DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B kategorija

Pula, 30. ožujka 2009.

Zadatak B-1.1. (20 bodova) "Tomislav i ja", reče Krešimir, "možemo završiti posao za 20 dana". No, ako bih radio s Ivanom posao bismo obavili za 5 dana ranije."

"Imam bolju kombinaciju!" reče Ivan. Ako bih radio s Tomislavom završio bih posao za petinu vremena prije nego da radim s Krešimirom."

Za koliko bi dana svaki od njih završio posao sam, a za koliko bi ga dana završili radeći svi zajedno?

Rješenje. Označimo s x, y, z, tim redom, broj dana za koje bi posao obavili Tomislav, Krešimir, Ivan. Ako ukupni posao označimo s 1 onda je $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$ dio posla koji bi obavili, tim redom, Tomislav, Krešimir, Ivan, za jedan dan. Prema uvjetu zadatka imamo sljedeće jednažbe:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{20}, \\[2ex] \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{15}, \\[2ex] \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{12}. \end{cases}$$

Treba riješiti ovaj sistem linearnih jednadžbi.

Zbrajanjem ovih triju jednadžbi, nakon sređivanja, dobivamo

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{10}.$$

Radeći zajedno u jednom danu bi obavili $\frac{1}{10}$ ukupnog posla, tj. cjelokupan posao bi obavili za 10 dana.

Sada imamo:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{10}-\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{10}-\frac{1}{15}=\frac{1}{30} \quad \text{tj.} \quad x=30.$$

Slično se dobiva $y=60$, $z=20$. Dakle, Tomislav bi obavio cjelokupan posao za 30, Krešimir za 60, a Ivan za 20 dana.

Zadatak B-1.2. (20 bodova) Riješi nejednadžbu

$$|||9-x|-x|+2x| \leq 2009.$$

Rješenje. Da bismo riješili ovu nejednadžbu moramo riješiti sljedeće dvije jednostavnije nejednadžbe:

$$\begin{gathered} -2009 \leq ||9-x|-x|+2x \leq 2009, \quad \text{tj.} \\ -2009-2x \leq ||9-x|-x| \leq 2009-2x. \end{gathered}$$

Moramo promatrati dva slučaja:

$1^\circ \quad 9-x \leq 0 \quad$ tj. $\quad x \geq 9$,

$2^\circ \quad 9-x > 0 \quad$ tj. $\quad x < 9$.

1° U ovom slučaju imamo:

$$\begin{gathered} -2009-2x \leq |x-9-x| \leq 2009-2x, \\ -2018 \leq 2x \leq 2000, \\ -1009 \leq x \leq 1000, \end{gathered}$$

odakle imamo $x \in [9, 1000]$

2° Sada je

$$-2009-2x \leq |9-2x| \leq 2009-2x,$$

pa imamo ova dva slučaja:

$2^\circ a \quad 9-2x \leq 0$ tj. $x \geq \frac{9}{2} \quad$ tj. $\quad x \in \left[\frac{9}{2}, 9\right\rangle$,

$2^\circ b \quad 9-2x > 0 \quad$ tj. $\quad x < \frac{9}{2}$.

$2^\circ a$

$$\begin{gathered} -2009-2x \leq 2x-9 \leq 2009-2x, \\ -2000 \leq 4x \leq 2018, \\ -500 \leq x \leq \frac{1009}{2}, \end{gathered}$$

odakle je $x \in \left[\frac{9}{2}, 9\right\rangle$.

$2^\circ b$

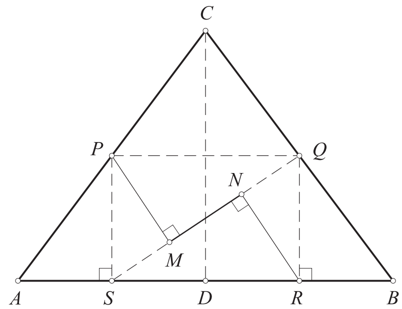
$$-2009-2x < 9-2x < 2009-2x \quad \text{tj.} \quad -2018 < 2000.$$

Kako je ova nejednakost uvijek zadovoljena dobivamo $x \in \left\langle -\infty, \frac{9}{2}\right\rangle$.

Konačno rješenje je $x \in \langle -\infty, 1000]$.

Zadatak B-1.3. (20 bodova) Duljina osnovice jednakokračnog trokuta ABC je 12 cm, a duljina kraka je 10 cm. Točke P i Q su polovišta krakova $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$, a S i R su njihove ortogonalne projekcije na $\overline{AB}$. Odredi udaljenost nožišta okomica iz točaka P i R na spojnicu $\overline{SQ}$.

Rješenje. Dužina $\overline{PQ}$ je srednjica trokuta ABC pa je $|PQ| = \dfrac{1}{2}|AB| = 6$ cm.



Točka D je polovište stranice $\overline{AB}$. Primjenom Pitagorinog poučka imamo

$$|CD| = \sqrt{|BC|^2 - |BD|^2} = \sqrt{100 - 36} = 8 \text{ cm}.$$

Točka Q je polovište kraka $\overline{BC}$ pa je $|BQ| = |CQ| = 5$ cm.

Iz sličnosti trokuta BDC i BRQ imamo $\dfrac{|CD|}{|QR|} = \dfrac{|BD|}{|BR|} = \dfrac{2}{1}$ odakle je $|QR| = \dfrac{|CD|}{2} = 4$ cm. Četverokut $SRQP$ je pravokutnik i $|SR| = |PQ| = 6$ cm. Duljina njegove dijagonale je

$$|SQ| = \sqrt{|SR|^2 + |QR|^2} = \sqrt{36 + 16} = 2\sqrt{13}.$$

Iz $P_{SRQ} = \dfrac{1}{2} P_{SRQP}$ imamo $|RN| = |PM| = \dfrac{P_{SRQP}}{|SQ|} = \dfrac{|SR| \cdot |QR|}{|SQ|} = \dfrac{12}{\sqrt{13}} = \dfrac{12\sqrt{13}}{13}$.

