RJEŠENJA ZA 7. RAZRED

1. Neka su

$$\begin{aligned} a &\ - \text{ Anine godine,} \\ i &\ - \text{ Ivine godine,} \\ m &\ - \text{ Majine godine,} \\ a + i + m &= 35. \end{aligned}$$

Godine se odnose kao kesteni:

$$\begin{aligned} & i : a = 4 : 3, \quad i : m = 6 : 7 \\ \Longrightarrow \quad & a = \frac{3}{4}i, \quad m = \frac{7}{6}i \\ \Longrightarrow \quad & i + \frac{3}{4}i + \frac{7}{6}i = 35 \\ \Longrightarrow \quad & \frac{12i + 9i + 14i}{12} = 35 \Longrightarrow \frac{35}{12}i = 35 \\ \Longrightarrow \quad & i = 12, \quad a = \frac{3}{4} \cdot 12 = 9, \quad m = \frac{7}{6} \cdot 12 = 14. \end{aligned}$$

Kako je $770 : 35 = 22$, onda je Ivi pripalo $22 \cdot 12 = 264$ kestena, Ani $22 \cdot 9 = 198$ kestena, a Maji $22 \cdot 14 = 308$ kestena.

Iva ima 12 godina i 264 kestena, Ana ima 9 godina i 198 kestena, a Maja ima 14 godina i 308 kestena.

2. Neka je

$$\begin{aligned} &x - \text{cijena materijala,} \\ &y - \text{količina materijala u metrima.} \end{aligned}$$

Nakon sniženja cijena je

$$x - 52\%x = x - 0.52x = 0.48x.$$

Vrijedi

$$\begin{aligned} 240 &= 0.48x \cdot (y + 1), \\ 240 &= 0.48x \cdot y + 0.48x. \end{aligned}$$

Prije sniženja vrijedi

$$270 = x \cdot y.$$

Slijedi

$$\begin{aligned} 240 &= 0.48 \cdot 270 + 0.48x \\ 240 &= 129.6 + 0.48x \\ 0.48x &= 110.4 \\ x &= \frac{110.4}{0.48} \\ x &= 230. \end{aligned}$$

Cijena prije sniženja bila je 230 kn.

3. Takvih brojeva ima $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Zapišimo svaki od tih brojeva u obliku

$$10\,000a + 1000b + 100c + 10d + e.$$

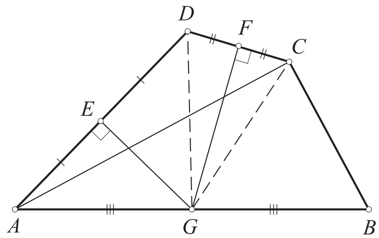
Prilikom zbrajanja tih brojeva, na dekadskom mjestu jedinica nalazi se po 24 jedinice, dvojke, trojke, četvorke i petice. Isto se nalazi na mjestu desetica, stotica, tisućica i desettisućica. Zbroj svih znamenki na pojedinom dekadskom mjestu je

$$\begin{aligned} n &= 24 \cdot 5 + 24 \cdot 4 + 24 \cdot 3 + 24 \cdot 2 + 24 \cdot 1 \\ &= 24(5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 360. \end{aligned}$$

Prema tome, zbroj svih tih brojeva je

$$\begin{aligned} &10\,000n + 1000n + 100n + 10n + n \\ &\qquad = (10\,000 + 1000 + 100 + 10 + 1) \cdot n \\ &\qquad = 11\,111 \cdot 360 = 3\,999\,960. \end{aligned}$$

4.



Kako je $|AE| = |ED|$, $|\sphericalangle GEA| = |\sphericalangle DEG| = 90°$ i $\overline{GE}$ zajednička stranica trokuta $\triangle AGE$ i $\triangle DGE$, prema teoremu S-K-S o sukladnosti slijedi $\triangle AGE \cong \triangle DGE$. Iz sukladnosti slijedi $|AG| = |GD|$.

Analogno, $\triangle GFD \cong \triangle GFC$ pa je $|GD| = |GC|$.

Dakle, $|AG| = |GD| = |GC|$ i $|AG| = |GB|$ što znači da je $|GC| = |GB|$ odnosno trokut $\triangle GBC$ je jednakokračan.

Također, trokut $\triangle AGC$ je jednakokračan.

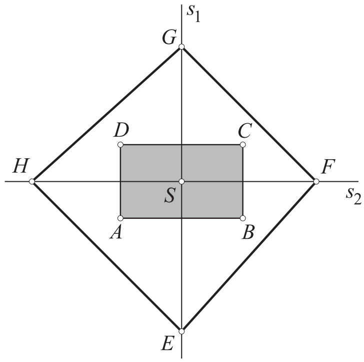
Neka je $|\sphericalangle CAG| = \alpha$.

