kvadrat.
Preostaje ispitati slučajeve $n = 2, 3$. Samo za $n = 3$ taj je broj potpun kvadrat.

Drugi slučaj. $n = 1$.
Kako broj $6^m + 2^1 + 2 \equiv (-1)^m + 4 \pmod{7}$ daje ostatak 3 ili 5 pri dijeljenju sa 7, on ne može biti potpun kvadrat, jer potpun kvadrat pri dijeljenju sa 7 daje ostatak 0, 1, 2 ili 4.

Dakle, jedino rješenje je $(m, n) = (1, 3)$.

Drugi način. Drugi slučaj može se riješiti i promatrajući ostatke modulo 4:

Pretpostavimo da postoji $x \in \mathbb{N}$ takav da je $6^m + 4 = x^2$. Tada je $6^m = (x - 2)(x + 2)$. Brojevi $x - 2$ i $x + 2$ se razlikuju za 4, pa daju isti ostatak pri dijeljenju s 4. Njihov umnožak je $2^m \cdot 3^m$. Njihova najveća zajednička mjera $M(x - 2, x + 2) = M(x - 2, 4)$ može biti samo 1, 2 ili 4.

Ako je mjera jednaka 1, dobivamo $x - 2 = 2^m$, $x + 2 = 3^m$. Ovo je nemoguće jer je 2^m paran, a 3^m neparan broj.

Ako je mjera jednaka 2, oba broja moraju dati ostatak 2 pri dijeljenju s 4. To znači da je $m = 2$, no tada $x^2 = 6^2 + 4 = 40$ nije potpun kvadrat.

Ako je mjera jednaka 4, dobivamo $x-2 = 2^{m-2}$, $x+2 = 4 \cdot 3^m$. No, očito je $2^{m-2} + 4 < 3^m$, pa ni u ovom slučaju nema rješenja.

Zadatak A-3.2.

Neka je ABC trokut u kojem vrijedi $|AC| > |BC|$. Izrazi površinu trokuta određenog stranicom $\overline{AB}$, simetralom stranice $\overline{AB}$ i simetralom kuta $\sphericalangle ACB$ pomoću duljina stranica trokuta ABC.

Rješenje.

Označimo duljine stranica i mjere kuteva trokuta ABC standardno a, b, c, α, β, γ.

Neka je točka P polovište stranice $\overline{AB}$, točka D sjecište navedenih simetrala, a točka E sjecište simetrale $\sphericalangle ACB$ i stranice $\overline{AB}$. Potrebno je pomoću a, b i c izraziti površinu trokuta DEP. Budući da je DEP pravokutan trokut s katetama $\overline{PD}$ i $\overline{PE}$ vrijedi

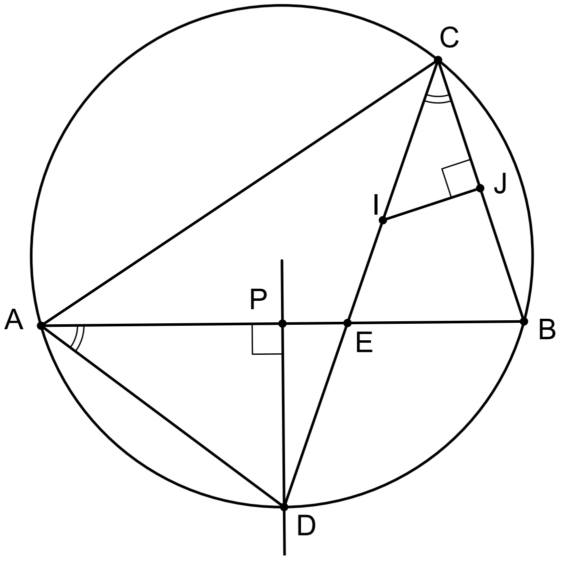
$$P(DEP) = \frac{|PD| \cdot |PE|}{2}. \tag{1}$$

Prema poučku o simetrali kuta vrijedi $\dfrac{a}{b} = \dfrac{|BE|}{|AE|}$, pa zbog $|AE| + |BE| = c$

dobivamo $|BE| = \dfrac{ca}{a+b}$.