Nadalje, po Pitagorinom poučku je $|NQ| = \sqrt{|QR|^2 - |RN|^2} = \sqrt{16 - \dfrac{144}{13}} = \dfrac{8\sqrt{13}}{13}$.

Radi simetrije je $|SM| = |NQ|$ pa imamo $|MN| = |SQ| - 2|NQ| = \dfrac{10\sqrt{13}}{13}$.

Tražena udaljenost nožišta je $|MN| = \dfrac{10\sqrt{13}}{13}$ cm.

Zadatak B-1.4. (20 bodova) Ako je $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$ i $ac + bd = 0$, koliko je $ab + cd$?

Prvo rješenje. Kako je $a^2 + b^2 = 1$ ne mogu istovremeno a i b biti jednaki 0. Neka je $a \neq 0$.

Iz treće jednakosti imamo $c = -\dfrac{bd}{a}$. Tada je

$$1 = c^2 + d^2 = \frac{b^2 d^2}{a^2} + d^2 = \frac{d^2(a^2 + b^2)}{a^2} = \frac{d^2}{a^2}$$

odakle imamo $a^2 = d^2$. Sada je

$$ab + cd = ab - \frac{bd^2}{a} = \frac{b}{a}(a^2 - d^2) = 0.$$

Drugo rješenje. Dobivamo

$$\begin{aligned} 0 &= (ac + bd)(ad + bc) \\ &= a^2cd + abc^2 + abd^2 + b^2cd \\ &= ab(c^2 + d^2) + cd(a^2 + b^2) \\ &= ab + cd. \end{aligned}$$

Zadatak B-1.5. (20 bodova) Ako realni brojevi x, y zadovoljavaju uvjet $2x + 4y = 1$ dokaži nejednakost $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{20}$.

Prvo rješenje. Iz dane jednakosti imamo $x = \frac{1 - 4y}{2}$. Tada je

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - \frac{1}{20} &= \left(\frac{1 - 4y}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{1}{20} \\ &= \frac{1 - 10y + 25y^2}{5} = \frac{1}{5}(1 - 5y)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

odakle se dobiva tražena nejednakost.

Drugo rješenje. Kao i u prvom rješenju imamo $x = \frac{1 - 4y}{2}$. Dalje redom imamo:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \left(\frac{1 - 4y}{2}\right)^2 + y^2 = 5y^2 - 2y + \frac{1}{4} \\ &= 5\left(y^2 - \frac{2}{5}y + \frac{1}{25}\right) + \frac{1}{20} = 5\left(y - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{20}. \end{aligned}$$

Odavde slijedi tražena nejednakost.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B kategorija

Pula, 30. ožujka 2009.

Zadatak B-2.1. (20 bodova) Za kompleksne brojeve z, w takve da je $|z| = |w| = |z - w|$ izračunaj $\left(\frac{z}{w}\right)^{99}$.

Prvo rješenje. Stavimo $u = \frac{z}{w} = x + yi$. Tada je $|u| = 1$, $|u - 1| = 1$.

Tada je $x^2 + y^2 = 1$, $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

Oduzimanjem ovih jednakosti dobivamo $x = \frac{1}{2}$, $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, pa je $u = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Sada je

$$\left(\frac{z}{w}\right)^{99} = u^{99} = \left[\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3\right]^{33} = \left(\frac{1}{8} \pm \frac{3\sqrt{3}}{8}i - \frac{9}{8} \mp \frac{3\sqrt{3}}{8}i\right)^{33} = (-1)^{33} = -1.$$

Drugo rješenje. Dijeljenjem dane jednakosti $|z| = |w| = |z - w|$ s $|w|$ dobivamo

$$\left|\frac{z}{w}\right| = 1 = \left|\frac{z}{w} - 1\right|.$$

Označimo li $u = \frac{z}{w}$ imamo $|u| = 1$, $|u - 1| = 1$.

Tada je $u \cdot \bar{u} = 1$ i $(u - 1)(\bar{u} - 1) = 1$.

Odavde je $1 = (u - 1)\left(\frac{1}{u} - 1\right) = -\frac{(u - 1)^2}{u}$, a nakon sređivanja $u^2 = u - 1$.

Množenjem ove jednakosti s u imamo $u^3 = u^2 - u = -1$.

Sada imamo $u^{99} = (u^3)^{33} = (-1)^{33} = -1$.

Dakle, $\left(\frac{z}{w}\right)^{99} = -1$.

