RJEŠENJA ZA 4. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK OCIJENITI I BODOVATI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. a)

$$\begin{aligned} 84-8\cdot 6+24:(6-3) &= 84-48+24:3 \\ &= 84-48+8 \\ &= 36+8 \\ &= 44 \end{aligned}$$

5 BODOVA

b)

$$\begin{aligned} 84-8\cdot(6+24:6)-3 &= 84-8\cdot(6+4)-3 \\ &= 84-8\cdot 10-3 \\ &= 84-80-3 \\ &= 4-3 \\ &= 1 \end{aligned}$$

5 BODOVA

. . . . **UKUPNO 10 BODOVA**

2.

$$\begin{array}{r} 7\,* \\ *\,*\,6 \\ +\,*\,4\,9 \\ \hline 2\,0\,0\,8 \end{array}$$

1 BOD

$$\begin{array}{r} 7\,3 \\ *\,*\,6 \\ +\,*\,4\,9 \\ \hline 2\,0\,0\,8 \end{array}$$

2 BODA

$$\begin{array}{r} 7\,3 \\ *\,8\,6 \\ +\,*\,4\,9 \\ \hline 2\,0\,0\,8 \end{array}$$

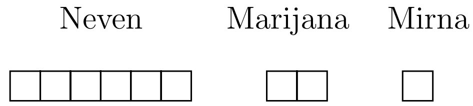
2 BODA

$$\begin{array}{r} 7\,3 \\ 9\,8\,6 \\ +\,9\,4\,9 \\ \hline 2\,0\,0\,8 \end{array}$$

5 BODOVA

. . . . **UKUPNO 10 BODOVA**

3.



$$9\,\square = 3285$$ **1 BOD**

2 BODA

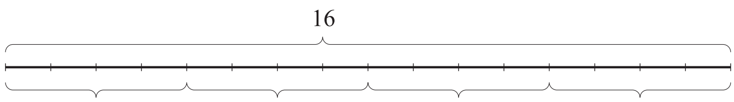
$$\square = 365 \text{ kn}$$

2 BODA

Mirna je dobila 365 kn, Marijana 730 kn, a Neven 2190 kn. **5 BODOVA**

. . . . **UKUPNO 10 BODOVA**

4. Prije 20 godina brat i sestra imali su zajedno $56 - 2 \cdot 20 = 16$ godina. **3 BODA**

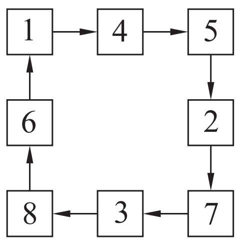


Brat je tada imao 12, a sestra 4 godine. **4 BODA**

Sada brat ima $12 + 20 = 32$ godine, a sestra $4 + 20 = 24$ godine. **3 BODA**

. . . . **UKUPNO 10 BODOVA**

5. Da bismo dobili najmanji neparan šesteroznamenkasti broj, brojeve valja upisati kako je to prikazano slikom.



8 BODOVA

Na taj se način dobije broj

$$145\,273.$$

2 BODA

. . . . **UKUPNO 10 BODOVA**

RJEŠENJA ZA 5. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK OCIJENITI I BODOVATI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Uz primjenu svojstva distributivnosti množenja prema zbrajanju odnosno prema oduzimanju slijedi

$$2008 : 8 + (36 \cdot 8 \cdot 7 + 4 \cdot 44 \cdot 9) : 72 - 12 \cdot (49 \cdot 12 \cdot 6 - 8 \cdot 5 \cdot 72) : 81$$
$$= 251 + (36 \cdot 56 + 36 \cdot 44) : 72 - 12 \cdot (49 \cdot 72 - 40 \cdot 72) : 81$$

3 BODA

$$= 251 + 36 \cdot (56 + 44) : 72 - 12 \cdot 72 \cdot (49 - 40) : 81$$

2 BODA

$$= 251 + 36 \cdot 100 : 72 - 12 \cdot 72 \cdot 9 : 81$$
$$= 251 + 36 \cdot 2 \cdot 50 : 72 - 12 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 9 : 81$$