Kako je P polovište stranice $\overline{AB}$ slijedi

$$|PE| = |PB| - |EB| = \frac{c}{2} - \frac{ca}{a+b} = \frac{c(b-a)}{2(a+b)}. \tag{2}$$



Primijetimo da i simetrala kuta $\sphericalangle ACB$ i simetrala stranice $\overline{AB}$ raspolavljaju luk $\widehat{AB}$ opisane kružnice trokutu ABC iz čega zaključujemo da je upravo točka D polovište tog luka, to jest D leži na kružnici opisanoj trokutu ABC. Prema poučku o obodnom kutu primijenjenom na kuteve nad tetivom $\overline{DB}$ slijedi

$$\sphericalangle DAP = \sphericalangle DAB = \sphericalangle DCB = \frac{\gamma}{2}.$$

Sada iz pravokutnog trokuta PAD zaključujemo da je

$$|PD| = |AP| \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{c}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}. \tag{3}$$

Preostaje izraziti $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ pomoću a, b, c.

Neka je $s = \frac{a+b+c}{2}$ poluopseg, I središte upisane kružnice trokutu ABC te J projekcija točke I na stranicu $\overline{BC}$. Tada je $|CJ| = \frac{a+b-c}{2} = s-c$, pa iz trokuta CIJ zaključujemo da je $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{s-c}$.

Izjednačavanjem izraza za površinu trokuta

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = P(ABC) = r \cdot s$$

slijedi

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}},$$

pa je

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{s-c} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}. \tag{4}$$

Alternativno,

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\gamma}{1+\cos\gamma}} = \sqrt{\frac{1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}} = \sqrt{\frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2ab+a^2+b^2-c^2}} = \sqrt{\frac{c^2-(a-b)^2}{(a+b)^2-c^2}}\,.$$

Sada iz (1), (2), (3) i (4) slijedi

$$\begin{aligned}
P(DEP) &= \frac{1}{2} \cdot |PE| \cdot |PD| \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{c(b-a)}{2(a+b)} \cdot \frac{c}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{c(b-a)}{2(a+b)} \cdot \frac{c}{2} \cdot \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} \\
&= \frac{c^2(b-a)}{8(a+b)} \sqrt{\frac{(b+c-a)(a+c-b)}{(a+b+c)(a+b-c)}}\,.
\end{aligned}$$

Zadatak A-3.3.

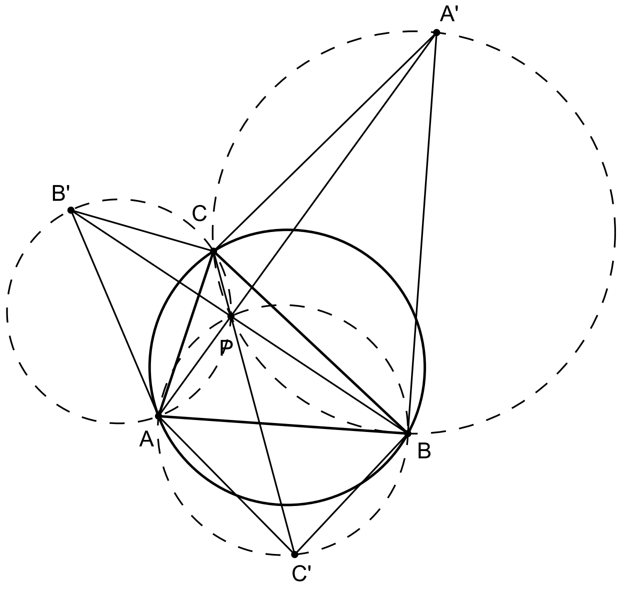
Neka je ABC trokut sa stranicama duljina a, b i c i neka je P točka u njegovoj unutrašnjosti. Neka pravac AP ponovno siječe kružnicu opisanu trokutu BCP u točki A' i neka su B' i C' točke definirane analogno. Dokaži da za opseg O šesterokuta $AB'CA'BC'$ vrijedi

$$O \geq 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}).$$

Rješenje.

Prvi način. Vrijedi

$$\sphericalangle BCA' = \sphericalangle BC'A = \sphericalangle ACB' ,$$
$$\sphericalangle CAB' = \sphericalangle CA'B = \sphericalangle BAC' ,$$
$$\sphericalangle ABC' = \sphericalangle AB'C = \sphericalangle CBA' .$$



Na primjer:

$$\begin{aligned} \sphericalangle BCA' &= \sphericalangle BPA' && \text{(obodni kutevi nad lukom } BA'\text{)} \\ &= 180^\circ - \sphericalangle APB && (A,\ P,\ A' \text{ su kolinearne}) \\ &= \sphericalangle AC'B && \text{(četverokut } APBC' \text{ je tetivni)} \end{aligned}$$

Stoga su trokuti $A'BC$, $AB'C$ i ABC' slični, pa vrijedi

$$|BC| : |CA'| : |A'B| = |B'C| : |CA| : |AB'| = |BC'| : |C'A| : |AB|.$$

Zato vrijedi $\sqrt{ab} = \sqrt{|BC| \cdot |AC|} = \sqrt{|B'C| \cdot |CA'|} \leq \dfrac{1}{2}(|B'C| + |CA'|)$,

odnosno $2\sqrt{ab} \leq |B'C| + |CA'|$

i analogno $2\sqrt{bc} \leq |C'A| + |AB'|$, $2\sqrt{ca} \leq |A'B| + |BC'|$.