Zadatak B-2.2. (20 bodova) Dani su realni brojevi $0 < a < b$. Odredi sva rješenja nejednadžbe

$$\frac{a}{x - b} + \frac{b}{x - a} \leq 2.$$

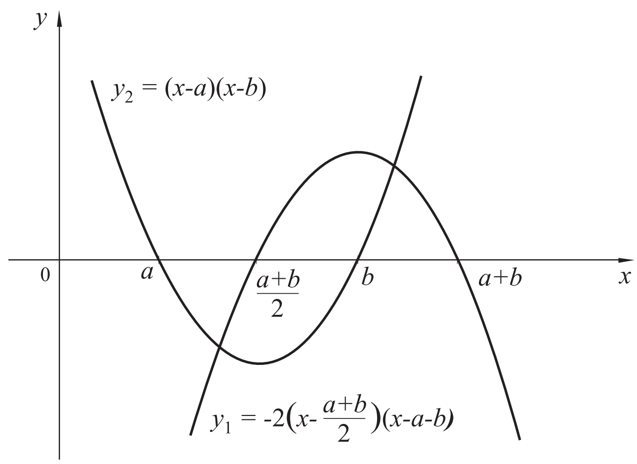
Prvo rješenje. Sređivanjem dane nejednakosti dobiva se

$$\frac{-2x^2 + (3a + 3b)x - (a + b)^2}{(x - a)(x - b)} \leq 0.$$

Budući da su nultočke brojnika $x_1 = a + b$, $x_2 = \dfrac{a+b}{2}$, a nazivnika $x_3 = a$, $x_4 = b$ te kako vrijedi

$$a < \frac{a+b}{2} < b < a + b$$

možemo skicirati grafove funkcija $y_1 = -2x^2 + (3a + 3b)x - (a + b)^2$, odnosno, $y_2 = (x - a)(x - b)$



Kako izraz mora biti ≤ 0 promotrimo gdje su grafovi sa suprotnih strana x-osi. Pri tome je $x \neq a$, $x \neq b$. Dakle,

$$x \in \langle -\infty, a\rangle \cup \left[\frac{a+b}{2}, b\right\rangle \cup [a + b, \infty\rangle.$$

Drugo rješenje. Sređivanjem dane nejednakosti dobiva se

$$\frac{-2x^2 + (3a + 3b)x - (a + b)^2}{(x - a)(x - b)} \leq 0.$$

Moramo promatrati sljedeća dva slučaja:

1°

$$\begin{aligned} -2x^2 + (3a + 3b)x - (a + b)^2 &\leq 0 \\ (x - a)(x - b) &> 0 \end{aligned}$$

Rješenja jednadžbe $-2x^2 + (3a + 3b)x - (a + b)^2 = 0$ su $x_1 = a + b$, $x_2 = \dfrac{a+b}{2}$.

Rješenje prve nejednadžbe je $x \in \left\langle -\infty, \dfrac{a+b}{2}\right] \cup [a + b, \infty\rangle$, a druge $x \in \langle -\infty, a\rangle \cup \langle b, \infty\rangle$

Kako je $0 < a < b$ imamo $a < \dfrac{a+b}{2}$, $b < a + b$, pa se dobiva $x \in \langle -\infty, a\rangle \cup [a + b, \infty\rangle$.

2°

$$\begin{aligned} -2x^2+(3a+3b)x-(a+b)^2 &\geq 0 \\ (x-a)(x-b) &< 0 \end{aligned}$$

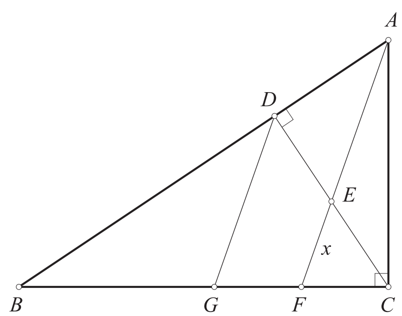
Rješenje prve nejednadžbe je $x \in \left[\dfrac{a+b}{2}, a+b\right]$, a druge $x \in \langle a, b\rangle$.

Rješenje sustava nejednadžbi pod 2° je $x \in \left[\dfrac{a+b}{2}, b\right\rangle$.

Rješenje polaznog sustava nejednažbi je $x \in \langle -\infty, a\rangle \cup \left[\dfrac{a+b}{2}, b\right\rangle \cup [a+b, \infty\rangle$.

Zadatak B-2.3. (20 bodova) U pravokutnom trokutu ABC točka D je nožište visine spuštene iz vrha C na hipotenuzu $\overline{AB}$, točka E je polovište dužine $\overline{CD}$, a točka F je sjecište pravaca AE i BC. Ako je $|AD| = 4$ i $|BD| = 9$, odredi duljinu dužine $\overline{AF}$.

Rješenje. Iz jednakosti $|CD|^2 = |AD| \cdot |BD|$ za pravokutan trokut ABC dobivamo $|CD| = 6$, a kako je E polovište dužine $\overline{CD}$, imamo $|DE| = 3$. Iz pravokutnog trokuta AED je $|AE| = 5$.



Neka je G točka na stranici $\overline{BC}$ takva da je $DG \parallel AF$. Kako je $\overline{EF}$ srednjica trokuta CDG, uz $|EF| = x$ vrijedi $|DG| = 2x$.

Iz sličnosti trokuta AFB i DGB slijedi jednakost $\dfrac{|AF|}{|DG|} = \dfrac{|AB|}{|DB|}$ tj. $\dfrac{5+x}{2x} = \dfrac{13}{9}$ odakle je $x = \dfrac{45}{17}$. Konačno je $|AF| = \dfrac{130}{17}$.

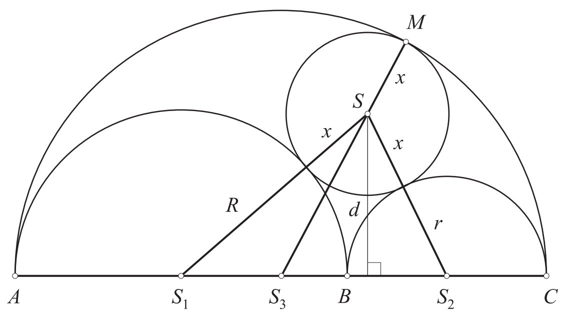
Zadatak B-2.4. (20 bodova) Točke A, B i C leže na istom pravcu i B je između A i C. S iste strane pravca AC konstruirane su tri polukružnice promjera $|AB| = 2R$, $|BC| = 2r$ i $|AC|$. Odredi polumjer kružnice koja dodiruje sve tri polukružnice.