2 BODA

$$= 251 + 72 \cdot 50 : 72 - 96 \cdot 81 : 81$$
$$= 251 + 50 - 96$$

2 BODA

$$= 205$$

1 BOD

. . . . **UKUPNO 10 BODOVA**

2.

$$\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + \overline{a} = 2008$$
$$1000a + 100b + 10c + d + 100a + 10b + c + 10a + b + a = 2008$$
$$1111a + 111b + 11c + d = 2008$$

2 BODA

$$\Longrightarrow a = 1$$

1 BOD

$$111b + 11c + d = 2008 - 1111$$
$$111b + 11c + d = 897$$

2 BODA

$$\Longrightarrow b = 8$$

1 BOD

$$11c + d = 897 - 888$$
$$11c + d = 9$$

1 BOD

$$\Longrightarrow c = 0$$

1 BOD

$$d = 9$$

1 BOD

Traženi broj je 1809. **1 BOD**

. . . . **UKUPNO 10 BODOVA**

3. Šesteroznamenkasti broj koji počinje s 2008 je oblika $\overline{2008ab}$, pri čemu je $a, b \in \{0, 1, \ldots, 9\}$.

Takvih ima $10 \cdot 10 = 100$. **4 BODA**

Šesteroznamenkasti broj koji završava s 2008 je oblika $\overline{xy2008}$, pri čemu je $x \in \{1, 2, \ldots, 9\}$, $y \in \{0, 1, \ldots, 9\}$.

Takvih ima $9 \cdot 10 = 90$. **4 BODA**

Budući da je $90 < 100$, brojeva koji završavaju znamenkama 2008 ima manje. **2 BODA**

. . . . **UKUPNO 10 BODOVA**

4. Ako je x traženi broj, onda je $x - 2$ višekratnik od 4, 6, 8 i 9, tj. $x - 2$ je višekratnik od 72. **4 BODA**

Kako je $1000 = 13 \cdot 72 + 64$, to je

$$1008 = 14 \cdot 72$$

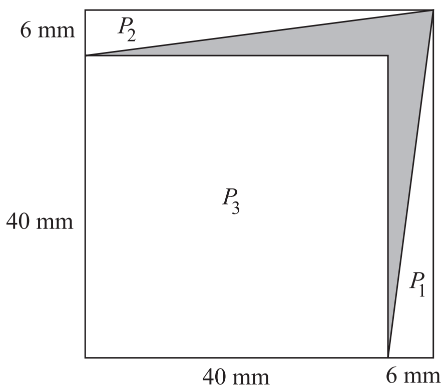
4 BODA

$$\begin{aligned} x - 2 &= 1008 \\ x &= 1010 \end{aligned}$$

Traženi broj je 1010. **2 BODA**

. . . . **UKUPNO 10 BODOVA**

5.



2 BODA

$$P_1 = 46 \cdot 46 = 2116 \text{ mm}^2$$

2 BODA

$$P_2 = (46 \cdot 6) : 2 = 138 \text{ mm}^2$$

2 BODA

$$P_3 = 40 \cdot 40 = 1600 \text{ mm}^2$$

2 BODA

$$P = P_1 - 2P_2 - P_3 = 2116 - 2 \cdot 138 - 1600 = 240 \text{ mm}^2$$

Površina osjenčanog dijela je 240 mm^2. **2 BODA**

. . . . **UKUPNO 10 BODOVA**

RJEŠENJA ZA 6. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK OCIJENITI I BODOVATI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Kako je $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}=\frac{60}{120}+\frac{30}{120}+\frac{20}{120}+\frac{15}{120}+\frac{12}{120}+\frac{10}{120}=\frac{147}{120}$ i $1=\frac{120}{120}$, treba izbrisati $\frac{147-120}{120}=\frac{27}{120}$. **5 BODOVA**

To znači da treba izbrisati $\frac{15}{120}+\frac{12}{120}$ odnosno pribrojnike $\frac{1}{8}$ i $\frac{1}{10}$. **5 BODOVA**