Zbrajanjem tih nejednakosti dobivamo

$$2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right) \leq |AC'|+|C'B|+|BA'|+|A'C|+|CB'|+|B'A|,$$

što je i trebalo dokazati.

Drugi način. Neka je $x = \sphericalangle BPC$, $y = \sphericalangle CPA$ i $z = \sphericalangle APB$.

Slično kao u prvom rješenju pokaže se da kutevi u trokutu $A'CB$ iznose $\pi - x$, $\pi - z$, $\pi - y$ pa prema poučku o sinusima vrijedi

$$|A'B| = \frac{a \sin z}{\sin x}, \quad |A'C| = \frac{a \sin y}{\sin x}.$$

Prema tome je opseg trokuta $A'CB$ jednak

$$\frac{a(\sin x + \sin y + \sin z)}{\sin x}.$$

Potpuno analogno možemo odrediti opsege trokuta $B'AC$ i $C'BA$.

Zbrajanjem dobivamo

$$O + a + b + c = (\sin x + \sin y + \sin z)\left(\frac{a}{\sin x} + \frac{b}{\sin y} + \frac{c}{\sin z}\right).$$

Primjenom Cauchyjeve nejednakosti dobivamo

$$(\sin x + \sin y + \sin z)\left(\frac{a}{\sin x} + \frac{b}{\sin y} + \frac{c}{\sin z}\right) \geq \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2,$$

pa slijedi

$$O \geq \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2 - (a+b+c) = 2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right).$$

Zadatak A-3.4.

Neka je $n \in \mathbb{N}$ te $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitivni realni brojevi za koje vrijedi

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \ldots + \frac{1}{a_n^2}.$$

Dokaži da za svaki $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ postoji m brojeva iz skupa $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ čiji je zbroj barem m.

Rješenje.

Dokažimo najprije da vrijedi tvrdnja za $m = n$, tj. da je

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n. \tag{1}$$

Pretpostavimo suprotno, da je $a_1 + a_2 + \ldots + a_n < n$.

Neka je G geometrijska sredina brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Zbog aritmetičko-geometrijske nejednakosti i zbog pretpostavke vrijedi

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} < \frac{n}{n} = 1,$$

Dakle $G < 1$. Također, iz aritmetičko-geometrijske nejednakosti slijedi

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \ldots + \frac{1}{a_n^2}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1^2} \cdot \frac{1}{a_2^2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a_n^2}} = \frac{1}{\sqrt[n]{(a_1 a_2 \cdots a_n)^2}}$$

pa je $\dfrac{1}{G^2} \leq \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} < \dfrac{n}{n} = 1$, odnosno $G > 1$. Zbog dobivene kontradikcije zaključujemo da je naša pretpostavka pogrešna. Time je dokazana tvrdnja (1).

Dokažimo sada da za svaki $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ postoji m brojeva iz skupa $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ čiji je zbroj barem m.

Pretpostavimo suprotno, da je za neki m zbroj bilo kojih m brojeva iz skupa $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ manji od m. Posebno

$$\begin{gathered}
a_1 + a_2 + \ldots + a_m < m, \\
a_2 + a_3 + \ldots + a_{m+1} < m, \\
\vdots \\
a_n + a_1 + \ldots + a_{m-1} < m,
\end{gathered}$$

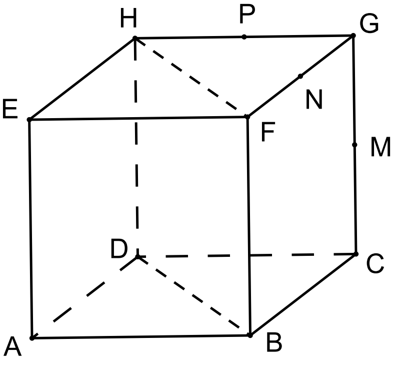
pa zbrajanjem dobivamo $m(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) < nm$, odnosno $a_1 + a_2 + \ldots + a_n < n$. No, to je u kontradikciji s dokazanom tvrdnjom (1).