Rješenje. Neka je S središte kružnice, polumjera x, koja dodiruje tri polukružnice i neka je d njezina udaljenost od pravca AC.

Neka su S_1, S_2, S_3, tim redom, polovišta dužina $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$.

Sa slike dobivamo:

$$
\begin{aligned}
|S_1S_3| &= |AS_3| - |AS_1| = (R+r) - R = r, \\
|S_2S_3| &= |CS_3| - |CS_2| = (R+r) - r = R, \\
|S_1S| &= R + x, \\
|S_2S| &= r + x, \\
|S_3S| &= |S_3M| - |SM| = R + r - x.
\end{aligned}
$$



Površine trokuta S_1SS_3 i S_1SS_2 izrazit ćemo pomoću Heronove formule i pomoću osnovice i visine na nju:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{(R+r)R(r-x)x} &= \frac{1}{2}rd, \\
\sqrt{(R+r+x)Rrx} &= \frac{1}{2}(R+r)d.
\end{aligned}
$$

Kvadriranjem ovih jednadžbi i dijeljenjem jedne s drugom, nakon sređivanja, dobiva se

$$x = \frac{Rr(R+r)}{R^2 + Rr + r^2}.$$

Zadatak B-2.5. (20 bodova) Nađi sva rješenja jednadžbe $\lfloor x \rfloor \{x\} = 2009x$, gdje je $\lfloor x \rfloor$ najveći cijeli broj koji nije veći od x, a $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Rješenje. Očito $x = 0$ zadovoljava jednadžbu.

Za $x > 0$ je $0 \leq \lfloor x \rfloor \leq x$, $0 \leq \{x\} < 1$, pa je $\lfloor x \rfloor \{x\} < x < 2009x$. U ovom slučaju nema rješenja.

Za $x < 0$ je $x = -p + \alpha$, gdje je $p = -\lfloor x \rfloor$ prirodan broj, a $\alpha = \{x\}$. Jednadžba sada glasi

$$(-p) \cdot \alpha = (-p + \alpha) \cdot 2009,$$

čije rješenje je $\alpha = \dfrac{2009p}{2009 + p}$.

Kako je $\alpha < 1$, imamo $\dfrac{2009p}{2009 + p} < 1$ tj. $p < \dfrac{2009}{2008}$. Zato je $p = 1$, $\alpha = \dfrac{2009}{2010}$ odakle je $x = -\dfrac{1}{2010}$.

Dakle, jednadžba ima dva rješenja: $x = 0$, $x = -\dfrac{1}{2010}$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B kategorija

Pula, 30. ožujka 2009.

Zadatak B-3.1. (20 bodova) Nađi sva realna rješenja jednadžbe

$$4x^3 - \sqrt{1-x^2} - 3x = 0.$$

Prvo rješenje. Napišimo jednadžbu u obliku $\sqrt{1-x^2} = 4x^3 - 3x$.

Da bi jednadžba bila definirana mora biti $1 - x^2 \geq 0$ tj. $x \in [-1, 1]$. Zato možemo staviti $x = \sin\alpha$, gdje je $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Sada jednadžba postaje

$$\sqrt{1-\sin^2\alpha} = 4\sin^3\alpha - 3\sin\alpha \quad \text{tj.} \quad |\cos\alpha| = -\sin 3\alpha.$$

Za $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ je $\cos\alpha \geq 0$, pa jednadžba poprima oblik

$$\cos\alpha = -\sin 3\alpha \quad \text{tj.} \quad \sin 3\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 0.$$

Lijevu stranu možemo napisati u obliku produkta:

$$2\sin\frac{3\alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha}{2} \cdot \cos\frac{3\alpha - \frac{\pi}{2} + \alpha}{2} = 0 \quad \text{tj.}$$

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Imamo dvije mogućnosti:

1° $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

Opće rješenje ove jednadžbe je $\alpha = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

2° $\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

čije je opće rješenje $\alpha = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.

Jednadžba ima tri rješenja u intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$: $-\frac{\pi}{4},\ -\frac{\pi}{8},\ \frac{3\pi}{8}$.

Rješenja polazne jednadžbe su:

$x_1 = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$x_2 = \sin\left(-\frac{\pi}{8}\right) = -\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

$$x_3 = \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{3\pi}{4}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

Drugo rješenje. Jednadžbu zapišimo u obliku $\sqrt{1-x^2} = 4x^3 - 3x$. Da bi ona bila definirana mora biti 1) $1 - x^2 \geq 0$, 2) $4x^3 - 3x = x(2x - \sqrt{3})(2x + \sqrt{3}) \geq 0$.

Prvi uvjet je zadovoljen za $x \in [-1, 1]$, a drugi za $x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \infty\right\rangle$.

Oba uvjeta su zadovoljena za $x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$

Kvadriranjem jednadžbe i sređivanjem dobivamo

$$16x^6 - 24x^4 + 10x^2 - 1 = 0.$$

Uz supstituciju $t = x^2$ imamo $16t^3 - 24t^2 + 10t - 1 = 0$. Faktorizacijom dobivamo

$$(2t-1)(8t^2 - 8t + 1) = 0.$$

Jednadžba se svodi na sljedeće dvije:

1) Rješenje jednadžbe $2t - 1 = 0$ je $t = \frac{1}{2}$. Zadovoljava samo $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) Rješenja kvadratne jednadžbe $8t^2 - 8t + 1 = 0$ su $t = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4}$. Odavde se dobije $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}$. Zadovoljavaju samo rješenja $x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ i $x_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.
Time su dana sva tri rješenja polazne jednadžbe.