Tada je $|\sphericalangle GCA| = \alpha$, pa je $|\sphericalangle CGB| = |\sphericalangle CAG| + |\sphericalangle GCA| = 2\alpha$.

Dalje je $|\sphericalangle BCG| = |\sphericalangle GBC| = \dfrac{180° - |\sphericalangle CGB|}{2} = 90° - \alpha$.

Na kraju, $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle GCA| + |\sphericalangle BCG| = \alpha + 90° - \alpha = 90°$.

5. Neka je s_1 simetrala stranice $\overline{AB}$, a s_2 simetrala stranice $\overline{BC}$.



Kako je $s_1 \perp AB$, $s_2 \perp BC$ i $AB \perp BC$, onda je i $s_1 \perp s_2$.

Budući da je $|ES| = |SH|$ i $|\sphericalangle ESH| = 90°$, onda je $\triangle ESH$ jednakokračan pravokutan pa je $|\sphericalangle HES| = |\sphericalangle SHE| = 45°$.

No, i $|FS| = |SG|$ i $|\sphericalangle GSF| = 90°$ te je i $\triangle FGS$ jednakokračan pravokutan, odnosno $|\sphericalangle SFG| = |\sphericalangle FGS| = 45°$.

S obzirom da je $|\sphericalangle FSE| = 90°$, onda je $\triangle EFS$ pravokutan pa je $|\sphericalangle SEF| + |\sphericalangle EFS| = 90°$.

Dalje je

$$\begin{aligned}
|\sphericalangle HEF| + |\sphericalangle EFG| &= (|\sphericalangle HES| + |\sphericalangle SEF|) + (|\sphericalangle EFS| + |\sphericalangle SFG|) \\
&= |\sphericalangle HES| + (|\sphericalangle SEF| + |\sphericalangle EFS|) + |\sphericalangle SFG| \\
&= 45° + 90° + 45° = 180°.
\end{aligned}$$

To znači da je $EH \| FG$ te je $\square\, EFGH$ trapez.

Kako je $|ES| = |SH|$, $|\sphericalangle FSE| = |\sphericalangle HSG| = 90°$ i $|FS| = |SG|$, prema teoremu S-K-S o sukladnosti slijedi $\triangle EFS \cong \triangle HGS$.

Iz sukladnosti slijedi $|EF| = |HG|$ te je time tvrdnja dokazana.

RJEŠENJA ZA 8. RAZRED

1. Napišimo dani izraz u sljedećem obliku

$$\begin{aligned} a(a+2)+c(c-2)-2ac &= a^2+2a+c^2-2c-2ac \\ &= (a-c)^2+2(a-c) \\ &= 7^2+2\cdot 7 = 49+14 \\ &= 63. \end{aligned}$$

2. Vrijedi

$$\begin{aligned} (\sqrt{2006}+\sqrt{2010})^2 &= (\sqrt{2006})^2+2\cdot\sqrt{2006}\cdot\sqrt{2010}+(\sqrt{2010})^2 \\ &= 2006+2\sqrt{2006\cdot 2010}+2010 \\ &= 4016+2\sqrt{2006\cdot 2010} \\ &= 2\cdot 2008+2\sqrt{2006\cdot 2010} \\ &= 2\cdot(2008+\sqrt{2006\cdot 2010}). \end{aligned}$$

Dalje je

$$\begin{aligned} \sqrt{2006\cdot 2010} &= \sqrt{(2008-2)(2008+2)} \\ &= \sqrt{2008^2-2^2} \\ &= \sqrt{2008^2-4} \\ &< \sqrt{2008^2} \\ &= 2008. \end{aligned}$$

Zato slijedi

$$(\sqrt{2006}+\sqrt{2010})^2 < 2\cdot(2008+2008) = 4\cdot 2008.$$

Korjenovanjem nejednakosti slijedi

$$\sqrt{2006}+\sqrt{2010} < 2\sqrt{2008}.$$

3. Ako je u oba dijela:

1) netočan

$$\begin{array}{cccc} - & A & C & - \\ - & B & E & + \\ + & F & A & - \\ - & B & F & + \\ + & D & A & - \end{array} \Longrightarrow$$

A	B	C	D	E	F
N	N	N	T	T	T

što nije moguće.