. . . . **UKUPNO 10 BODOVA**

2. Vrijedi $1+2-3-4=-4$, $5+6-7-8=-4$, $9+10-11-12=-4$. **5 BODOVA**
Kako je $2008=4\cdot 502$, onda je

$$1+2-3-4+5+6-7-8+\cdots-2008=502\cdot(-4)=-2008.$$

5 BODOVA

. . . . **UKUPNO 10 BODOVA**

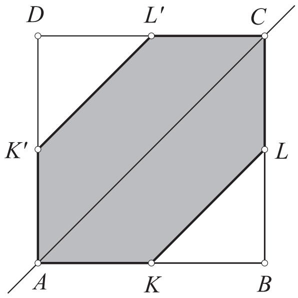
3. 1° Ako zbroj ima dva pribrojnika
$x+x+1=45 \implies x=22, \quad 22+23=45.$ **1 BOD**
2° Ako zbroj ima tri pribrojnika
$x+x+1+x+2=45 \implies x=14, \quad 14+15+16=45.$ **1 BOD**
3° Ako zbroj ima četiri pribrojnika
$x+x+1+x+2+x+3=45 \implies 4x=39$, nema rješenja u $\mathbf{N}$. **1 BOD**
4° Ako zbroj ima pet pribrojnika
$x+x+1+\cdots+x+4=45 \implies x=7, \quad 7+8+9+10+11=45.$ **1 BOD**
5° Ako zbroj ima šest pribrojnika
$x+x+1+\cdots+x+5=45 \implies x=5, \quad 5+6+7+8+9+10=45.$ **1 BOD**
6° Ako zbroj ima sedam pribrojnika
$x+x+1+\cdots+x+6=45 \implies 7x=24$, nema rješenja u $\mathbf{N}$. **1 BOD**
7° Ako zbroj ima osam pribrojnika
$x+x+1+\cdots+x+7=45 \implies 8x=17$, nema rješenja u $\mathbf{N}$. **2 BODA**
8° Ako zbroj ima devet pribrojnika
$x+x+1+\cdots+x+8=45 \implies x=1, \quad 1+2+3+4+5+6+7+8+9=45.$
Dakle, imamo pet različitih rješenja. **2 BODA**

. . . . **UKUPNO 10 BODOVA**

4. Neka je osnosimetrična slika trokuta $\triangle ABC$ obzirom na pravac AC trokut $\triangle ACD$. Kako je $|AB|=|BC|$ i $\overline{AB}\perp\overline{BC}$, onda je trokut $\triangle ABC$ jednakokračan pravokutan pa je i trokut $\triangle ACD$ jednakokračan pravokutan. **2 BODA**

Tada je očito četverokut $ABCD$ kvadrat. **1 BOD**

Kako su K i L polovišta dužina $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$, onda su njihove osnosimetrične slike K' i L' polovišta dužina $\overline{AD}$ i $\overline{CD}$.



2 BODA

Očito su trokuti $\triangle KBL$ i $\triangle K'L'D$ jednakokračni pravokutni.

Neka je P površina lika $AKLCL'K'$.

Tada je $P_{\triangle KBL} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}}{2} = \frac{a \cdot a}{8}$, $P_{\square ABCD} = a \cdot a$ i $P_{\triangle K'L'D} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}}{2} = \frac{a \cdot a}{8}$.

3 BODA

Lako se uoči da je $P = P_{\square ABCD} - P_{\triangle KBL} - P_{\triangle K'L'D}$, pa vrijedi

$$P = a \cdot a - \frac{a \cdot a}{8} - \frac{a \cdot a}{8} = \frac{6}{8} a \cdot a = \frac{3}{4} a \cdot a.$$

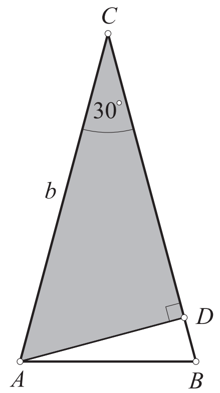
Dakle, površina lika $AKLCL'K'$ je $\frac{3}{4} \cdot a \cdot a$. **2 BODA**

. . . . **UKUPNO** **10 BODOVA**

5.