Zadatak B-3.2. (20 bodova) Za realan broj $a > 0$, $a \neq 1$ dana je funkcija

$$f(x) = \log_a x + \log_{a^2} x.$$

U zavisnosti o parametru a nađi sva rješenja jednadžbe

$$f(x + a^2 - a) = 2f(x).$$

Rješenje. Da bi jednadžba imala rješenje moraju biti zadovoljeni sljedeći uvjeti:

$$a > 0, \quad a \neq 1, \quad x > 0, \quad x > a - a^2.$$

Kako je $\log_{a^2} x = \frac{\log_a x}{\log_a a^2} = \frac{1}{2}\log_a x$ zadana funkcija je $f(x) = \frac{3}{2}\log_a x$.

Iz $f(x+a^2-a)=2f(x)$ dobivamo

$$\frac{3}{2}\log_a(x+a^2-a)=2\cdot\frac{3}{2}\log_a x \quad \text{tj.} \quad \log_a(x+a^2-a)=\log_a x^2. \tag{1}$$

Iz logaritamske jednadžbe (1) dobivamo kvadratnu jednadžbu $x^2-x+a-a^2=0$.

Riješimo ju faktorizacijom:

$$0=x^2-a^2-(x-a)=(x-a)(x+a)-(x-a)=(x-a)(x+a-1).$$

Njezina rješenja su $x_1=a$, $x_2=1-a$.

Prvo rješenje ima smisla za svaki pozitivan a osim za $a=1$, a drugo za $a\in\langle 0,1\rangle$.

Naime, za $x_1=a$ imamo $a>a-a^2$ tj. $a^2>0$, što je istinito za svaki a.

Za $x_2>0$ dobivamo $1-a>0$, odnosno $a\in\langle 0,1\rangle$ i za $x_2=1-a$ mora biti $1-a>a-a^2$ tj. $(a-1)^2>0$ pa je x za dopuštene a uvijek definiran.

Zadatak B-3.3. (20 bodova) Izračunaj zbroj

$$\frac{\sin 1}{\cos 0\cdot\cos 1}+\frac{\sin 1}{\cos 1\cdot\cos 2}+\frac{\sin 1}{\cos 2\cdot\cos 3}+\ldots+\frac{\sin 1}{\cos 2008\cdot\cos 2009}.$$

Rješenje. Uočimo n-ti član izraza $\dfrac{\sin 1}{\cos(n-1)\cos n}$ i preuredimo ga

$$\begin{aligned}
\frac{\sin 1}{\cos(n-1)\cos n} &= \frac{\sin[n-(n-1)]}{\cos(n-1)\cos n}\\
&= \frac{\sin n\cos(n-1)}{\cos(n-1)\cos n}-\frac{\cos n\sin(n-1)}{\cos(n-1)\cos n}\\
&= \operatorname{tg} n-\operatorname{tg}(n-1).
\end{aligned}$$

Sada zbroj postaje

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tg}1-\operatorname{tg}0+\operatorname{tg}2-\operatorname{tg}1+\ldots+\operatorname{tg}2008-\operatorname{tg}2007+\operatorname{tg}2009-\operatorname{tg}2008\\
=\ &\operatorname{tg}2009-\operatorname{tg}0=\operatorname{tg}2009.
\end{aligned}$$

Zadatak B-3.4. (20 bodova) Međusobna udaljenost središta sfera polumjera R i r ($r<R$) jednaka je a ($R-r<a\le R+r$).

a) Izrazi obujam V pravilnog kružnog stošca, opisanog oko ovih sfera, u zavisnosti o parametrima a, R i r.

b) Izračunaj volumen stošca ako je $R=10$, $r=6$ i $a=8$.

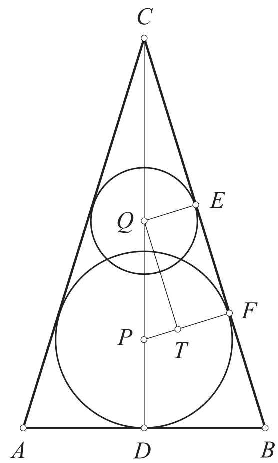
Rješenje. a) Neka je polumjer osnovke stošca $|BD| = x$, a visina $|CD| = y$. Točke E i F su na dužini $\overline{BC}$, T na $\overline{PF}$ i četverokut $QTFE$ je pravokutnik.

Iz sličnosti trokuta QEC i PTQ imamo $\dfrac{|QC|}{|QE|} = \dfrac{|PQ|}{|PT|}$, a odavde

$$\frac{y - R - a}{r} = \frac{a}{R - r}.$$

Nakon sređivanja dobivamo

$$y = \frac{(a + R - r)R}{R - r}. \tag{1}$$



Iz sličnosti trokuta BDC i PTQ imamo $\dfrac{|BD|}{|CD|} = \dfrac{|PT|}{|QT|}$, odnosno

$$\frac{x}{y} = \frac{R - r}{\sqrt{a^2 - (R - r)^2}}. \tag{2}$$

Iz (1) i (2) dobivamo $x = y \cdot \dfrac{R - r}{\sqrt{a^2 - (R - r)^2}}$ tj.

$$x = R\sqrt{\frac{a + R - r}{a - R + r}}. \tag{3}$$

Iz (1), (2) i (3) imamo

$$V = \frac{x^2\pi \cdot y}{3} = \frac{R^3(a + R - r)^2\pi}{3(R - r)(a - R + r)}.$$

b) U specijalnom slučaju za $R = 10$, $r = 6$, $a = 8$ dobivamo $V = 3000\pi$.