2) netočan

$$\begin{array}{cccc} - & A & C & + \\ - & B & E & - \\ + & F & A & - \\ - & B & F & + \\ + & D & A & - \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline A & B & C & D & E & F \\ \hline \mathrm{N} & \mathrm{N} & \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{N} & \mathrm{T} \\ \hline \end{array} \quad \text{što nije moguće.}$$

3) netočan

$$\begin{array}{cccc} - & A & C & + \\ + & B & E & - \\ - & F & A & - \\ + & B & F & - \\ + & D & A & - \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline A & B & C & D & E & F \\ \hline \mathrm{N} & \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{N} & \mathrm{N} \\ \hline \end{array} \quad \text{što nije moguće.}$$

4) netočan

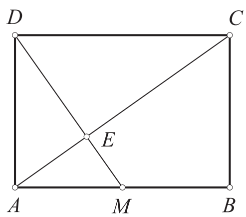
$$\begin{array}{cccc} + & A & C & - \\ - & B & E & + \\ - & F & A & + \\ - & B & F & - \\ - & D & A & + \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline A & B & C & D & E & F \\ \hline \mathrm{T} & \mathrm{N} & \mathrm{N} & \mathrm{N} & \mathrm{T} & \mathrm{N} \\ \hline \end{array}$$

5) netočan

$$\begin{array}{cccc} - & A & C & + \\ - & B & E & + \\ + & F & A & - \\ - & B & F & + \\ - & D & A & - \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline A & B & C & D & E & F \\ \hline \mathrm{N} & \mathrm{N} & \mathrm{T} & \mathrm{N} & \mathrm{T} & \mathrm{T} \\ \hline \end{array} \quad \text{što nije moguće.}$$

Učenici A i E su riješili zadatak.

4.



Kako je $|\sphericalangle AEM| = |\sphericalangle DEC|$ (vršni kutovi) i $|\sphericalangle EAM| = |\sphericalangle ECD|$ (kutovi s usporednim kracima), prema poučku K-K o sličnosti slijedi $\triangle AME \sim \triangle CDE$. Iz sličnosti slijedi $|DE| = 2|EM|$ i $|CE| = 2|AE|$.

Primjenom Pitagorina poučka imamo:

$$|AC|^2 = (2\sqrt{2})^2 + 2^2 \quad \text{ili} \quad |AC| = 2\sqrt{3} \quad \text{ili} \quad |AE| = \frac{2\sqrt{3}}{3};$$

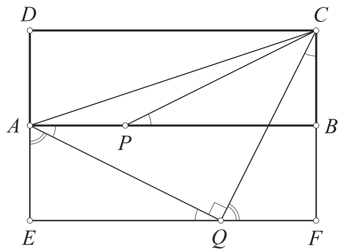
$$|DM|^2 = 2^2 + (\sqrt{2})^2 = 6 \quad \text{ili} \quad |DM| = \sqrt{6} \quad \text{ili} \quad |EM| = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

U trokutu $\triangle AME$ imamo:

$$|AM| = \sqrt{2}, \qquad |AE| = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \qquad |ME| = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Budući da je $|AM|^2 = 2$ i $|AE|^2 + |ME|^2 = \frac{12}{9} + \frac{6}{9} = 2$, odnosno $|AM|^2 = |AE|^2 + |ME|^2$, prema obratu Pitagorina poučka trokut $\triangle AME$ je pravokutan pa je $|\sphericalangle MEA| = |\sphericalangle CED| = 90°$.

5. Dopunimo pravokutnik $ABCD$ sa sukladnim pravokutnikom kao na slici. Odaberimo na $\overline{EF}$ točku Q takvu da je $|EQ| = \frac{2}{3}|EF|$.



Označimo zbog jednostavnosti $|BC| = x$. Promotrimo sada pravokutne trokute AEQ i QFC. Kako je $|AE| = |QF| = x$ i $|EQ| = |CF| = 2x$, slijedi da su oni sukladni. Iz te sukladnosti slijedi

$$|AQ| = |QC| \tag{$*$}$$

te

$$|\sphericalangle EAQ| = |\sphericalangle CQF| \quad \text{i} \quad |\sphericalangle EQA| = |\sphericalangle QCF|. \tag{$**$}$$

Sada je zbog $(*)$ i $(**)$ trokut AQC jednakokračan pravokutan.

Nadalje, kako je $|PB| = 2x$ i $|BC| = x$, slijedi da su pravokutni trokuti PBC i AEQ sukladni. Iz te sukladnosti slijedi da je $|\sphericalangle CPB| = |\sphericalangle EQA|$. Kako su $\sphericalangle EQA$ i $\sphericalangle QAB$ kutovi uz presječnicu, slijedi da je $|\sphericalangle EQA| = |\sphericalangle QAB|$.

Konačno,

$$|\sphericalangle CAB| + |\sphericalangle CPB| = |\sphericalangle CAB| + |\sphericalangle EQA| = |\sphericalangle CAB| + |\sphericalangle QAB| = |\sphericalangle QAC|.$$

Kako je trokut QAC jednakokračan pravokutan, slijedi da je $|\sphericalangle QAC| = 45°$ čime je dokaz završen.