

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A kategorija

7. ožujka 2008.

1. Riješi jednadžbu

$$\frac{6a+1}{a}x + \frac{6a}{a+1} + \frac{a^2}{(a+1)^3} = \frac{2a+1}{a^3+2a^2+a}x$$

u ovisnosti o realnom parametru a .

2. Dokaži da za svaki realan broj x , $x > -1$, vrijedi nejednakost

$$\frac{x+x^2+x^3+x^4}{1+x^5} \leq 2.$$

3. Dokaži da je za svaki prirodan broj n izraz $n^{19} - n^7$ djeljiv s 30.

4. Težišnica i visina iz vrha A trokuta ABC dijele kut kod vrha A na tri jednaka dijela. Koliki su kutovi trokuta ABC ?

5. Hipotenuza \overline{AB} pravokutnog trokuta ABC ima duljinu 6. Kvadrat je upisan u taj trokut tako da mu dva vrha leže na hipotenuzi, a druga dva vrha na katetama.

(a) Dokaži da površina kvadrata nije veća od 4.

(b) Za kakav trokut je ta površina jednaka 4?

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.

Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A kategorija

7. ožujka 2008.

1. Ako su u i v kompleksni brojevi, dokaži nejednakost

$$(1 + uv)(1 + \bar{u}\bar{v}) \leq (1 + u\bar{u})(1 + v\bar{v}).$$

2. Odredi sva realna rješenja jednadžbe

$$x^2 + x + \sqrt{x^2 + x + 7} = 5.$$

3. Duljine stranica trokuta su a , b i c , a veličine kutova nasuprot stranica duljina b i c su $\beta = 50^\circ$ i $\gamma = 100^\circ$. Dokaži jednakost

$$ab = c^2 - b^2.$$

4. Tetiva \overline{AB} dijeli krug polumjera r na dva dijela čije se pripadne duljine kružnih lukova odnose kao 1 : 2. U veći od ta dva dijela upisan je kvadrat čija jedna stranica leži na toj tetivi. Odredi duljinu stranice tog kvadrata.

5. Ako se dvoznamenkastom broju pribroji umnožak njegovih znamenaka, dobije se kvadrat zbroja tih znamenaka. Odredi sve takve brojeve.

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.

Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A kategorija

7. ožujka 2008.

1. Dani su realni brojevi a, b, c veći od 1. Dokaži sljedeću nejednakost

$$\log_a bc + \log_b ca + \log_c ab \geq 4(\log_{ab} c + \log_{bc} a + \log_{ca} b).$$

2. Neka je $P(x) = ax^2 + bx + c$, gdje su $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Odredi sva rješenja jednadžbe

$$P(x^2 + 4x - 7) = 0,$$

ako je poznato da je jedno od njih jednako 1 i barem jedno rješenje je dvostruko.

3. Visina, simetrala kuta i težišnica povučene iz jednog vrha trokuta dijele kut na četiri jednaka dijela. Odredi kutove trokuta.

4. Ako je

$$\cos \alpha + \cos \beta = a, \quad \sin \alpha + \sin \beta = b, \quad a^2 + b^2 \neq 0,$$

odredi $\cos(\alpha + \beta)$.

5. Kugla je upisana u krnji stožac čije su osnovke centralni presjeci drugih dviju kugala. Odredi oplošje stošca ako je zbroj oplošja svih triju kugala jednak S .

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.

Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A kategorija

7. ožujka 2008.

1. Neka je $a_n = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}$, gdje je n prirodan broj. Odredi najmanji prirodan broj k takav da je

$$P_k = a_2 a_3 \dots a_k$$

veći od 1000.

2. Pronađi sve prirodne brojeve n , takve da neka tri uzastopna koeficijenta razvoja $(a + b)^n$ čine aritmetički niz.
3. Dokaži da za svaki prirodni broj n veći od 2 vrijedi

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} < 1.$$

4. Neka je p realan broj, $0 < p < 1$, a n prirodan broj. Dokaži da vrijedi nejednakost

$$1 + 2p + 3p^2 + \dots + np^{n-1} < \frac{1}{(1-p)^2}.$$

5. Osnovka ABC piramide $ABCV$ je jednakostraničan trokut stranice duljine $2\sqrt{2}$. Brid \overline{CV} ima duljinu 1 i okomit je na ravninu osnovke. Nađi kut koji zatvaraju pravci od kojih jedan prolazi vrhom V i polovištem stranice \overline{BC} , a drugi vrhom C i polovištem stranice \overline{AB} .

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.

Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.