Zadatak B-3.5. (20 bodova) Dvije jednake šahovske ploče (8×8 polja) imaju zajedničko središte i jedna potpuno prekriva drugu. Jedna od njih se zarotira oko središta za $45°$. Odredi površinu presjeka svih crnih polja jedne ploče sa svim crnim poljima druge ploče ako je površina jednog polja jednaka 1.

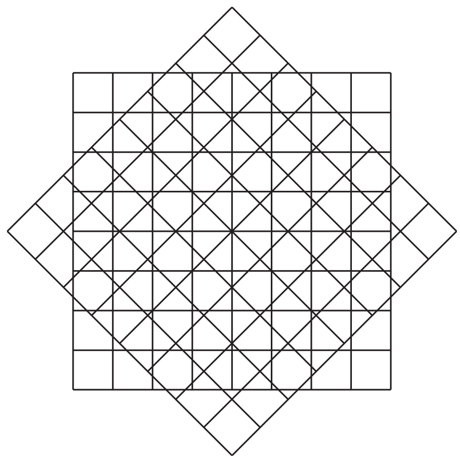
Rješenje. Označimo:

– S_{cc} - zbroj svih zajedničkih površina crnih polja gornje i donje ploče,

– S_{cb} - zbroj svih zajedničkih površina crnih polja gornje i bijelih polja donje ploče,

– S_{bc} - zbroj svih zajedničkih površina bijelih polja gornje i crnih polja donje ploče,

– S_{bb} - zbroj svih zajedničkih površina bijelih polja gornje i donje ploče.



Tada vrijedi $S = S_{cc} + S_{cb} + S_{bc} + S_{bb}$, gdje je S površina pravilnog osmerokuta koji je presjek dviju ploča.

Nazovimo položaj ploča na slici početnim.

Ako zarotiramo gornju ploču za 90° oko njezinog središta, crna polja te ploče će doći na mjesta njenih bijelih polja iz početnog položaja, pa je $S_{cc} = S_{bc}$ i $S_{cb} = S_{bb}$.

Ako zarotiramo donju ploču za 90° oko njenog središta, njena crna polja će doći na mjesta njenih bijelih polja iz početnog položaja, pa je $S_{cc} = S_{cb}$, $S_{bc} = S_{bb}$ tj.

$$S_{cc} = S_{cb} = S_{bc} = S_{bb} \quad \text{odnosno} \quad S_{cc} = \frac{1}{4}S.$$

Nadalje, površina osmerokuta je jednaka površini kvadrata (šahovske ploče) umanjene za četverostruku površinu odsječenog trokuta, tj. $S = 64 - 4P$.

Odsječeni trokut je pravokutan jednakokračan trokut, pa je njegova baza jednaka dvostrukoj visini, tj. $a = 2v$.

Ako s d označimo duljinu dijagonale šahovske ploče, visina trokuta je $v = \dfrac{d-a}{2} = 4(\sqrt{2}-1)$.

Površina trokuta je $P = \dfrac{av}{2} = v^2 = 16(3 - 2\sqrt{2})$.

Dakle, $S = 64 - 4P = 128(\sqrt{2}-1)$.

Konačno je $S_{cc} = 32(\sqrt{2}-1)$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B kategorija

Pula, 30. ožujka 2009.

Zadatak B-4.1. (20 bodova) U rastućem aritmetičkom nizu umnožak drugog i trećeg člana je 3, a umnožak trećeg i petog je -3. Koliko prvih članova niza treba zbrojiti da bi zbroj bio minimalan? Koliki je taj zbroj?

Rješenje. Članove niza ćemo prikazati pomoću prvog člana a_1 i razlike niza d.

Prema uvjetu zadatka imamo ove dvije jednadžbe:

$$\begin{aligned}(a_1+d)(a_1+2d) &= 3,\\ (a_1+2d)(a_1+4d) &= -3.\end{aligned}$$

Zbrojimo li ove dvije jednadžbe, nakon sređivanja, dobivamo homogenu kvadratnu jednadžbu $2a_1^2+9a_1d+10d^2=0$. Dijeljenjem s d^2 dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$2\left(\frac{a_1}{d}\right)^2+9\cdot\frac{a_1}{d}+10=0.$$

Njezina rješenja su $\frac{a_1}{d}=-2$, $\frac{a_1}{d}=-\frac{5}{2}$. Dobivamo $a_1=-2d$, $a_1=-\frac{5}{2}d$.

Prvo rješenje $a_1=-2d$ nema smisla jer uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobivamo $-d\cdot 0=3$!

Za $a_1=-\frac{5}{2}d$ iz prve jednadžbe dobivamo $d=\pm 2$. No, $d=-2$ ne zadovoljava jer niz mora biti rastući. Za $d=2$ dobivamo $a_1=-5$.