$$\begin{aligned} & |AC| = |BC| = b = 7.5 \text{ cm} \\ & |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ABC| = 75^\circ \\ \Longrightarrow \quad & |\sphericalangle ACB| = 30^\circ \end{aligned}$$

2 BODA



Odaberimo točku D na $\overline{BC}$ tako da je $\overline{AD} \perp \overline{BC}$. **2 BODA**

$\overline{AD}$ je visina trokuta ABC i kateta pravokutnog trokuta $\triangle ADC$ nasuprot kutu od 30° te je:

$$|AD| = \frac{1}{2}|AC| = \frac{1}{2} \cdot 7.5 = 3.75 \text{ cm}.$$

3 BODA

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|BC| \cdot |AD| = \frac{1}{2} \cdot 7.5 \cdot 3.75 = 14.0625 \text{ cm}^2.$$

3 BODA

. . . . **UKUPNO** **10 BODOVA**

RJEŠENJA ZA 7. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK OCIJENITI I BODOVATI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1.

$$\frac{\frac{3}{2}-\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}} : \frac{\frac{7}{4}-\frac{4}{5}}{\frac{1}{4}+\frac{4}{5}} = \frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\cdot 9}{\frac{1}{2}-\frac{4-3}{12}} : x$$

1 BOD

$$\frac{\frac{6-3}{4}}{\frac{2+3}{4}} : \frac{\frac{35-16}{20}}{\frac{5+16}{20}} = \frac{\frac{3-2}{6}\cdot 9}{\frac{1}{2}-\frac{1}{12}} : x$$

2 BODA

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} : \frac{\frac{19}{20}}{\frac{21}{20}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{12}} : x$$

2 BODA

$$\frac{3}{5} : \frac{19}{21} = \frac{18}{5} : x$$

2 BODA

$$\begin{aligned} \frac{3}{5}x &= \frac{19}{21}\cdot\frac{18}{5} \\ \frac{3}{5}x &= \frac{19\cdot 6}{35} \quad / \cdot\frac{5}{3} \\ x &= \frac{38}{7} \end{aligned}$$

3 BODA

. . . . **UKUPNO 10 BODOVA**

2. Neka je x broj učenika koji su sudjelovali na školskim natjecanjima.

Na županijsko se natjecanje plasiralo $12\%(50)$, tj. ukupno 6 učenika iz te općine. **2 BODA**

Prema uvjetu zadatka postavljamo jednadžbu

$$2.5\%(x) = 6.$$

3 BODA

Dakle,

$$\begin{aligned} 0.025x &= 6 \\ x &= 6 : 0.025 \\ x &= 240 \end{aligned}$$

3 BODA

Na školskim je natjecanjima sudjelovalo 240 učenika. **2 BODA**

. . . . **UKUPNO 10 BODOVA**

3. Ako su x i y traženi brojevi, onda vrijedi

$$x : y = 4 : 3 \quad \text{i} \quad y = \frac{3}{4}x.$$

2 BODA

$$(x+y) : xy = 7 : 6$$

2 BODA

$$\begin{aligned} 6(x+y) &= 7xy \\ 6\left(x + \frac{3}{4}x\right) &= 7x \cdot \frac{3}{4}x \\ 6 \cdot \frac{7}{4}x &= 3x \cdot \frac{7}{4}x, \ x \neq 0 \\ 6 &= 3x \\ x &= 2 \end{aligned}$$

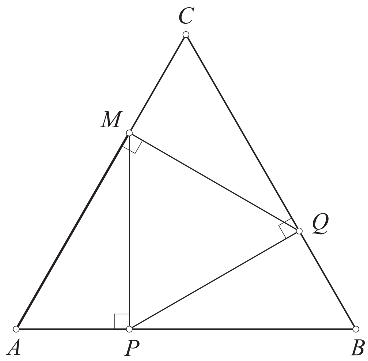
3 BODA

$$y = \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2}$$

Uvjete zadatka ispunjavaju brojevi 2 i $\frac{3}{2}$. **3 BODA**

. . . . **UKUPNO 10 BODOVA**

4.



1 BOD

Kako je $\triangle ABC$ jednakostraničan, onda je $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BCA| = 60°$.

