

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B kategorija

Pula, 30. ožujka 2009.

1. "Tomislav i ja", reče Krešimir, "možemo završiti posao za 20 dana". No, ako bih (20) radio s Ivanom posao bismo obavili za 5 dana ranije."

"Imam bolju kombinaciju!" reče Ivan. Ako bih radio s Tomislavom završio bih posao za petinu vremena prije nego da radim s Krešimirom."

Za koliko bi dana svaki od njih završio posao sam, a za koliko bi ga dana završili radeći svi zajedno?

2. Riješi nejednadžbu (20)

$$||9 - x| - x| + 2x| \leq 2009.$$

3. Duljina osnovice jednakokravnog trokuta ABC je 12 cm, a duljina kraka je 10 cm. (20) Točke P i Q su polovišta krakova \overline{AC} i \overline{BC} , a S i R su njihove ortogonalne projekcije na \overline{AB} . Odredi udaljenost nožišta okomica iz točaka P i R na spojnicu \overline{SQ} .

4. Ako je $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$ i $ac + bd = 0$, koliko je $ab + cd$? (20)

5. Ako realni brojevi x , y zadovoljavaju uvjet $2x + 4y = 1$ dokaži nejednakost $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{20}$. (20)

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B kategorija

Pula, 30. ožujka 2009.

1. Za kompleksne brojeve z, w takve da je $|z| = |w| = |z - w|$ izračunaj $\left(\frac{z}{w}\right)^{99}$.
(20)

2. Dani su realni brojevi $0 < a < b$. Odredi sva rješenja nejednadžbe
(20)

$$\frac{a}{x-b} + \frac{b}{x-a} \leq 2.$$

3. U pravokutnom trokutu ABC točka D je nožište visine spuštene iz vrha C na
(20) hipotenuzu \overline{AB} , točka E je polovište dužine \overline{CD} , a točka F je sjecište pravaca AE i BC . Ako je $|AD| = 4$ i $|BD| = 9$, odredi duljinu dužine \overline{AF} .

4. Točke A, B i C leže na istom pravcu i B je između A i C . S iste strane pravca AC
(20) konstruirane su tri polukružnice promjera $|AB| = 2R, |BC| = 2r$ i $|AC|$. Odredi polumjer kružnice koja dodiruje sve tri polukružnice.

5. Nađi sva rješenja jednadžbe $[x]\{x\} = 2009x$, gdje je $[x]$ najveći cijeli broj koji nije
(20) veći od x , a $\{x\} = x - [x]$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B kategorija

Pula, 30. ožujka 2009.

1. Nađi sva realna rješenja jednadžbe
(20)

$$4x^3 - \sqrt{1 - x^2} - 3x = 0.$$

2. Za realan broj $a > 0$, $a \neq 1$ dana je funkcija
(20)

$$f(x) = \log_a x + \log_{a^2} x.$$

U zavisnosti o parametru a nađi sva rješenja jednadžbe

$$f(x + a^2 - a) = 2f(x).$$

3. Izračunaj zbroj
(20)

$$\frac{\sin 1}{\cos 0 \cdot \cos 1} + \frac{\sin 1}{\cos 1 \cdot \cos 2} + \frac{\sin 1}{\cos 2 \cdot \cos 3} + \dots + \frac{\sin 1}{\cos 2008 \cdot \cos 2009}.$$

4. Međusobna udaljenost središta sfera polumjera R i r ($r < R$) jednaka je a ($R - r <$
(20) $a \leq R + r$).

- a) Izrazi obujam V pravilnog kružnog stošca, opisanog oko ovih sfera, u zavisnosti o parametrima a , R i r .
b) Izračunaj volumen stošca ako je $R = 10$, $r = 6$ i $a = 8$.

5. Dvije jednake šahovske ploče (8×8 polja) imaju zajedničko središte i jedna potpuno
(20) prekriva drugu. Jedna od njih se zarotira oko središta za 45° . Odredi površinu presjeka svih crnih polja jedne ploče sa svim crnim poljima druge ploče ako je površina jednog polja jednaka 1.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B kategorija

Pula, 30. ožujka 2009.

1. U rastućem aritmetičkom nizu umnožak drugog i trećeg člana je 3, a umnožak trećeg
(20) i petog je -3 . Koliko prvih članova niza treba zbrojiti da bi zbroj bio minimalan?
Koliki je taj zbroj?

2. U Kartezijevom koordinatnom sustavu zadane su točke $A\left(-\frac{17}{2}, 0\right)$, $B(2, 0)$, $C(-1, 0)$.
(20) Nađi sve točke pravca $y = x - 3$ iz koje se dužine \overline{AC} i \overline{BC} vide pod istim kutom
različitim od nule.

3. Koliki su minimum i maksimum funkcije
(20)

$$y = \frac{\sin^2 x - \sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}?$$

Za koje $x \in [0, 2\pi]$ funkcija poprima minimalnu, a za koje maksimalnu vrijednost?

4. Nađi formulu za zbroj
(20)

$$S_n = \frac{3}{1! + 2! + 3!} + \frac{4}{2! + 3! + 4!} + \frac{5}{3! + 4! + 5!} + \dots + \frac{n+2}{n! + (n+1)! + (n+2)!}.$$

Pokaži da niz zbrojeva konvergira i odredi mu limes!

5. Kocka $ABCD A' B' C' D'$ presječena je ravninom koja sadrži prostornu dijagonalu
(20) kocke $\overline{BD'}$ i ima najmanju moguću površinu presjeka s kockom. Koliki je kosinus
kuta između te ravnine i ravnine $ABCD$?