Zbroj prvih n članova niza je

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=\frac{n}{2}(a_1+a_1+(n-1)d)=n^2-6n=(n-3)^2-9.$$

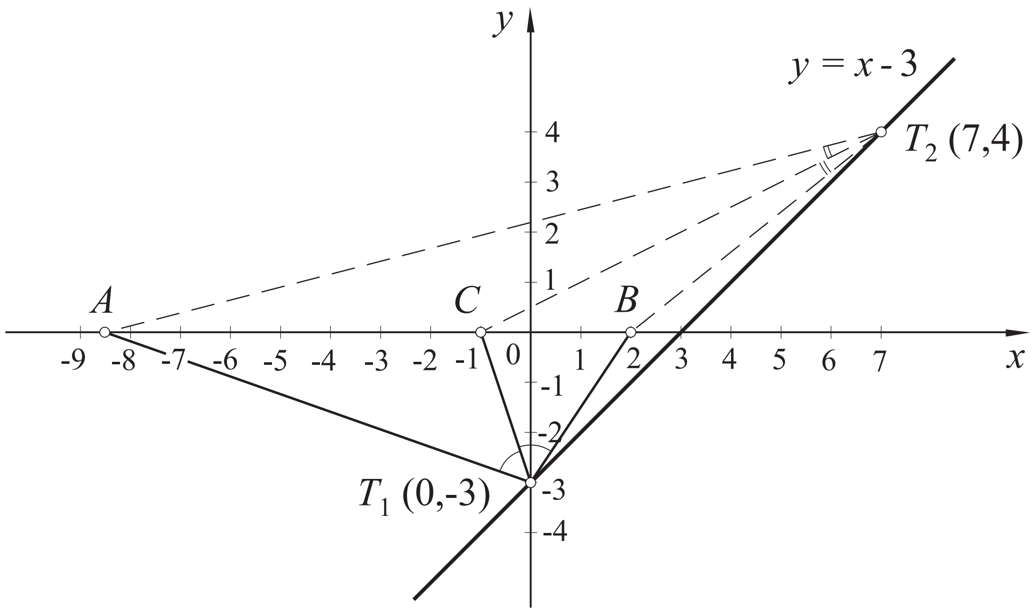
Minimum za S_n dobiva se za $n=3$ i on iznosi $S_{\min}=-9$.

Napomena. Podijelimo li drugu jednadžbu s prvom, dobivamo $\frac{a_1+4d}{a_1+d}=-1$, odakle se dobiva $a_1=-\frac{5}{2}d$, i dalje nastavlja kao gore.

Zadatak B-4.2. (20 bodova) U Kartezijevom koordinatnom sustavu zadane su točke $A\left(-\frac{17}{2},0\right)$, $B(2,0)$, $C(-1,0)$. Nađi sve točke pravca $y=x-3$ iz koje se dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ vide pod istim kutom različitim od nule.

Prvo rješenje. Neka je T tražena točka. Njene koordinate su $T(x,x-3)$. Budući da su kutovi $\sphericalangle CTA$ i $\sphericalangle BTC$ jednaki, dužina $\overline{TC}$ leži na simetrali kuta $\sphericalangle BTA$. Iz teorema o simetrali kuta imamo omjer $|AT| : |BT| = |AC| : |BC|$. Uvrstimo li koordinate točaka imamo

$$\sqrt{\left(x+\frac{17}{2}\right)^2+(x-3)^2} : \sqrt{(x-2)^2+(x-3)^2} = \frac{15}{2} : 3.$$



Kvadriranjem i sređivanjem dobivamo jednadžbu $x^2 - 7x = 0$, čija su rješenja $x_1 = 0$, $x_2 = 7$. Odgovarajuće ordinate su $y_1 = -3$, $y_2 = 4$.

Dakle, tražene točke su $T_1(0, -3)$ i $T_2(7, 4)$.

Drugo rješenje. Neka je T tražena točka. Njezine koordinate su $T(x, y) = T(x, x-3)$.

Koeficijent smjera pravca T_1T_2, čije su koordinate $T(x_1, y_1)$, $T(x_2, y_2)$, je $k_{T_1T_2} = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. U našem slučaju imamo:

$$k_{AT} = \frac{x-3}{x+\dfrac{17}{2}} = \frac{2(x-3)}{2x+17}, \quad k_{BT} = \frac{x-3}{x-2}, \quad k_{CT} = \frac{x-3}{x+1}.$$

Za kut α između pravaca s koeficijentima smjerova k_1, k_2 vrijedi $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$, a kako je $\sphericalangle CTA = \sphericalangle BTC$ dobivamo

$$\frac{k_{CT}-k_{AT}}{1+k_{CT}\cdot k_{AT}} = \frac{k_{BT}-k_{CT}}{1+k_{BT}\cdot k_{CT}}.$$

Uvrstimo li vrijednosti za k_{AT}, k_{BT}, k_{CT} dobivamo

$$\frac{\dfrac{x-3}{x+1}-\dfrac{2(x-3)}{2x+17}}{1+\dfrac{x-3}{x+1}\cdot\dfrac{2(x-3)}{2x+17}} = \frac{\dfrac{x-3}{x-2}-\dfrac{x-3}{x+1}}{1+\dfrac{x-3}{x-2}\cdot\dfrac{x-3}{x+1}}.$$

Sređivanjem dvojnih razlomaka dobit ćemo $\dfrac{5(x-3)}{4x^2+7x+35} = \dfrac{x-3}{2x^2-7x+7}$.

Jedno rješenje ove jednadžbe je $x = 3$, a pripadna ordinata je $y = 0$. U ovom slučaju se dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ vide pod kutom jednakim nuli, što ne odgovara uvjetu zadatka. Zato možemo dijeliti s $x - 3$ i dobivamo $\dfrac{5}{4x^2+7x+35} = \dfrac{1}{2x^2-7x+7}$.

Nakon sređivanja dobivamo $x(x-7) = 0$. Rješenja ove jednadžbe su $x_1 = 0$, $x_2 = 7$, a odgovarajuće ordinate su $y_1 = -3$, $y_2 = 4$.

Dakle tražene točke su $T_1(0,-3)$, $T_2(7,4)$.