Obzirom da je $|\sphericalangle APM| = 90°$, onda je $|\sphericalangle PMA| = 180° - |\sphericalangle APM| - |\sphericalangle MAP| = 180° - |\sphericalangle APM| - |\sphericalangle CAB| = 180° - 90° - 60° = 30°$.

Analogno, $|\sphericalangle QPB| = 30°$ i $|\sphericalangle MQC| = 30°$. **2 BODA**

To znači da su $\triangle APM$, $\triangle BQP$ i $\triangle CMQ$ polovice jednakostraničnog trokuta. **1 BOD**

Vrijedi $|\sphericalangle APM| + |\sphericalangle MPQ| + |\sphericalangle QPB| = 180°$ odnosno $|\sphericalangle MPQ| = 60°$.

Analogno, $|\sphericalangle PQM| = 60°$ i $|\sphericalangle QMP| = 60°$ što znači da je $\triangle PQM$ jednakostraničan. **2 BODA**

Iz $|MP| = |PQ| = |QM|$, $|\sphericalangle APM| = |\sphericalangle BQP| = |\sphericalangle QMC| = 90°$ i $|\sphericalangle PMA| = |\sphericalangle QPB| = |\sphericalangle MQC| = 30°$ prema teoremu K-S-K o sukladnosti slijedi $\triangle APM \cong \triangle BQP \cong \triangle CMQ$. **2 BODA**

Dakle, $|AP| = |CM|$ i $|AP| = \dfrac{|AM|}{2}$.

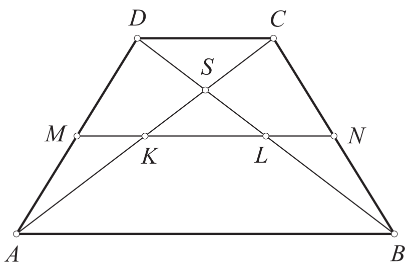
Slijedi

$$\begin{aligned} |AM| + |MC| &= 9 \\ 2|AP| + |AP| &= 9 \\ 3|AP| &= 9 \\ |AP| &= 3 \end{aligned}$$

odnosno $|AM| = 6$ cm. **2 BODA**

. . . . **UKUPNO 10 BODOVA**

5.



1 BOD

Budući da je $ABCD$ jednakokračan trapez, onda je $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle ABC|$ i $|AD| = |BC|$.

Zato prema poučku S-K-S o sukladnosti slijedi $\triangle ABD \cong \triangle BAC$. **2 BODA**

Iz sukladnosti slijedi $|\sphericalangle BDA| = |\sphericalangle ACB|$ što znači $|\sphericalangle LDM| = |\sphericalangle KCN|$. **1 BOD**

Kako je $\overline{MN}$ srednjica trapeza $ABCD$, onda je $\overline{MN} \| \overline{AB}$ pa vrijedi $|\sphericalangle DML| = |\sphericalangle DAB|$ i $|\sphericalangle KNC| = |\sphericalangle ABC|$.

Dakle, $|\sphericalangle DML| = |\sphericalangle KNC|$. **2 BODA**

Točke M i N su polovišta krakova $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ pa je $|DM| = |CN|$.

Prema poučku K-S-K o sukladnosti slijedi $\triangle DML \cong \triangle CNK$. **2 BODA**

Na kraju je $P_{\square DMKS} = P_{\triangle DML} - P_{\triangle KLS} = P_{\triangle CNK} - P_{\triangle KLS} = P_{\square CSLN}$ te je time tvrdnja dokazana. **2 BODA**

. . . . **UKUPNO 10 BODOVA**

RJEŠENJA ZA 8. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK OCIJENITI I BODOVATI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Vrijedi

$$\begin{aligned} x^2+4y^2+2x-12y+10 &= x^2+2x+1+4y^2-12y+9 \\ &= (x+1)^2+(2y-3)^2=0. \end{aligned}$$

4 BODA

Zato slijedi $x=-1$, $2y-3=0$ odnosno $y=\frac{3}{2}$. **3 BODA**

Na kraju

$$x^{2008}+2008y=(-1)^{2008}+2008\cdot\frac{3}{2}=1+3012=3013.$$

3 BODA

. . . . **UKUPNO 10 BODOVA**

2.