Zadatak A-3.5.

U jednom vrhu kocke nalaze se dva pauka, a u suprotnom vrhu muha. Pauci i muha kreću se isključivo po bridovima kocke jednakim konstantnim brzinama. U svakom trenutku paucima je poznata pozicija muhe i muhi je poznata pozicija pauka. Dokaži da pauci mogu uhvatiti muhu. Smatra se da je muha uhvaćena ako se nađe u istoj točki kao i jedan od paukova.

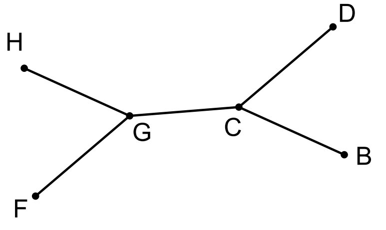
Rješenje.

Označimo vrhove kocke s A, B, C, D, E, F, G, H i neka se pauci nalaze u vrhu A, a muha u vrhu G.



Strategija za pauke je sljedeća: prvi pauk kreće se simetrično muhi u odnosu na središte kocke sve dok ona (eventualno) ne stigne do polovišta nekog od bridova $\overline{GC}$, $\overline{GF}$, $\overline{GH}$. Označimo ta polovišta M, N, P redom.

Ukoliko muha stigne u neku od tih točaka, npr. u točku M, prvi pauk nastavlja kretanje simetrično muhi u odnosu na ravninu $BDHF$ (odnosno $BCHE$ ili $CDEF$ ako je muha stigla u N ili P). Taj će pauk uhvatiti muhu ako ona stigne u neku od točaka B, D, F, H. Ukoliko muha ostane na konturi:



uhvatit će ju drugi pauk. On najprije kreće prema vrhu G. Ako ju nije uhvatio putem, postoje dvije mogućnosti.

1. slučaj. Muha još nije prešla ni jednu od točaka M, N, P.
Tada je muha na jednom od bridova $\overline{GC}$, $\overline{GF}$, $\overline{GH}$, recimo na $\overline{GC}$. Drugi pauk kreće iz vrha G prema njoj. Kada muha pređe točku M prvi pauk joj ograničava kretanje na konturu sa slike, pa ju drugi pauk slijedi prema jednoj od točaka B ili D.

2. slučaj. Muha je već prešla neku od točaka M, N, P.
Recimo da je muha prešla točku M. Tada je prvi pauk ograničio njeno kretanje na konturu na slici pa ju drugi pauk samo slijedi.

Muha će u oba slučaja biti uhvaćena.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A kategorija

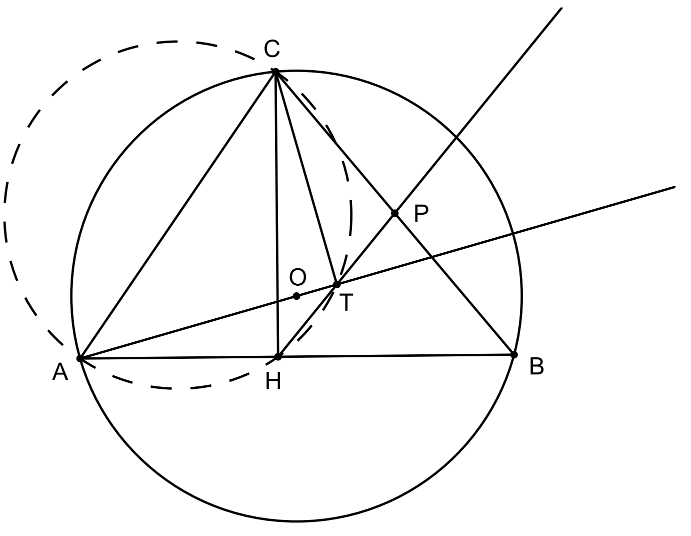
30. ožujka 2009.

Zadatak A-4.1.

Neka je $\overline{CH}$ visina šiljastokutnog trokuta ABC, a točka O središte njemu opisane kružnice. Ako je T nožište okomice iz točke C na pravac AO, dokaži da pravac TH prolazi polovištem dužine $\overline{BC}$.

Rješenje.

Označimo s P sjecište pravca TH i dužine $\overline{BC}$. Dokazat ćemo da je P polovište stranice$\overline{BC}$.