Zadatak B-4.3. (20 bodova) Koliki su minimum i maksimum funkcije

$$y = \frac{\sin^2 x - \sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}?$$

Za koje $x \in [0, 2\pi]$ funkcija poprima minimalnu, a za koje maksimalnu vrijednost?

Rješenje. Uočimo da je nazivnik jednak $\left(\sin x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$ pa je y definiran za svaki realan broj x. Dobivamo

$$(y-1)\sin^2 x + (y+1)\sin x + y - 1 = 0. \tag{1}$$

Da bi ova kvadratna jednadžba, po $\sin x$, imala realna rješenja, njezina diskriminanta mora biti nenegativna tj.

$$D = (y+1)^2 - 4(y-1)^2 \geq 0 \quad \text{tj.} \quad (3-y)(3y-1) \geq 0.$$

Odavde dobivamo $\dfrac{1}{3} \leq y \leq 3$, odnosno $y_{\min} = \dfrac{1}{3}$, $y_{\max} = 3$.

Uvrstimo li $y = \dfrac{1}{3}$ u (1) dobivamo kvadratnu jednadžbu $(\sin x - 1)^2 = 0$ tj. $\sin x = 1$, odnosno minimum na $x \in [0, 2\pi]$ se postiže za $x = \dfrac{\pi}{2}$. Analogno za $y = 3$ dobivamo $(\sin x + 1)^2 = 0$, čije je jedino rješenje $\sin x = -1$ pa se maksimum dostiže za $x = \dfrac{3\pi}{2}$.

Zadatak B-4.4. (20 bodova) Nađi formulu za zbroj

$$S_n = \frac{3}{1!+2!+3!} + \frac{4}{2!+3!+4!} + \frac{5}{3!+4!+5!} + \ldots + \frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}.$$

Pokaži da niz zbrojeva konvergira i odredi mu limes!

Rješenje. Preuredimo najprije n-ti član:

$$\begin{aligned}\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!} &= \frac{n+2}{n![1+(n+1)+(n+1)(n+2)]}\\ &= \frac{n+2}{n!(n^2+4n+4)} = \frac{n+2}{n!(n+2)^2} = \frac{1}{n!(n+2)} \cdot \frac{n+1}{n+1}\\ &= \frac{n+1}{(n+2)!} = \frac{(n+2)-1}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}.\end{aligned}$$

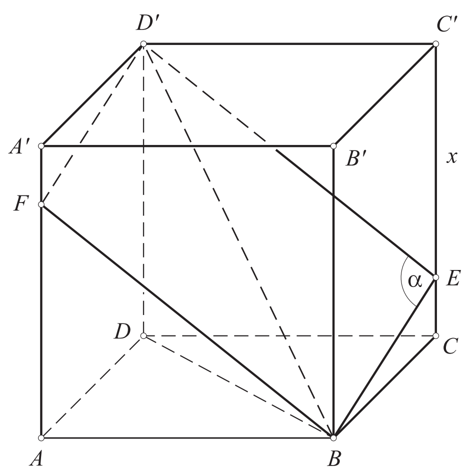
Sada imamo

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}\\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+2)!}.\end{aligned}$$

Limes niza S_n je $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+2)!}\right) = \frac{1}{2}$.

Zadatak B-4.5. (20 bodova) Kocka $ABCDA'B'C'D'$ presječena je ravninom koja sadrži prostornu dijagonalu kocke $\overline{BD'}$ i ima najmanju moguću površinu presjeka s kockom. Koliki je kosinus kuta između te ravnine i ravnine $ABCD$?

Rješenje. Označimo s a duljinu brida kocke. Presjek kocke i ravnine je paralelogram $BED'F$ čija jedna dijagonala je prostorna dijagonala $\overline{BD'}$ kocke. Površina paralelograma je $P = |D'E| \cdot |BE| \cdot \sin\alpha$, gdje je $\alpha = \sphericalangle D'EB$.



Neka je $x = |C'E|$. Tada je $|D'E| = \sqrt{a^2+x^2}$, $|BE| = \sqrt{a^2+(a-x)^2}$.

Korištenjem kosinusovog poučka za trokut $D'BE$ imamo

$$|BD'|^2 = |D'E|^2 + |BE|^2 - 2 \cdot |D'E| \cdot |BE| \cos\alpha.$$

Uvrštavanjem $|BD'| = a\sqrt{3}$ te izraza za $|D'E|$, $|BE|$, nakon sređivanja, imamo

$$\cos\alpha = \frac{x^2 - ax}{\sqrt{(a^2 + x^2)(a^2 + (a-x)^2)}}.$$

Iz $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$ dobivamo

$$\sin\alpha = \frac{a\sqrt{2x^2 - 2ax + 2a^2}}{\sqrt{(a^2 + x^2)(a^2 + (a-x)^2)}}.$$

Uvrštavanjem u formulu za površinu paralelograma dobivamo $P = a\sqrt{2x^2 - 2ax + 2a^2}$.

Budući da je pod korijenom kvadratna funkcija, ona poprima minimum za $x = \dfrac{-(-2a)}{2 \cdot 2} = \dfrac{a}{2}$ i on iznosi $P_{\min} = \dfrac{a^2\sqrt{6}}{2}$.

Traženi kut je $\sphericalangle DBD'$. Duljine stranica pravokutnog trokuta DBD' su $|DD'| = a$, $|BD| = a\sqrt{2}$ i $|BD'| = a\sqrt{3}$ pa je

$$\cos\varphi = \frac{|BD|}{|BD'|} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Napomena. Može se izračunati $\cos\varphi$ i pomoću formule

$$\cos\varphi = \frac{P_{ABCD}}{P_{\min}} = \frac{a^2}{\frac{a^2\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$