$$\frac{x+4}{y-3}=\frac{3}{5}$$
$$\frac{x-3}{y+4}=\frac{1}{11}$$

$$5(x+4)=3(y-3)$$
$$11(x-3)=1(y+4)$$

2 BODA

$$5x+20=3y-9$$
$$11x-33=y+4 \implies y=11x-37$$

2 BODA

$$5x+20 = 3(11x-37)-9$$

1 BOD

$$\begin{aligned} 5x+20 &= 33x-111-9 \\ 5x-33x &= -111-9-20 \\ -28x &= -140 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

2 BODA

$$\begin{aligned} y &= 11\cdot 5-37 \\ y &= 18 \end{aligned}$$

1 BOD

Traženi razlomak je $\frac{5}{18}$. **2 BODA**

. . . . **UKUPNO 10 BODOVA**

3. Kada ptica leti u smjeru kretanja vlaka, njena brzina u odnosu na vlak iznosi

$$12 - 4 = 8 \text{ m/s.}$$

2 BODA

Kada ptica leti u smjeru suprotnom od kretanja vlaka, njena brzina u odnosu na vlak iznosi

$$12 + 4 = 16 \text{ m/s.}$$

2 BODA

Neka je x duljina vlaka u metrima. Tada je

$$\frac{x}{8} + \frac{x}{16} = 60$$

3 BODA

$$\begin{aligned} 3x &= 960 \\ x &= 320. \end{aligned}$$

Duljina vlaka je 320 metara. **3 BODA**

. . . . **UKUPNO 10 BODOVA**

4. Neka su duljine kateta a i b $(a > b)$. Tada je $a - b = 6$.

Iz $P_\triangle = \dfrac{ab}{2} = \dfrac{c \cdot v_c}{2}$ slijedi $a \cdot b = c \cdot v_c$. **1 BOD**

Nakon kvadriranja jednakosti $a - b = 6$, vrijedi

$$a^2 - 2ab + b^2 = 36$$

2 BODA

$$\begin{aligned} a^2 - 2cv_c + b^2 &= 36 \\ c^2 - 2cv_c &= 36 \\ c^2 - 16c &= 36 \\ c^2 - 16c + 64 &= 100 \\ (c-8)^2 &= 100 \end{aligned}$$

2 BODA

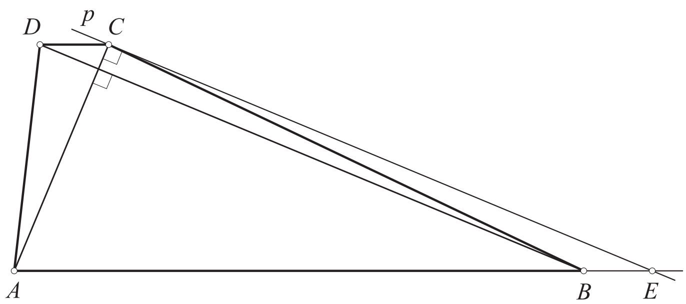
1° $c - 8 = 10 \implies c = 18$ cm **2 BODA**

2° $c - 8 = -10 \implies c = -2$ što je nemoguće. **2 BODA**

Duljina hipotenuze je 18 cm. **1 BOD**

. . . . **UKUPNO 10 BODOVA**

5.



Točkom C nacrtamo paralelu p s BD. **2 BODA**

Neka je $p \cap AB = \{E\}$. Tada je $DBEC$ paralelogram pa je $|BE| = |DC|$ i $|BD| = |EC|$. Nadalje $\triangle ACE$ je pravokutan pa je

$$|AB| + |BE| = \sqrt{|AC|^2 + |CE|^2} = \sqrt{|AC|^2 + |BD|^2}.$$

4 BODA

S druge strane je

$$|AB| + |BE| = |AB| + |CD| = 2s.$$

2 BODA

$$\implies 2s = \sqrt{2.5^2 + 6^2} = 6.5 \implies s = 3.25 \text{ cm}.$$

2 BODA

. . . . **UKUPNO** **10 BODOVA**