Kako je $\sphericalangle AHC = \sphericalangle ATC = 90°$, točke A, H, T i C leže na istoj kružnici, pa je

$$\begin{aligned}
\sphericalangle PHC = \sphericalangle THC &= \sphericalangle TAC && \text{(obodni kutovi nad istim lukom)}\\
&= \sphericalangle OAC = \frac{1}{2}(180° - \sphericalangle AOC) && \text{(trokut } AOC \text{ je jednakokračan)}\\
&= 90° - \sphericalangle ABC && \text{(središnji i obodni kut)}\\
&= 90° - \sphericalangle HBC = \sphericalangle BCH = \sphericalangle PCH.
\end{aligned}$$

Dakle, trokut PCH je jednakokračan. Dalje je

$$\sphericalangle PBH = 90° - \sphericalangle BCH = 90° - \sphericalangle PHC = \sphericalangle PHB,$$

pa je i trokut PHB jednakokračan. Zaključujemo da vrijedi $|PC| = |PH| = |PB|$ i time je tvrdnja zadatka dokazana.

Zadatak A-4.2.

Dani su realni brojevi $x_0 > x_1 > x_2 > \cdots > x_n$. Dokaži da je

$$x_0 - x_n + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geq 2n.$$

Kada vrijedi jednakost?

Rješenje.

Prvi način. Označimo $a_1 = x_0 - x_1$, $a_2 = x_1 - x_2$, ..., $a_n = x_{n-1} - x_n$. Tada su $a_1, \ldots, a_n$ pozitivni realni brojevi.

Nejednakost koju trebamo dokazati možemo zapisati kao

$$x_0 - x_1 + x_1 - \ldots - x_{n-1} + x_{n-1} - x_n + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geq 2n,$$

odnosno $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(a_i + \frac{1}{a_i} \right) \geq 2n.$

No ovo direktno slijedi iz nejednakosti $x + x^{-1} \geq 2$ $(x \geq 0)$.

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a_i = \dfrac{1}{a_i}$ za sve $i = 1, \ldots, n$, što je zbog $a_i > 0$ ekvivalento s $a_i = 1$. Dakle, jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$x_0 - x_1 = x_1 - x_2 = \cdots = x_{n-1} - x_n = 1,$$

tj. ako je $x_0, x_1, \ldots, x_n$ aritmetički niz s razlikom -1.

Drugi način. Označimo $a_1 = x_0 - x_1$, $a_2 = x_1 - x_2$,..., $a_n = x_{n-1} - x_n$.

Nejednakost između aritmetičke i harmonijske sredine povlači da je

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \geq \frac{n^2}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}.$$

Zato je

$$\frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geq \frac{n^2}{x_0 - x_1 + x_1 - x_2 + \cdots + x_{n-1} - x_n} = \frac{n^2}{x_0 - x_n}.$$

Traženu nejednakost dobivamo sada iz $x_0 - x_n + \dfrac{n^2}{x_0 - x_n} \geq 2n$, što je ekvivalentno s

$$\left(\sqrt{x_0 - x_n} - \frac{n}{\sqrt{x_0 - x_n}} \right)^2 \geq 0. \tag{1}$$

Jednakost se u A-H nejednakosti postiže ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ tj. $x_0 - x_1 = x_1 - x_2 = \cdots = x_{n-1} - x_n$.

U drugoj korištenoj nejednakosti (1) jednakost se postiže ako i samo ako je $x_0 - x_n = n$.

To znači da nejednakost iz zadatka postaje jednakost ako i samo ako je $x_0, x_1, \ldots, x_n$ aritmetički niz s razlikom -1.

Zadatak A-4.3.

Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je

$$f(x) = \max_{y \in \mathbb{R}} \big(2xy - f(y)\big)$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Rješenje.

Neka funkcija f zadovoljava uvjet zadatka. Tada je $f(x) \geq 2xy - f(y)$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$, pa za $y = x$ dobivamo da je $f(x) \geq x^2$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Nadalje iz uvjeta slijedi da za svaki x postoji $y = y_x$ takav da je $f(x) = 2xy_x - f(y_x)$. Iz ovog i iz posljednje nejednakosti dobivamo

$$x^2 \leq f(x) = 2xy_x - f(y_x) \leq 2xy_x - y_x^2,$$

pa je $(x - y_x)^2 \leq 0$, tj. $y_x = x$.

Sada iz $f(x) = 2xy_x - f(y_x)$ slijedi $f(x) = x^2$.

Ova funkcija je rješenje zadatka jer za nju vrijedi

$$\max_{y \in \mathbb{R}} \big(2xy - f(y)\big) = \max_{y \in \mathbb{R}} \big(2xy - y^2\big) = \max_{y \in \mathbb{R}} \big(x^2 - (x-y)^2\big) = x^2 = f(x).$$

Zadatak A-4.4.

Odredi sve parove prirodnih brojeva (m, n), $m, n > 1$, za koje je $n^3 - 1$ djeljivo s $mn - 1$.

Rješenje.

Neka su $m, n > 1$ takvi da je $mn - 1 \mid n^3 - 1$.

Vrijedi $(n^3 - 1)m - n^2(mn - 1) = n^2 - m$, pa $mn - 1 \mid n^2 - m$.

Također $m(n^2 - m) - (mn - 1)n = n - m^2$, pa $mn - 1 \mid n - m^2$.

Ako je $n > m^2$, tada $mn - 1 \leq n - m^2 \leq n - 1$, pa slijedi $mn \leq n$, što je nemoguće.

Ako je $n = m^2$, tada je očito $m^3 - 1 \mid m^6 - 1$, pa su svi parovi (m, m^2), $m > 1$ rješenja.

Ako je $n < m^2$, iz $mn - 1 \leq n^3 - 1$ zaključujemo $\sqrt{n} < m \leq n^2$.

Ako je $n^2 - m > 0$, vrijedi $mn - 1 \leq n^2 - m < n^2 - 1$, odnosno $m < n$, što je nemoguće, jer iz $mn - 1 \leq m^2 - n < m^2 - 1$, slijedi $n < m$.

Dakle, mora biti $m = n^2$. Budući da $n^3 - 1 \mid n^3 - 1$, svi parovi (n^2, n), $n > 1$ su također rješenja.

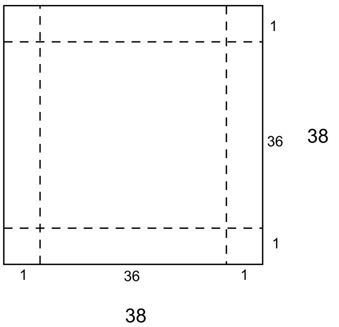
Uvjet zadovoljavaju svi parovi oblika (k, k^2) i (k^2, k), gdje je $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$.

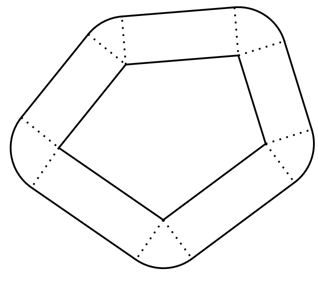
Zadatak A-4.5.

Unutar kvadrata stranice duljine 38 smješteno je 100 konveksnih mnogokuta, pri čemu je površina svakog od njih najviše π, a opseg najviše 2π. Dokaži da unutar tog kvadrata postoji krug polumjera 1 koji ne siječe niti jedan od danih 100 mnogokuta.

Rješenje.

Središte traženog kruga mora biti udaljeno za barem 1 od rubova kvadrata. Naći ćemo to središte u kvadratu kojemu su stranice paralelne sa stranicama početnog kvadrata i udaljene od njih za 1. Duljina stranice tog manjeg kvadrata je 36.





Skup svih točaka koje leže na udaljenosti manjoj od 1 od konveksnog mnogokuta P je područje Q omeđeno dužinama paralelnim stranicama poligona P i kružnim lukovima koji spajaju krajeve tih dužina (vidi sliku).

Za površine likova P i Q vrijedi

$$\text{Površina}(Q) = \text{Površina}(P) + \text{Opseg}(P) \times 1 + \pi$$

jer kružni isječci u kutovima lika Q čine zajedno puni krug polumjera 1.

Zbog uvjeta zadatka Površina$(P) < \pi$ i Opseg$(P) < 2\pi$, pa je Površina$(Q) < 4\pi$.

Likovi Q mogu se preklapati, no površina njihove unije, tj. skupa svih točaka koje su udaljene za najviše 1 od nekog od 100 danih mnogokuta iznosi najviše 400π.

Kako je $400\pi \leq 400 \cdot 3.2 = 40 \cdot 32 = 36^2 - 4^2 < 36^2$, postoji točka unutar kvadrata stranice 36 koja nije prekrivena ni jednim likom Q, pa tu točku možemo uzeti za središte traženog kruga polumjera 1. Taj krug ne siječe niti jedan od danih mnogokuta.